Lehrbuch

der

Geometrie

mit Einschluß

der Coordinaten-Theorie und der Kegelschnitte.

Zweiter, Dritter und Vierter Abschnitt.

Die Stereometrie, die Coordinaten-Theorie und die Kegelschnitte.

Lehrbuch

der

Stereometrie, der Coordinaten-Theorie

und der

Kegelschnitte.

Zum Gebrauch bei den Vorträgen an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und zum Selbstunterricht

bearbeitet von

Dr. K. H. M. Aschenborn,

Professor am Berliner Cadettenhause, Lehrer und Mitglied der Studien-Commission der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule.

Berlin 1864.

Verlag der Königlichen Geheimen Ober-Hofbuchdruckerei (R. v. Decker).

Vorrede.

Die hier vorliegende zweite Hälfte des Lehrbuches der Geometrie enthält die Stereometrie, mit Einschluß der sphärischen Trigonometrie und der beschreibenden Geometrie, die Coordinaten-Theorie und die Kegelschnitte.

Je weiter der Vortrag die Elemente überschritt, desto mehr machte sich in Beziehung auf Inhalt und Methode der besondere Zweck des Buches geltend, den Officieren der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule die mathematische Grundlage für das Studium ihrer Fachwissenschaften zu geben.

In Bezug auf den Inhalt mußte aus dem reichen Stoffe dasjenige ausgewählt werden, was entweder unmittelbar oder mittelbar diesem praktischen Zwecke dient, oder auf das weitere mathematische Studium vorbereitet. Das fünfte Kapitel des zweiten Abschnittes enthält nur die Elemente der beschreibenden Geometrie und soll für den besonderen Unterricht im geometrischen Zeichnen die mathematische Grundlage sein. In der Coordinaten-Theorie, welche den Inhalt des dritten Abschnittes bildet, verfolgte der Verfasser den Zweck, den Leser auf das Studium der Kegelschnitte und der mechanischen Wissenschaften, im Besonderen der Statik, vorzubereiten; es war nicht seine Absicht, eine analytische Geometrie zu schreiben. In dem vierten

Abschnitte endlich haben die Gleichungen der Kegelschnitte für Coordinatenaxen, welche den Axen der Kegelschnitte parallel sind oder auf ihnen senkrecht stehen, eine besondere Berücksichtigung gefunden, weil diese Fälle bei praktischen Anwendungen vorzugsweise vorkommen.

Was die Methode betrifft, so hat der Verfasser so viel als möglich den Elementen sich anzuschließen gesucht und mehr nach Anschaulichkeit und Verständlichkeit, als nach Kürze streben müssen.

Das vorliegende Lehrbuch enthält über 500 neue, von dem Verfasser gebildete Uebungs-Aufgaben, welche theils zur Erläuterung und Einübung des Vorgetragenen dienen, theils solche praktische Anwendungen enthalten, die für den Artilleristen und Ingenieur von besonderem Interesse sind.

Berlin, am 18. April 1864.

Inhalt.

Zweiter Abschnitt.

Die körperliche Geometrie oder die Stereometrie.

§. 245. bis §. 396.

Drittes Kapitel.

Dritter Abschnitt.

Die Coordinaten-Theorie.

§. 397. bis §. 452.

Drittes Kapitel.

Vierter Abschnitt.

Die Kegelschnitte.

§. 453. bis §. 509.

Seite

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Zweiter Abschnitt.

Die körperliche Geometrie oder die Stereometrie.

Einleitung.

§. 245.

Durch zwei Punkte A und B im Raume kann man nur eine gerade Linie legen, deren Lage daher durch zwei ihrer Punkte vollkommen bestimmt ist. Denkt man sich nun durch die Linie AB eine Ebene gelegt, in der dann alle Punkte dieser Linie liegen müssen, so kann man die Ebene, während AB unverrückt liegen bleibt, um AB drehend bewegen. Ist nun ein dritter Punkt C im Raume gegeben, der nicht in der Richtung AB liegt, so geht die Ebene, während sie um AB eine volle Umdrehung macht, zweimal durch den Punkt C; denn AB zerlegt die Ebene in zwei Theile, und jeder Theil geht einmal durch C. Es ist aber klar, daß in dem Augenblicke, in welchem die Ebene das zweite Mal durch C geht, jeder ihrer beiden Theile genau die Lage annimmt, welche bei dem ersten Durchgange durch C der andere Theil hatte, d. h. die Ebene hat beide Mal im Raume dieselbe Lage, und diese Lage ist daher durch A, B und C bestimmt. Da man nun an die Stelle der drei Punkte auch eine Linie und einen Punkt außerhalb derselben, oder zwei sich schneidende Linien, oder endlich zwei parallele Linien setzen kann, so folgt:

Die Lage einer Ebene im Raume ist bestimmt:

1) durch drei Punkte, die nicht in einer Richtung liegen,
2) durch eine Linie und einen Punkt außerhalb derselben,
3) durch zwei sich schneidende Linien,
4) durch zwei parallele Linien.

In jedem dieser Fälle kann man durch die gegebenen Punkte oder Linien eine Ebene legen, aber immer nur eine.

§. 246.

Zwei Linien im Raume können zu einander, insofern sie nicht zusammen fallen, folgende Lagen haben:

1) sie schneiden sich in einem Punkt,
2) sie sind parallel,
3) sie schneiden sich nicht, sind aber auch nicht parallel; man nennt sie dann windschief.

Durch einen Punkt P im Raume kann man mit einer Linie a nur eine Parallele legen. Denn durch P und a kann man nur eine Ebene legen, und in ihr durch P nur eine mit a parallele Linie. — Verbindet man P mit einem Punkt Q, der nicht in dieser Ebene liegt, so sind PQ und a windschiefe Linien.

Anm. In der ebenen Geometrie waren zwei Linien parallel, wenn sie sich nicht schnitten; in der Stereometrie gehört zur Begründung der Parallelität zweier Linien der Nachweis: 1) daß sie sich nicht schneiden und 2) daß sie in derselben Ebene liegen.

§. 247.

Eine Ebene und eine Linie im Raume können zu einander folgende Lagen haben:

1) die Linie liegt in der Ebene, und dies ist der Fall, so bald zwei ihrer Punkte in der Ebene liegen;
2) die Linie schneidet die Ebene in einem Punkt;
3) die Linie ist mit der Ebene parallel, d. h. die Linie und die Ebene schneiden sich nicht, wenn man auch beide ins Unendliche sich verlängert denkt.

Anm. Der Leser sei auf einen Sprachgebrauch aufmerksam gemacht. Durch eine Linie eine Ebene legen heißt: die Ebene so legen, daß sie jeden Punkt der Linie in sich aufnimmt. Hiervon zu unterscheiden ist: eine Linie durch eine Ebene schneiden.

§. 248.

Zwei Ebenen (falls sie nicht zusammenfallen) schneiden sich entweder in einer geraden Linie, oder sie sind parallel, d. h. sie schneiden sich, auch unendlich verbreitet, nie.

Die Durchschnittslinie zweier Ebenen kann nicht krumm sein; denn dann gäbe es in ihr drei nicht in derselben Richtung liegende Punkte, und solche können nach §. 245. nur in einer Ebene liegen.

Anmerk. Liegt eine Linie in zwei Ebenen, so ist sie die Durchschnittslinie derselben; liegt ein Punkt in zwei Ebenen, so liegt er in ihrer Durchschnittslinie.

§. 249.

Drei Ebenen im Raume können zu einander folgende Lagen haben:

I. alle drei sind mit einander parallel. Man braucht sich nur die mittlere Ebene mit jeder der beiden andern parallel zu denken, so können sich diese auch nicht schneiden.

II. Zwei Ebenen sind parallel und werden durch die dritte Ebene geschnitten; es geschieht dies immer in parallelen Durchschnittslinien.

Bew. Die Durchschnittslinien liegen in derselben Ebene (nämlich in der dritten); sie können also nur entweder parallel sein, oder sich schneiden. Schneiden können sie sich aber nicht, weil ihr Durchschnittspunkt ein gemeinschaftlicher Punkt der beiden Ebenen sein müßte, die nach der Voraussetzung parallel sind, also gar keinen gemeinschaftlichen Punkt haben; folglich sind sie parallel.

III. Alle drei Ebenen können sich schneiden, und zwar:

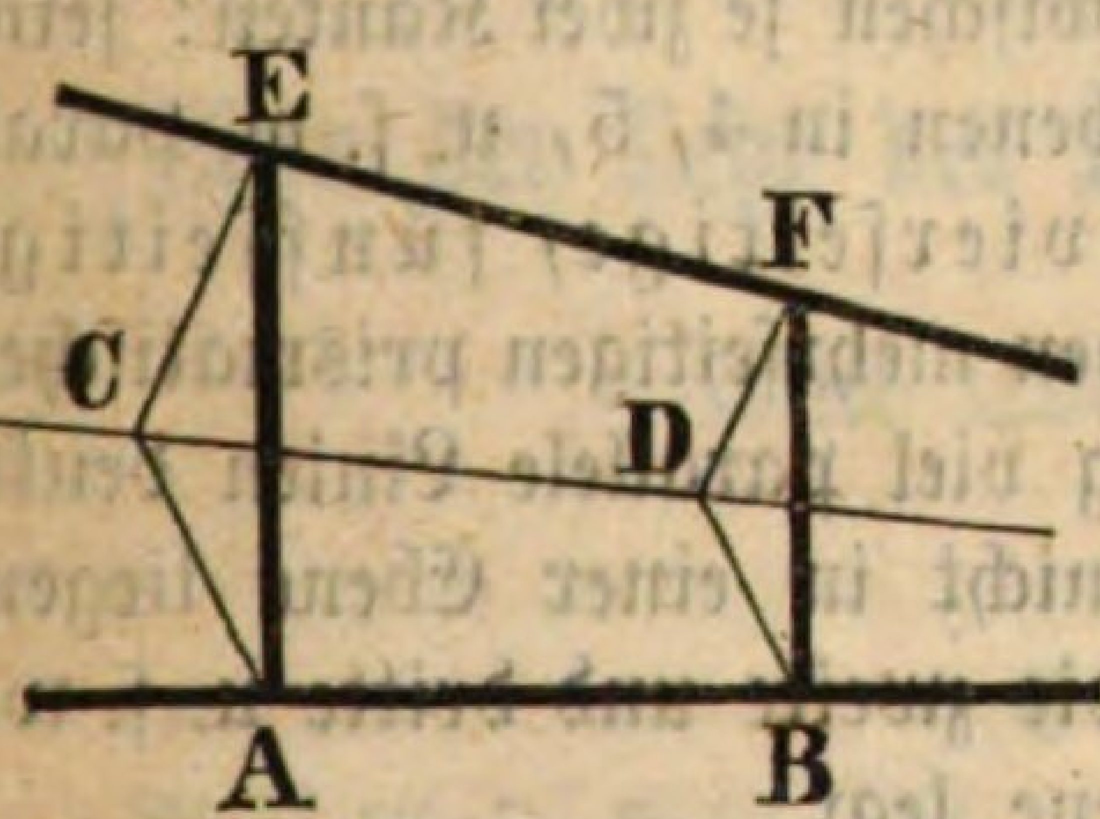
1) in einer einzigen geraden Linie;

2) in drei geraden Linien, und in diesem Falle sind die drei Durchschnittslinien entweder

a) alle drei parallel, oder

b) alle drei schneiden sich in einem Punkt.

Bew. zu 2). Die drei Ebenen sind: ABDC, ABFE und CDFE; die Durchschnittslinien: AB, CD und EF. (Um die Figur richtig zu erkennen, möge man sich etwa ABDC horizontal denken, AB vorn, CD hinten; EF liegt oben; die ganze Figur ist dachförmig.) Es ist nun zu beweisen, daß nur zwei Fälle Statt finden können: entweder sind alle drei Durchschnittslinien parallel, oder alle drei schneiden sich in einem Punkt.



Windschief kann keine mit einer andern sein; denn je zwei liegen in einer Ebene. Nimmt man nun an, AB und CD schneiden sich in P, so liegt P in den beiden Ebenen ABFE und CDFE (natürlich auch in der dritten Ebene), weil AB und CD resp. in diesen Ebenen liegen; daher muß P (§. 248. Anm.) in ihrer Durchschnittslinie EF liegen; also muß diese Linie gehörig verlängert durch P gehen. Hiermit ist also bewiesen, daß, wenn zwei Durchschnittslinien sich schneiden, dann auch die dritte durch ihren Durchschnittspunkt geht. Es folgt aber hieraus indirect, daß, wenn zwei Durchschnittslinien parallel sind, dann auch die dritte mit beiden parallel ist. Ist z. B. AB ⫩ CD, und wollte man annehmen, EF schnitte CD in Q: so müßte, wie eben bewiesen, AB auch durch Q gehen, was der Voraussetzung AB ⫩ CD widerspricht.

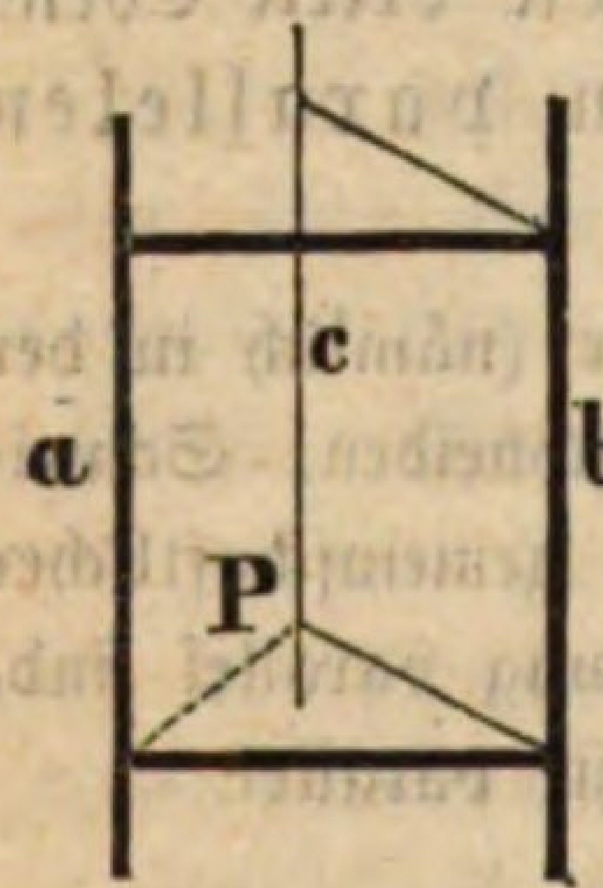
§. 250.
Lehrsatz.

Sind zwei Linien im Raume derselben dritten parallel, so sind sie mit einander parallel.

Voraus s. a ╪ b und b ╪ c.

Behaupt. a ╪ c.

Bew. Der Beweis folgt aus §. 249. Man denke sich durch a und b

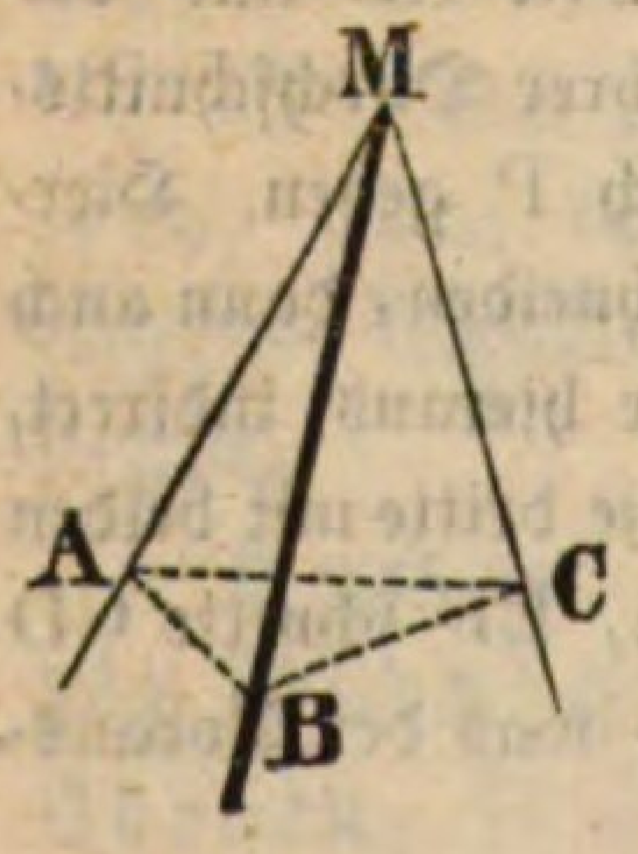


eine Ebene gelegt, und eine zweite durch b und c (§. 245. Nr. 4.); dann lege man noch eine Ebene durch a und einen beliebigen Punkt P der Linie c (§. 245. Nr. 2.). Man hat nun drei Ebenen, welche sich in drei Durchschnittslinien schneiden; a und b sind zwei dieser Durchschnittslinien, von der dritten kennt man zunächst nur einen Punkt P. Weil aber a ╪ b ist, so müssen alle drei Durchschnittslinien parallel sein, und weil durch P die Linie c ╪ b geht, so muß nach §. 246. c die dritte Durchschnittslinie sein, woraus c ╪ a folgt.

§. 251.
Erklärung.

Schneiden sich drei Ebenen in drei parallelen Durchschnittslinien, so heißt der von ihnen eingeschlossene, nach zwei entgegengesetzten Richtungen hin unbegrenzte Theil des Raumes ein dreiseitiger prismatischer Raum; die Durchschnittslinien heißen seine Kanten und die Theile der begrenzenden Ebenen zwischen je zwei Kanten: seine Seiten. Schneiden sich 4, 5, u. s. w. Ebenen in 4, 5, u. s. w. parallelen Durchschnittslinien, so entsteht der vierseitige, fünfseitige u. s. w. prismatische Raum. Man kann den mehrseitigen prismatischen Raum erzeugen, wenn man sich beliebig viel parallele Linien denkt, von denen drei auf einander folgende nicht in einer Ebene liegen, und nun durch die erste und zweite, durch die zweite und dritte u. s. w., endlich durch die letzte und erste eine Ebene legt.

Schneiden sich drei Ebenen in drei Durchschnittslinien, welche sich in einem Punkt schneiden, so heißt der von diesen Ebenen eingeschlossene



Theil des Raumes, welcher nach einer Richtung hin unbegrenzt ist, eine dreikantige oder dreiseitige körperliche Ecke oder auch ein körperliches Dreieck. — Die Durchschnittslinien MA, MB und MC heißen die Kanten, ihr Durchschnittspunkt M die Spitze, und die Theile der begrenzenden Ebenen zwischen je zwei Kanten, also die Winkel AMB, BMC und CMA, die Seiten der körperlichen Ecke.

schneiden sich 4, 5, u. s. w. Ebenen in 4, 5, u. s. w. Durchschnittslinien, welche in einem Punkt zusammenlaufen, so entsteht die **vierkantige, fünfkantige** u. s. w. körperliche Ecke. Man kann die mehrkantige körperliche Ecke erzeugen, wenn man von einem Punkt im Raume beliebig viel Linien zieht, von denen drei auf einander folgende nicht in einer Ebene liegen, und nun durch die erste und zweite, dann durch die zweite und dritte u. s. w., endlich durch die letzte und erste eine Ebene legt.

Wählt man in den drei Kanten einer dreikantigen körperlichen Ecke drei Punkte A, B und C und legt durch sie eine Ebene, so entsteht ein völlig begrenzter Raum MABC, also ein **Körper**, und dieser zeichnet sich vor allen andern Körpern dadurch aus, daß die Anzahl seiner begrenzenden Ebenen die geringste ist, durch welche überhaupt ein Körper begrenzt werden kann, nämlich **vier**. Der dreiseitige prismatische Raum müßte schon von zwei Ebenen durchschnitten werden, wenn ein Körper erzeugt werden soll; die Anzahl der begrenzenden Ebenen ist bei diesem Körper fünf.

Die nächsten drei Kapitel handeln: von der Lage der Ebenen und Linien im Raume, von den körperlichen Ecken, und von den Körpern.

Erstes Kapitel.

Von der Lage der Linien und Ebenen im Raume.

Eine Ebene und eine Linie.

§. 252.

Erklärung.

Eine Linie steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf jeder Linie senkrecht steht, die in der Ebene liegt und durch ihren Durchschnittspunkt mit der Ebene geht.

§. 253.

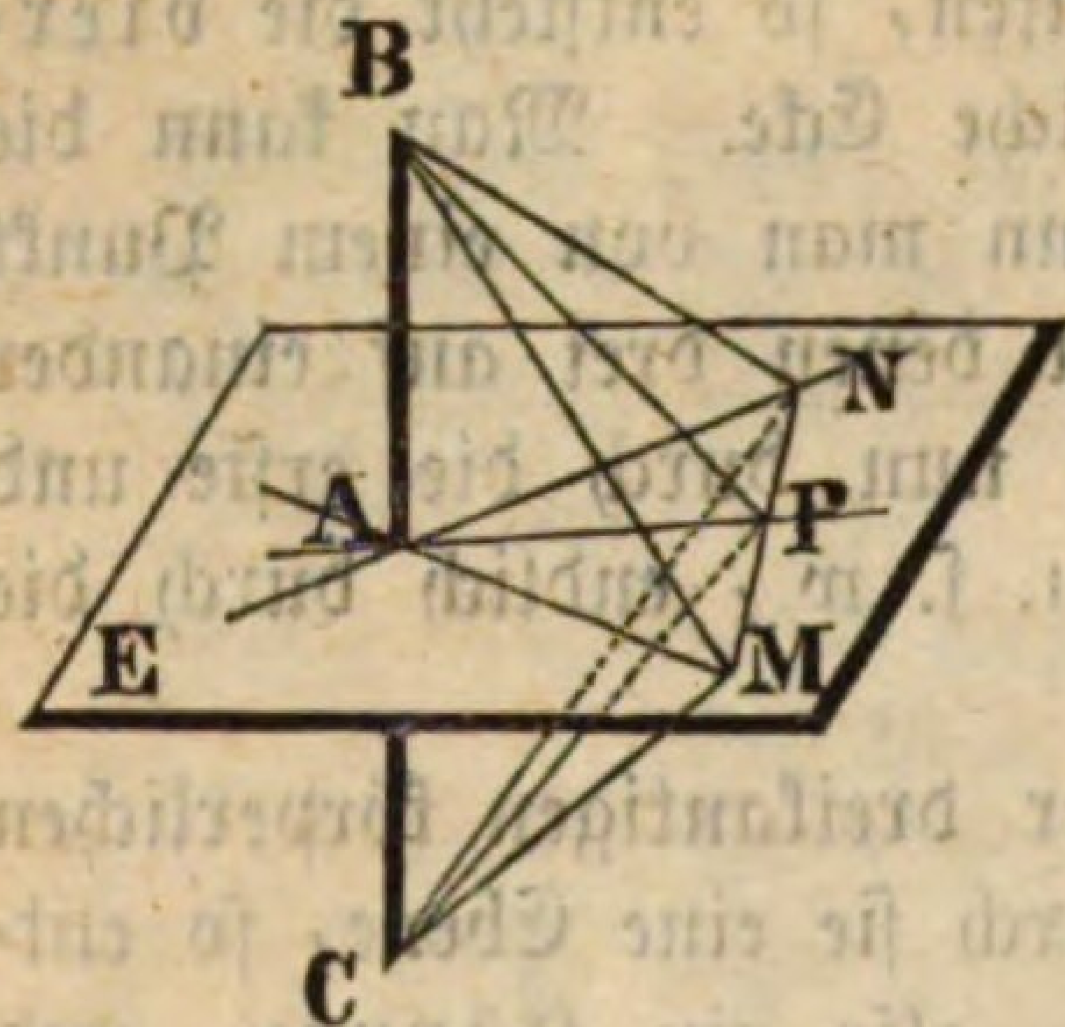
Lehrsätze.

I. **Eine Linie steht auf einer Ebene E senkrecht, wenn sie auf zwei sich schneidenden Linien in dieser Ebene senkrecht steht.**

Vorauss. AB ⊥ AN und AB ⊥ AM.

Behaupt. AB ⊥ E.

Bew. Man hat zu zeigen, daß AB auch auf jeder andern Linie in der Ebene E, welche durch A geht, senkrecht steht.



AP sei eine solche beliebige Linie. AN und AM bilden um A vier Winkel; man schneide die Schenkel des Winkels, in dessen Ebene AP liegt, durch eine beliebige Linie NM, welche AP in P schneiden mag. Man mache ferner AB = AC und verbinde B und C mit den drei Punkten N, P und M. Aus Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels ergeben sich nun zwei Paar congruenter Dreiecke, nämlich:

$$\triangle BAN \cong \triangle CAN, \text{ folglich } BN = CN$$
$$\triangle BAM \cong \triangle CAM, \quad \text{»} \quad BM = CM.$$

Hieraus folgt weiter aus Gleichheit der drei Seiten:

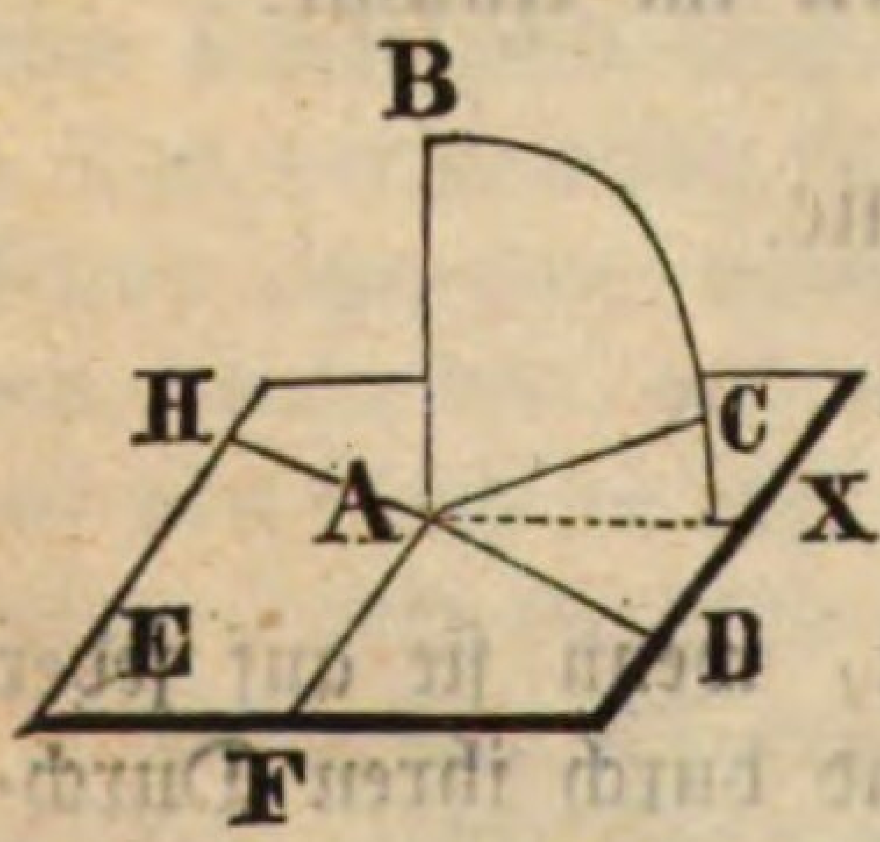
$$\triangle BNM \cong \triangle CNM, \text{ folglich } \sphericalangle BNM = \sphericalangle CNM.$$

Aus Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels hat man jetzt:

$$\triangle BNP \cong \triangle CNP, \text{ folglich } BP = CP; \text{ daher:}$$
$$\triangle BAP \cong \triangle CAP, \quad \text{»} \quad \sphericalangle BAP = \sphericalangle CAP.$$

Da nun diese gleichen Winkel Nebenwinkel sind, so ist jeder = R; folglich $AB \perp AP$.

II. Stehen auf einer Linie AB in demselben Punkte A beliebig viele Linien AC, AD, AF, AH u. s. w. senkrecht, so liegen alle diese Linien in einer Ebene, auf welcher dann auch (nach I.) AB senkrecht steht.



Bew. Durch zwei dieser Linien kann man eine Ebene legen, z. B. durch AD und AF; E sei diese Ebene, so ist nach I. $AB \perp E$. Gesetzt nun, AC läge nicht in der Ebene E, so lege man durch AB und AC eine Ebene, welche die Ebene E in AX schneiden mag. Alsdann ist $AB \perp AX$; nach der Voraussetzung ist aber auch $AB \perp AC$, und dies giebt den Widerspruch, daß $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAX$ sein müßte, also ein Theil dem Ganzen gleich.

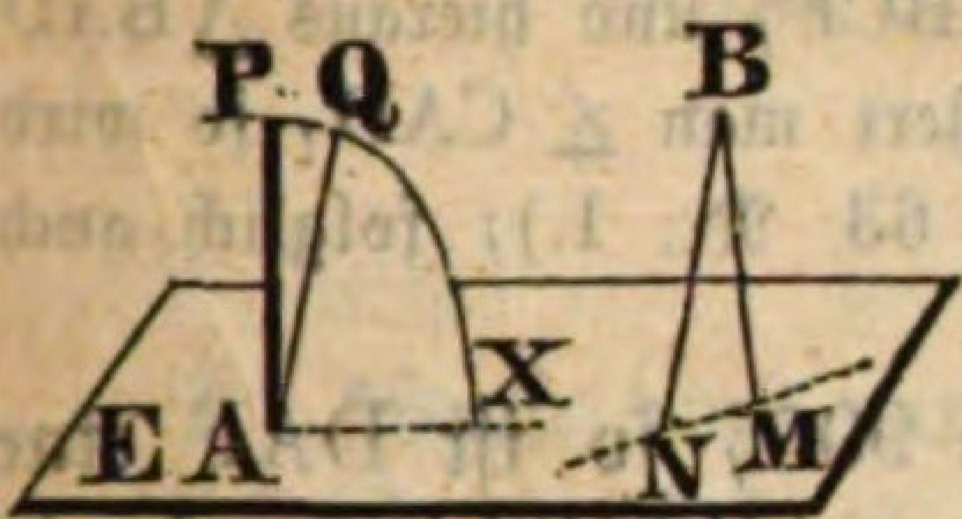
§. 254.

Lehrsätze.

1) In einem Punkte A einer Ebene E kann man auf E nur **eine** Senkrechte errichten.

2) Von einem Punkte B außerhalb einer Ebene E kann man auf E nur **eine** Senkrechte fällen. Diese Senkrechte ist unter allen Verbindungslinien des Punktes B mit Punkten der Ebene E die kürzeste und heißt die **Entfernung** des Punktes B von der Ebene E.

Beweis zu 1. Angenommen, es wären in A zwei Linien AP und AQ auf E senkrecht: so lege man durch beide eine Ebene, welche E in AX schneiden mag. Man hat dann unmittelbar den Widerspruch, daß PAX und QAX als rechte Winkel einander gleich sein müßten, während doch der eine ein Theil des andern ist.



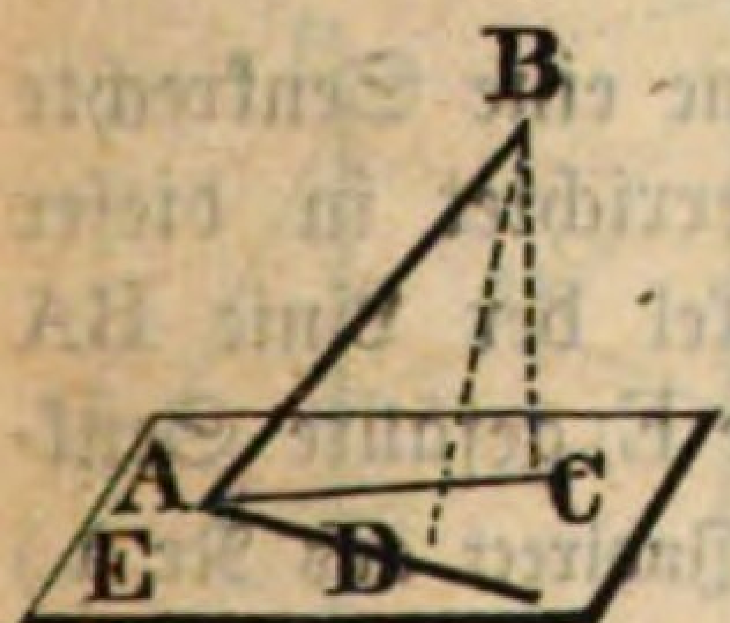
Beweis zu 2. Angenommen, es gäbe zwei von B auf E senkrecht gefällte Linien: BN und BM, so würde, wenn man NM zieht, ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entstehen. — Der zweite Theil des Satzes folgt daraus, daß die Kathete kleiner als die Hypotenuse ist.

§. 255.

Die Linie, welche eine Ebene schief schneidet. Der Neigungswinkel.

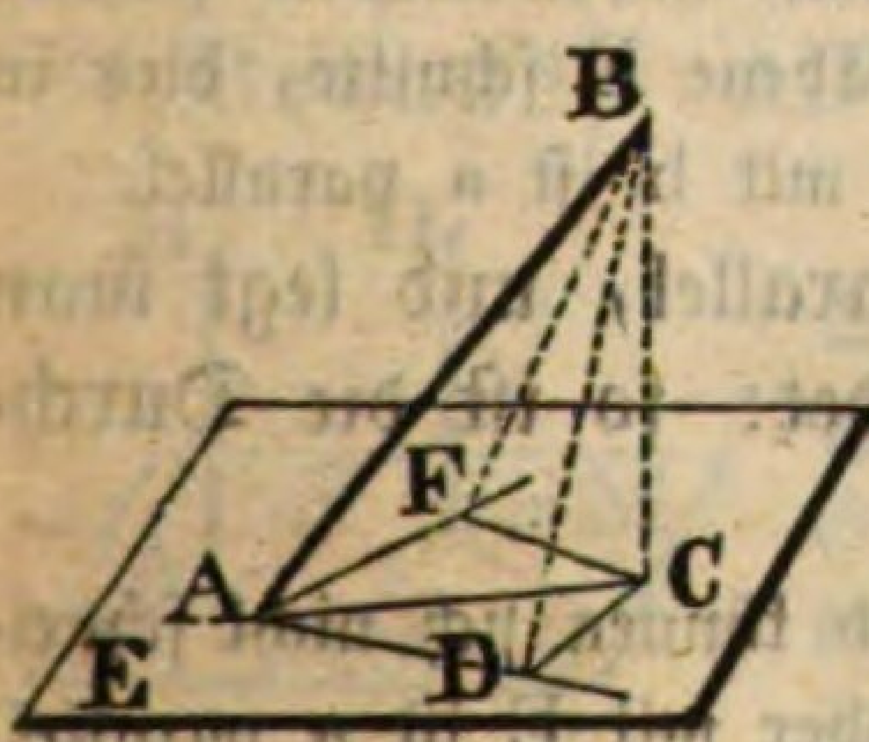
Steht eine Linie AB auf einer Ebene E nicht senkrecht, so bildet sie mit den Linien in der Ebene E, welche durch ihren Durchschnittspunkt mit E gehen, verschiedene Winkel. In Beziehung auf diese Winkel merke man:

1) Fällt man von einem beliebigen Punkte B der Linie AB ein Loth BC auf E und verbindet den Fußpunkt C desselben mit dem Durchschnittspunkte A der Linie AB und der Ebene E, so ist ∡BAC der kleinste von allen Winkeln, welchen AB mit den Linien in der Ebene E bildet und wird der Neigungswinkel der Linie AB gegen die Ebene E genannt. — Dieser Neigungswinkel ist sonach immer spitz.



Bew. Zieht man eine beliebige andere Linie AD in der Ebene E, macht AD = AC und verbindet B mit D, so haben die △△ BAC und BAD zwei Paar gleicher Seiten, während die dritten Seiten ungleich sind, nämlich BC < BD (§. 254. Nr. 2.). Hieraus folgt ∡ BAC < ∡ BAD (§. 27. II.).

Anm. Aus dem vorstehenden Beweise folgt indirect, daß die Lothe, von allen Punkten der Linie AB auf die Ebene E gefällt, ihre Fußpunkte in der Richtung AC haben; denn aus der Annahme, ein Loth erzeugte eine andere Richtung, würde der Widerspruch folgen, daß von zwei Winkeln jeder kleiner als der andere sein müßte.



2) Ist BC ⊥ E, also BAC der Neigungswinkel der Linie AB gegen E, und trägt man in E auf beiden Seiten von AC an AC gleiche Winkel an, ∡ CAD = ∡ CAF: so bildet AB mit AD und AF auch gleiche Winkel. — ∡BAD wird um so größer, je größer ∡CAD (innerhalb 2R) ist.

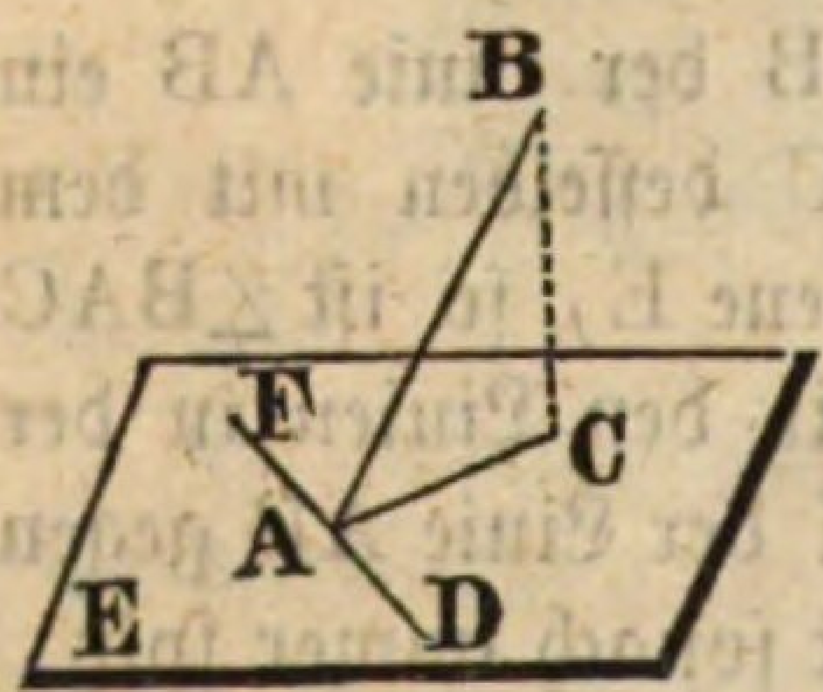
Bew. Man mache AD = AF und verbinde D und F mit B und C; dann ist △CAD ≅ △CAF; hieraus △BCD ≅ △BCF, und hieraus △BAD ≅ BAF; folglich ∡BAD = ∡BAF. — Vergrößert man ∡CAD, so wird auch CD größer (§. 27. I.); folglich auch BD (§. 63. Nr. 1.); folglich auch ∡BAD (§. 27. II.).

3) Macht man ∡CAD = ∡CAF = 90°, so ist DAF eine gerade Linie; und weil immer noch ∡BAD = ∡BAF sein muß, so ist jeder dieser Winkel ein rechter, d. h. AB steht senkrecht auf der in E durch A gehenden und auf AC senkrechten Linie. Hierdurch ist für jede Lage, in welcher AB die Ebene E schief schneidet, die einzige gerade Linie in E gefunden, auf welcher AB senkrecht steht.

§. 256.

Lehrsätze.

1) Fällt man von einem Punkte B im Raume eine Senkrechte BC auf eine Ebene E, von ihrem Fußpunkte C aber wieder eine Senkrechte CA auf eine beliebige Linie DF in der Ebene E, und verbindet man B mit A: so steht auch BA senkrecht auf DF.



Bew. Dieser Lehrsatz weicht von dem Satze Nr. 3. im vorigen §. nur in der Form ab; er kommt aber gerade in dieser Form sehr häufig zur Anwendung. Der Beweis kann genau so, wie der zu Nr. 2. im vorigen §. geführt werden; die Buchstaben stimmen mit den Buchstaben in der Figur zu jenem Satze überein.

2) Fällt man von einem Punkte B im Raume eine Senkrechte BA auf eine Linie DF in einer Ebene E und errichtet in dieser Ebene AC ⊥ DF, so ist BAC der Neigungswinkel der Linie BA gegen die Ebene E, d. h. die von B auf die Ebene E gefällte Senkrechte BC hat ihren Fußpunkt in der Linie AC. (Indirect aus Nr. 1.)

§. 257.

Lehrsätze.

1) Eine Linie a im Raume ist mit einer Ebene E parallel, wenn sie mit einer Linie b in dieser Ebene parallel ist.

Bew. Durch a und b kann man eine Ebene legen, und weil alle Punkte von a in dieser Ebene liegen, so müßte, wenn a die Ebene E schnitte, dies in der Durchschnittslinie b beider Ebenen geschehen; aber mit b ist a parallel.

2) Ist eine Linie a mit einer Ebene E parallel, und legt man durch a eine Ebene, welche die Ebene E schneidet: so ist die Durchschnittslinie mit a parallel.

Bew. Beide Linien liegen in derselben Ebene und können sich nicht schneiden, weil der Durchschnittspunkt in E liegen müßte; aber mit E ist a parallel.

Eine Ebene und mehrere Linien.

§. 258.

Lehrsätze.

1) Wenn von parallelen Linien die eine a mit einer Ebene E parallel ist, so sind es alle, falls sie nicht in der Ebene liegen.

Bew. aus §. 257. und 250. Legt man durch a eine Ebene, welche die Ebene E schneidet, so ist die Durchschnittslinie mit a, also auch mit den andern Linien parallel; hieraus folgt, daß diese auch mit E parallel sind.

2) Wenn eine Ebene eine von beliebig vielen parallelen Linien schneidet, so schneidet sie, gehörig verbreitet, auch die übrigen.

Bew. indirect aus 1).

§. 259.

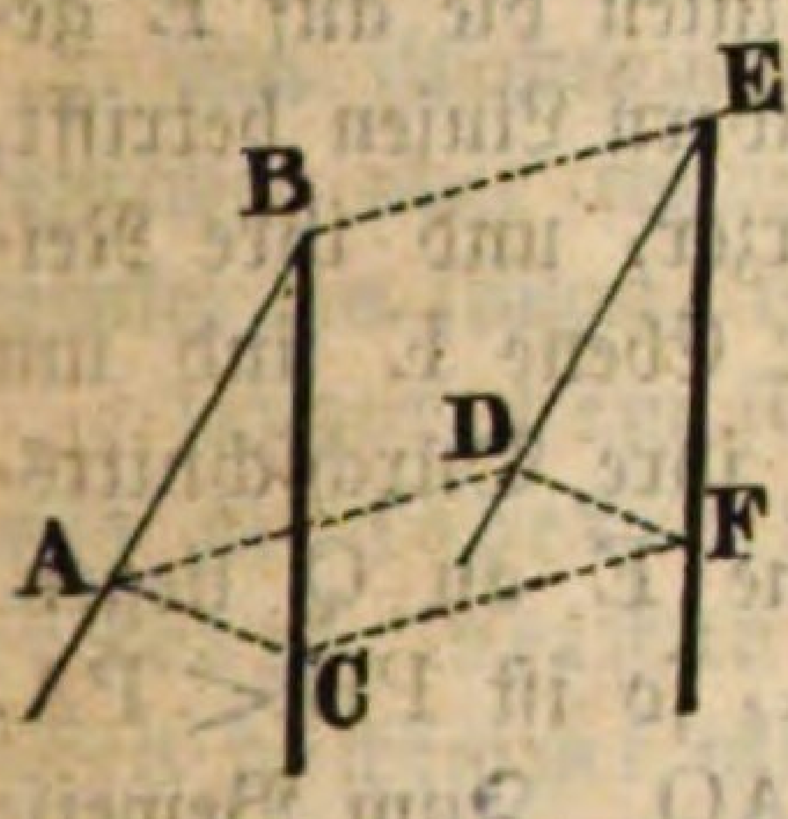
Lehrsatz.

Wenn zwei Winkel im Raume parallele Schenkel haben, so sind sie einander gleich, oder Supplementswinkel. Gleich sind sie, wenn beide Paar paralleler Schenkel gleichlaufend-parallel oder beide Paar entgegengesetzt-parallel sind; Supplementswinkel sind sie, wenn das eine Paar gleichlaufend-parallel, das andere entgegengesetzt-parallel ist.

Vorauss. BA ╪ ED und BC ╪ EF.

Behaupt. $\measuredangle$ ABC = $\measuredangle$ DEF.

Bew. Schneidet man von den parallelen Schenkeln beliebig große, gleiche Stücke ab, BA = ED und BC = EF, und zieht BE, AD, CF, AC und DF: so sind ABED und CBEF Parallelogramme; folglich ist AD gleich und parallel CF. Daher ist auch ADFC ein Parallelogramm; folglich AC = DF, woraus Δ ABC $\cong$ Δ DEF, also $\measuredangle$ ABC = $\measuredangle$ DEF folgt. — Jeder Winkel ist ferner dem Scheitelwinkel des andern gleich, und ist das Supplement des Nebenwinkels des andern.



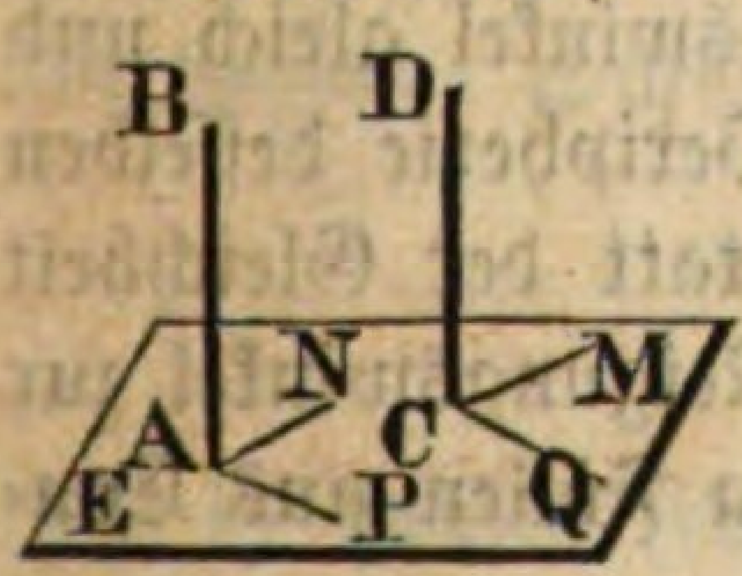
§. 260.

Folgerungen. Gesetze.

1) Wenn von parallelen Linien die eine auf einer Ebene senkrecht steht, so gilt dies auch von den andern. (Vergl. §. 258. Nr. 2.)

Vorauss. AB ╪ CD, AB ⊥ E. Behaupt. CD ⊥ E.

Bew. Man ziehe in E die Linie AP ╪ CQ, so ist $\measuredangle$BAP = $\measuredangle$DCQ, und weil nach der Voraussetzung $\measuredangle$BAP = R ist, so ist auch $\measuredangle$DCQ = R, d. h. es ist CD ⊥ CQ. Zieht man noch ein Paar paralleler Linien, AN ╪ CM, so ist eben so zu beweisen: CD ⊥ CM; hieraus folgt aber CD ⊥ E.



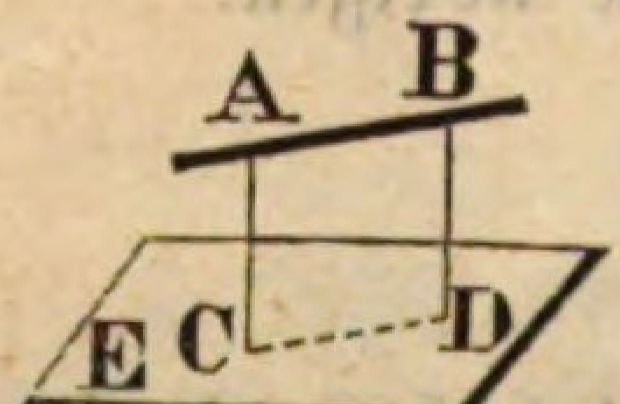
2) Linien, welche auf derselben Ebene senkrecht stehen, sind parallel.

Bew. indirect aus 1) und §. 254. Nr. 1.

3) Parallele Linien schneiden dieselbe Ebene unter gleichen Neigungswinkel.

Bew. Man construire die Neigungswinkel, so entstehen rechtwinklige Dreiecke, in welchen die Complemente der Neigungswinkel nach Nr. 2. und §. 259. einander gleich sind. — Der umgekehrte Lehrsatz ist nicht richtig.

4) Wenn eine Linie AB einer Ebene E parallel ist, so haben alle ihre Punkte von E gleiche Entfernung.



Bew. Fällt man AC und BD ⊥ E, so ist ABDC ein Rechteck (§. 257. Nr. 2.)

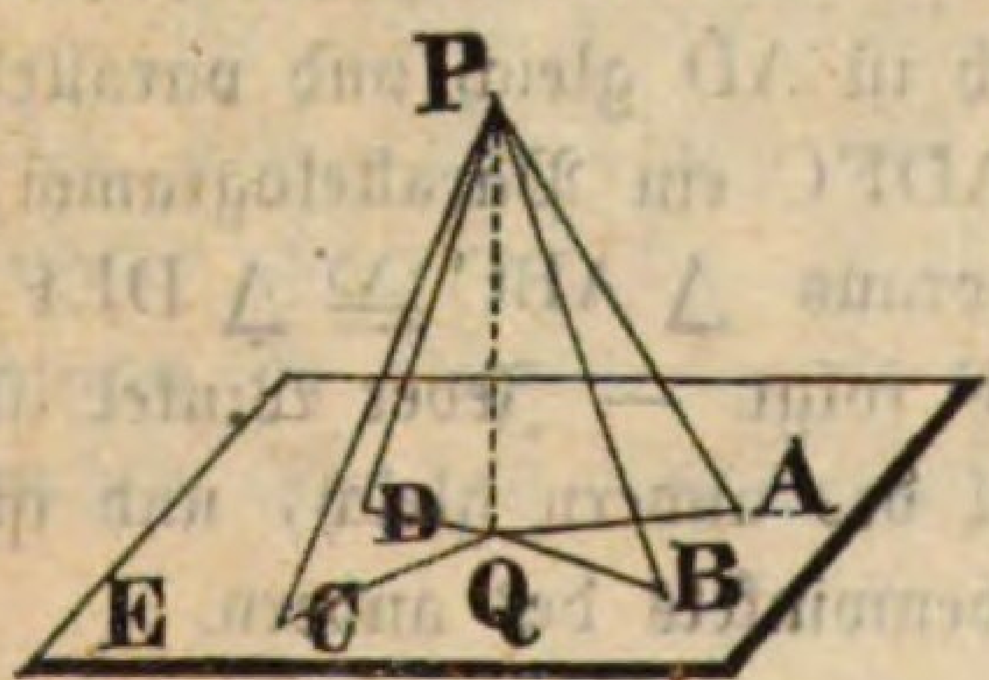
5) Sind zwei Punkte A und B einer Linie AB von einer Ebene gleich weit entfernt, und liegen sie auf derselben Seite dieser Ebene: so ist die Linie der Ebene parallel.

Bew. Es wird AB ∦ CD, folglich AB ∦ E (§. 257. Nr. 1.).

§. 261.

Ueber die Verbindungslinien eines Punktes P im Raume mit den Punkten einer Ebene E.

Wir wissen bereits, daß von allen diesen Linien die auf E gefällte Senkrechte PQ die kürzeste ist. Was die andern Linien betrifft,



so sind sie um so kürzer, und ihre Neigungswinkel mit der Ebene E sind um so größer, je näher ihre Durchschnittspunkte mit der Ebene E an Q liegen. Ist z. B. QB < QA, so ist PB < PA, aber $\measuredangle$ PBQ > $\measuredangle$ PAQ. Zum Beweise braucht man nur das ΔPQB so um PQ herum zu drehen, bis QB in QA fällt.

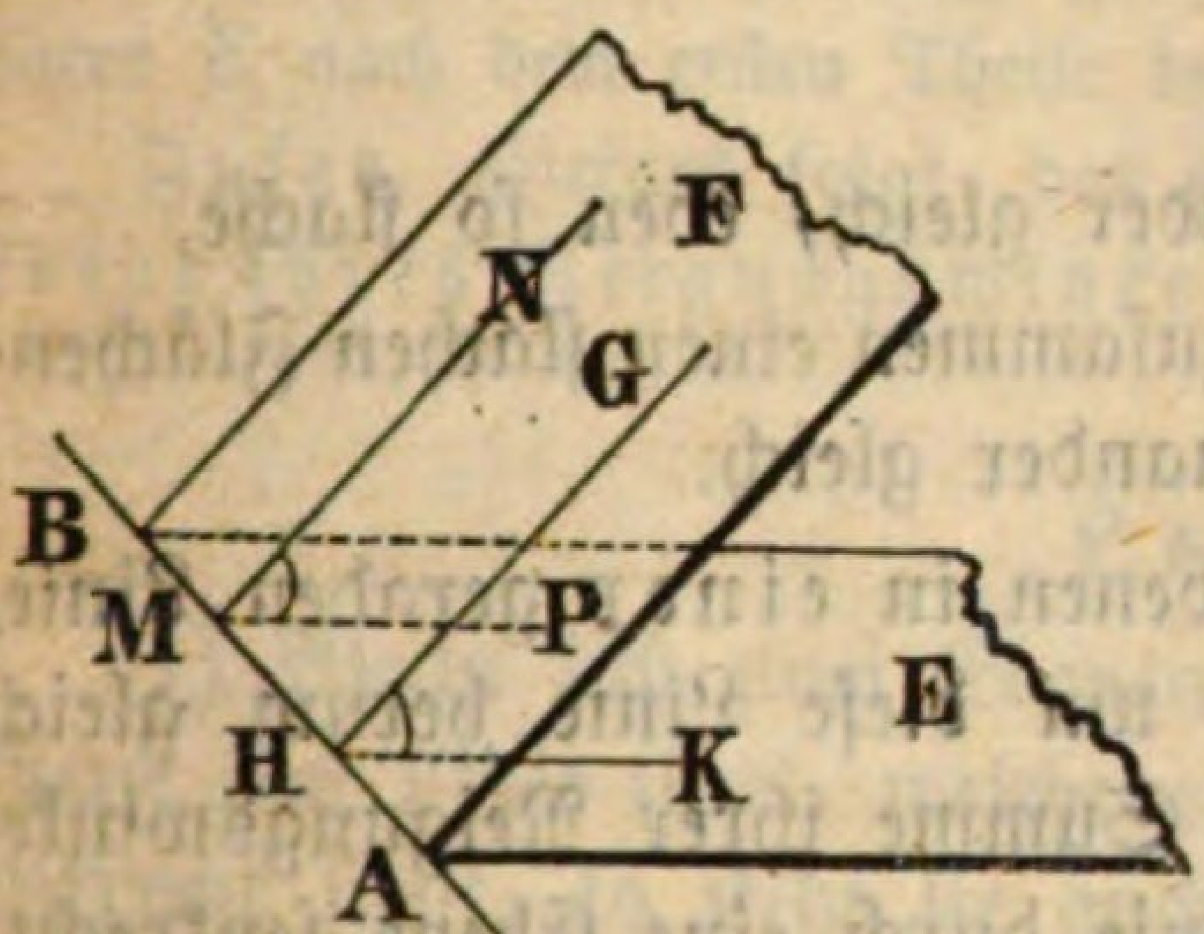
Ist QA = QB = QC = QD u. s. w., so sind die Linien PA, PB, PC, PD u. s. w. gleich lang und haben gleiche Neigungswinkel zur Ebene E. Umgekehrt: sind die von P nach Punkten der Ebene gezogenen Linien gleich lang, so sind ihre Neigungswinkel gleich und ihre Endpunkte in der Ebene E liegen alle in der Peripherie desselben Kreises; der Mittelpunkt dieses Kreises ist Q. Statt der Gleichheit der Linien, kann man auch die Gleichheit ihrer Neigungswinkel zur Voraussetzung machen. Der Beweis folgt in allen Fällen aus Congruenz der Dreiecke PQA, PQB, PQC u. s. w.

Mehrere Ebenen und Linien.

§. 262.

Erklärung.

Zwei Ebenen E und F, die in einer (unendlich langen) Durchschnittslinie AB zusammentreffen, ohne über diese Linie verlängert (verbreitet) zu sein, theilen den Raum in zwei Theile, von denen jeder ein **Flächenwinkel** heißt. Die Ebenen E und F sind seine **Schenkel**, die Durchschnittslinie AB ist seine **Scheitelkante** (oder nur **Kante**).



Errichtet man in einem Punkte H der Kante AB auf AB in jeder Ebene eine Senkrechte, HG in F und HK in E, so heißt resp. der concave oder convexe Winkel GHK der **Neigungswinkel** der beiden Ebenen (zu einander). An welcher Stelle H liegt, ist gleichgültig; denn errichtet man in M die beiden Senkrechten MN und MP auf AB in den Ebenen F und E, so ist $\measuredangle$ NMP = $\measuredangle$GHK wegen der parallelen Schenkel. Hieraus folgt also, **daß zu jedem Flächenwinkel nur ein Neigungswinkel gehört.**

Ein Flächenwinkel heißt ein spitzer, rechter, stumpfer, flacher, concaver oder convexer Flächenwinkel, je nach dem sein Neigungs winkel ein spitzer, rechter, stumpfer u. s. w. Winkel ist.

Unter dem Flächenwinkel, den zwei Ebenen E und F mit einander bilden, soll immmer der concave, nie der convexe, verstanden werden, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt wird.

Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter Winkel (also auch der Flächenwinkel), so sagt man, die Ebenen stehen auf einander senkrecht.

Denkt man sich die Ebenen E und F über ihre Scheitelkante verbreitet, so entstehen vier Flächenwinkel, von denen je zwei neben einander liegende **Neben-Flächenwinkel**, je zwei einander gegenüberliegende **Scheitel-Flächenwinkel** heißen.

§. 263.

Folgerungen.

1) **Gleiche Flächenwinkel sind congruent.**

Bew. durch Aufeinanderlegen (vergl. §. 7. Nr. 1.).

2) Die Durchschnittslinie zweier Ebenen steht auf der Ebene des Neigungswinkels beider senkrecht (§. 253. I.). — Schneidet man die Durchschnittslinie durch eine Ebene senkrecht, so wird der Neigungswinkel erzeugt.

3) Zu gleichen Flächenwinkeln gehören gleiche Neigungswinkel, und umgekehrt.

Bew. durch Aufeinanderlegen.

4) Rechte Flächenwinkel sind einander gleich; eben so flache.

5) Neben-Flächenwinkel betragen zusammen einen flachen Flächenwinkel. Scheitel-Flächenwinkel sind einander gleich.

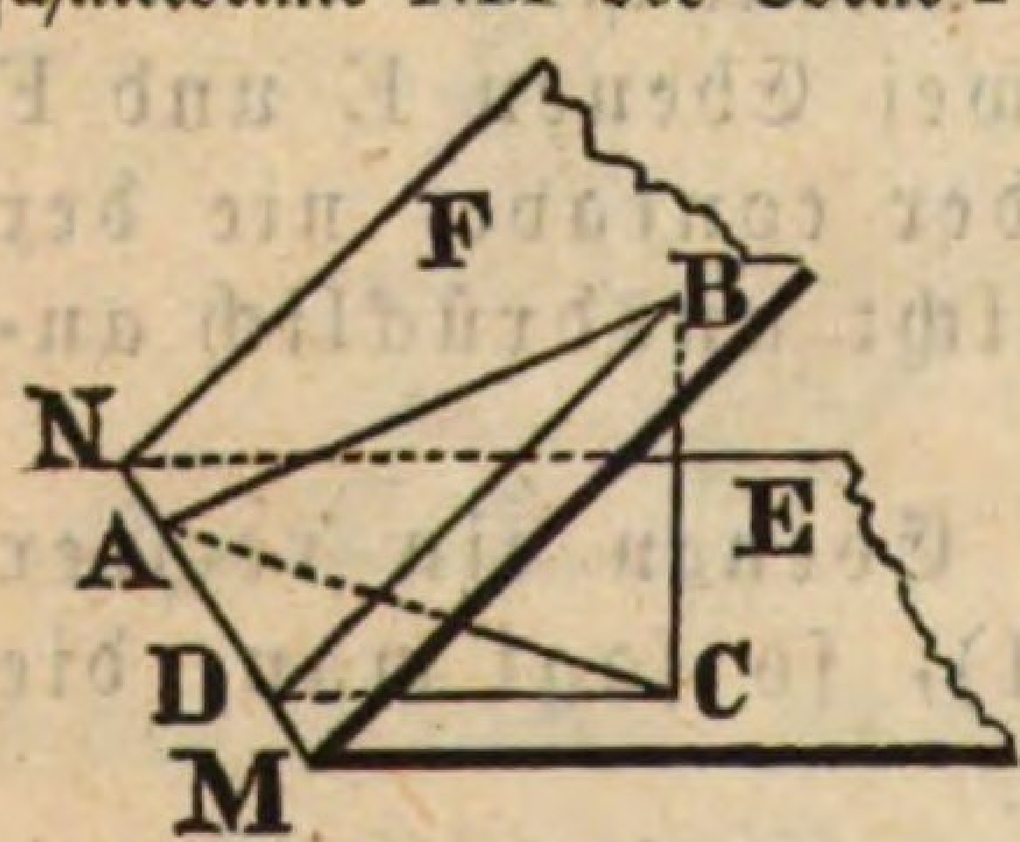
6) Schneiden sich beliebig viele Ebenen in einer geraden Linie, so ist die Summe aller Flächenwinkel um diese Linie herum gleich vier rechten Flächenwinkeln. Auch die Summe ihrer Neigungswinkel ist = 4R; denn schneidet man die Linie durch eine Ebene senkrecht, so werden diese Neigungswinkel erzeugt und liegen in einer Ebene um einen Punkt herum.

§. 264.

Lehrsatz.

Von allen Linien, die in einer von zwei sich schneidenden Ebenen liegen, bildet diejenige mit der andern Ebene den größten Neigungswinkel, welche auf der Durchschnittslinie der Ebenen senkrecht steht, und dieser Winkel ist zugleich der Neigungswinkel beider Ebenen.

Bew. In der Ebene F sei die Linie AB nicht senkrecht auf der Durchschnittslinie NM der Ebene F und E; man fälle von einem beliebigen Punkte B



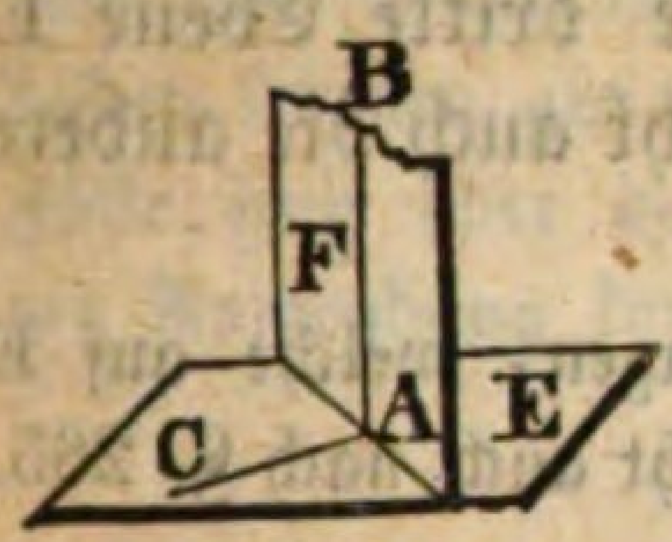
derselben BC ⊥ E, und in der Ebene E fälle man CD ⊥ NM und ziehe BD. Nach §. 256. Nr. 1. steht BD ⊥ NM, und da alle auf NM senkrechte Linien in der Ebene F mit E gleiche Neigungswinkel bilden (§. 260. Nr. 3.), so ist, wenn man noch AC zieht, zu beweisen, daß ∡ BDC > ∡ BAC ist. Diese Behauptung ist aber nach §. 261. richtig, weil CD < CA ist.

§. 265.

Lehrsatz.

Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn die eine durch eine Linie geht, welche auf der andern senkrecht steht, oder wenn sie mit einer solchen Linie parallel ist.

Bew. Es sei AB ⊥ E, und die Ebene F gehe durch AB. Errichtet man in der Ebene E im Punkte A eine Senkrechte AC auf die Durchschnittslinie



beider Ebenen, so steht nach der Voraussetzung AB auf der Durchschnittslinie und auf AC senkrecht. Es ist daher $\measuredangle$ BAC = R, und dieser Winkel ist der Neigungswinkel beider Ebenen; folglich steht F $\perp$ E. — Geht F nicht durch AB, sondern ist F $\nparallel$ AB: so lege man durch AB eine Ebene, welche F schneidet. Die Durchschnittslinie ist dann parallel AB, steht also nach §. 260. Nr. 1. auf E senkrecht, daher auch die Ebene F nach dem ersten Theile des Lehrsatzes.

Zusatz. Hieraus folgt, daß zwei sich schneidende Ebenen auf der Ebene ihres Neigungswinkels senkrecht stehen (§. 263. Nr. 2.).

§. 266.
Lehrsätze.

1) Wenn sich zwei Ebenen senkrecht schneiden, und in der einen Ebene eine Linie liegt, welche auf der Durchschnittslinie beider Ebenen senkrecht steht, so steht sie auch auf der andern Ebene seukrecht.

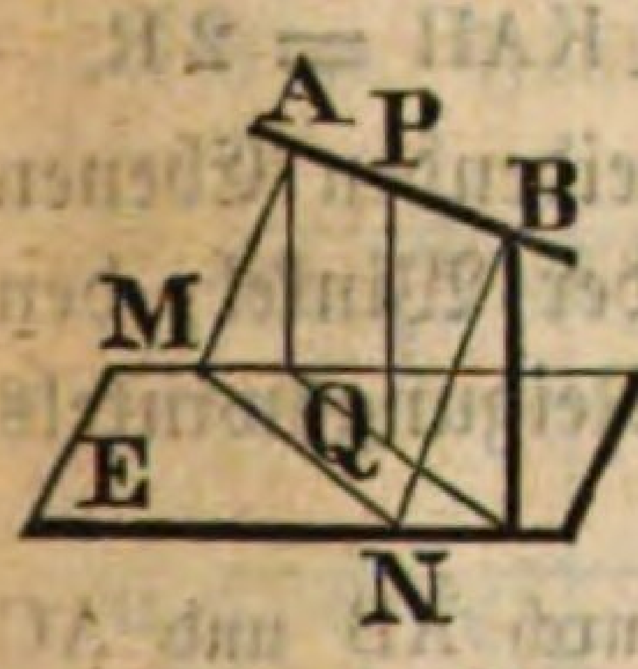
Bew. Die Linie steht dann auf zwei Linien in der andern Ebene senkrecht, nämlich auf der Durchschnittslinie beider Ebenen und auf der Linie, mit welcher sie den Neigungswinkel beider Ebenen bildet.

2) Stehen zwei Ebenen auf einander senkrecht, und man errichtet in einem Punkte der Durchschnittslinie eine Senkrechte auf die eine Ebene, so liegt sie in der anderen Ebene.

Bew. indirect aus Nr. 1.

3) Durch eine Linie AB, welche auf einer Ebene E nicht senkrecht steht, kann man immer eine auf E senkrechte Ebene legen, aber auch nur eine.

Bew. Von einem beliebigen Punkte P der Linie AB fälle man PQ $\perp$ E,



so steht die Ebene, welche durch AB und PQ geht, auf E senkrecht. Angenommen nun, man könnte durch AB noch eine zweite, E senkrecht schneidende Ebene ABNM legen: so müßte die in dieser Ebene von P auf NM gefällte Senkrechte auch auf E nach Nr. 1. senkrecht stehen, was nicht möglich ist, da man von P nur eine Senkrechte auf E fällen kann.

Anm. Hieraus folgt noch, daß die Perpendikel, welche von allen Punkten einer Linie AB im Raume auf eine Ebene E sich fällen lassen, in einer Ebene liegen; ihre Fußpunkte daher in einer geraden Linie.

4) Wenn zwei sich schneidende Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht stehen, so steht auch ihre Durchschnittslinie auf der dritten Ebene senkrecht.

Bew. Errichtet man in dem Punkte, in welchem die Durchschnittslinie die dritte Ebene schneidet, eine Senkrechte auf diese Ebene: so muß sie nach Nr. 2. in jeder der beiden sich schneidenden Ebenen liegen, also ihre Durchschnittslinie sein.

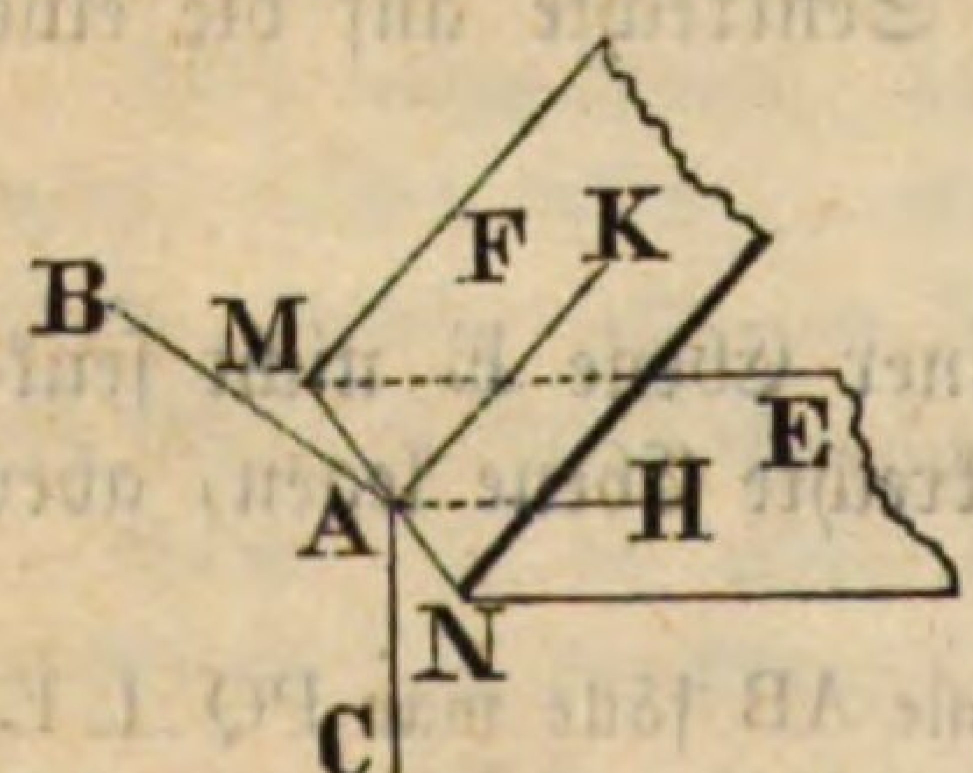
5) Wenn zwei parallele Ebenen F und G eine dritte Ebene E schneiden, und die eine F senkrecht auf E steht: so steht auch die andere G ⊥ E.

Bew. Nach Nr. 2. kann man in F eine Linie erzeugen, welche auf E senkrecht steht, und weil G mit dieser Linie parallel ist, so steht auch nach §. 265. G ⊥ E.

§. 267.

Lehrsätze.

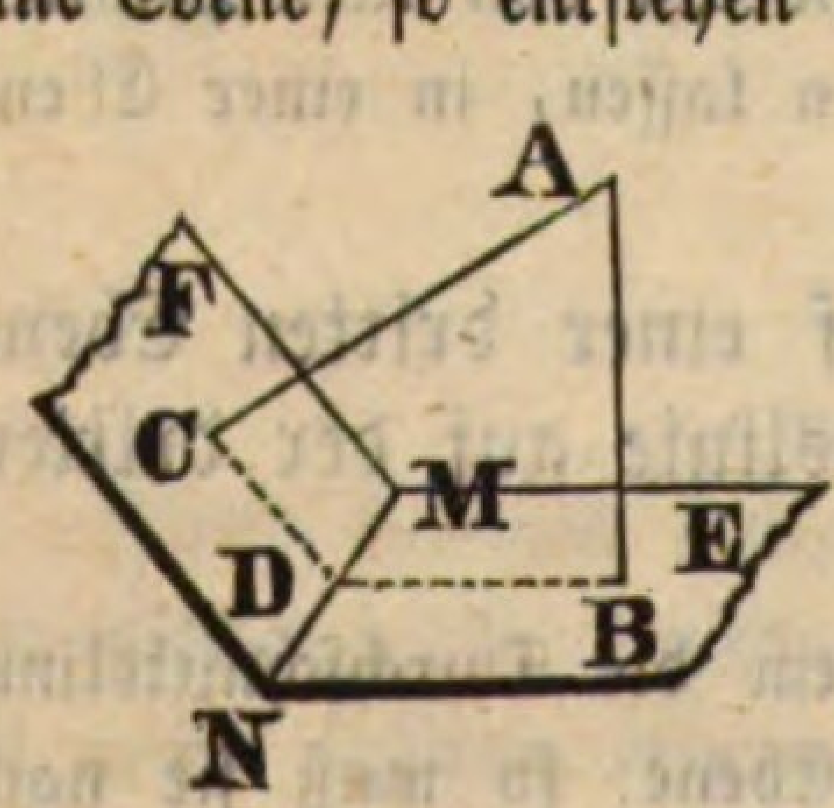
1) Wenn zwei Ebenen E und F in einer Durchschnittslinie NM zusammentreffen, und man errichtet in einem Punkte dieser Durchschnittslinie auf jede Ebene ein Loth: so ist der Winkel, den beide Lothe mit einander bilden, entweder das Supplement des Neigungswinkels beider Ebenen, oder diesem Neigungswinkel gleich. — Um genauer zu bestimmen, welcher Fall Statt findet, muß man bei jeder Ebene die Seite, auf welcher der Neigungswinkel liegt, von der entgegengesetzten Seite unterscheiden. Liegen nun beide Lothe auf den dem Neigungswinkel entgegengesetzten Seiten der Ebenen, so ist der Winkel das Supplement des Neigungswinkels; dasselbe gilt dann von seinem Scheitelwinkel; seine Nebenwinkel aber sind dem Neigungswinkel gleich.



Bew. Es sei AB ⊥ F und AC ⊥ E, so wird behauptet, daß ∡ BAC das Supplement des Neigungswinkels der Ebenen E und F ist. Errichtet man in F die Linie AK ⊥ NM und in E die Linie AH ⊥ NM, so ist ∡ KAH der Neigungswinkel beider Ebenen. Weil aber AB, AC, AK und AH in einer Ebene liegen (§. 253. II.) und die Winkel BAK und CAH rechte sind, so ist ∡ BAC + ∡ KAH = 2 R.

2) Fällt man von einem zwischen zwei sich schneidenden Ebenen liegenden Punkte A auf jede Ebene ein Loth, so ist der Winkel, den diese Lothe mit einander bilden, das Supplement des Neigungswinkels der beiden Ebenen.

Bew. Es sei AB ⊥ E und AC ⊥ F. Legt man durch AB und AC eine Ebene, so entstehen die Durchschnittslinien BD und CD, und im ⏢ ABDC ist ∡ BAC + ∡ BDC = 2 R. Man hat also nur noch zu beweisen, daß ∡ BDC der Neigungswinkel der Ebenen E und F ist. Die Ebene ABDC steht aber auf E und auf F senkrecht (§. 265.); also stehen umgekehrt E und F auf dieser Ebene senkrecht, daher auch NM (§. 266. Nr. 4.). Hieraus folgt, daß ∡ BDC der Neigungswinkel beider Ebenen E und F ist.



Anm. Der Satz 2. läßt sich auf den Satz 1. durch §. 259. zurückführen. Aus diesem §. erkennt man allgemein, daß jeder Winkel, dessen Schenkel auf

zwei sich schneidenden Ebenen senkrecht stehen, entweder dem Neigungswinkel der beiden Ebenen gleich, oder dessen Supplement ist. Die beiden oben angegebenen Fälle sind aber deshalb hervorgehoben worden, weil sie später besonders oft zur Anwendung kommen.

§. 268.

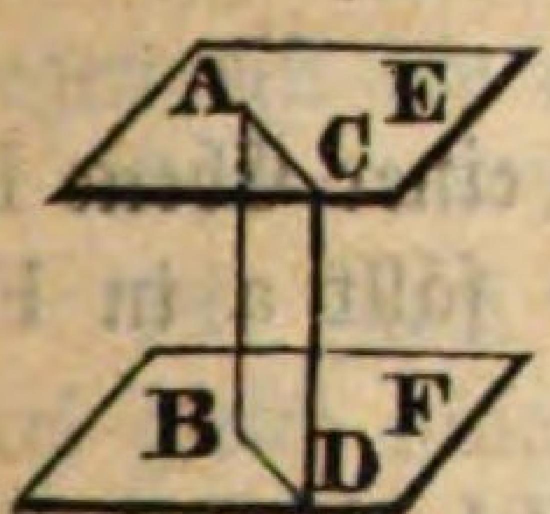
Lehrsätze.

1) Zwei Ebenen sind parallel, wenn eine Linie auf beiden senkrecht steht.

Bew. Die Linie mag die Ebenen resp. in A und B schneiden. Angenommen, die Ebenen wären nicht parallel, so könnte man einen Punkt C ihrer Durchschnittslinie mit A und B verbinden. Das Dreieck ABC müßte dann zwei rechte Winkel haben (bei A und B), was nicht möglich ist.

2) Schneidet eine Linie zwei parallele Ebenen, und steht sie auf der einen Ebene senkrecht, so steht sie auch auf der andern Ebene senkrecht.

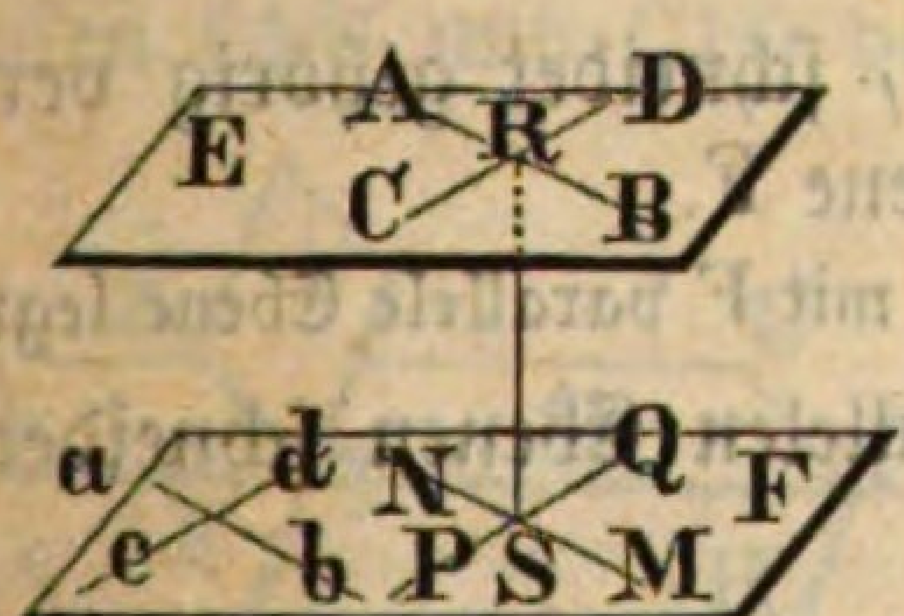
Bew. Es sei $E \parallel F$ und $AB \perp E$, so wird behauptet: $AB \perp F$. Legt man durch AB eine Ebene ABDC, so entstehen die parallelen Durchschnittslinien AC und BD, und weil aus der Voraussetzung folgt, daß $AB \perp AC$ ist: so muß auch $AB \perp BD$ sein. Legt man noch eine zweite Ebene durch AB, so kann man eben so beweisen, daß AB noch auf einer zweiten Linie in F senkrecht steht; daher ist $AB \perp F$.



3) Zwei Ebenen sind parallel, wenn zwei sich schneidende Linien in der einen Ebene parallel mit zwei sich schneidenden Linien in der andern Ebene sind.

Voraussf. $AB \parallel ab$, $CD \parallel cd$. Behaupt. $E \parallel F$.

Bew. Fällt man vom Durchschnittspunkte R der Linien AB und CD eine Senkrechte RS auf F, und zieht man in der Ebene F durch S die Linien $NM \parallel ab$ und $PQ \parallel cd$: so ist auch $AB \parallel NM$ und $CD \parallel PQ$. Aus der Voraussetzung folgt aber, daß RS auf AB und CD senkrecht steht; folglich steht RS auch auf NM und PQ, daher auf F senkrecht. Aus Nr. 1. folgt jetzt: $E \parallel F$.



§. 269.

Gesetze. Folgerungen.

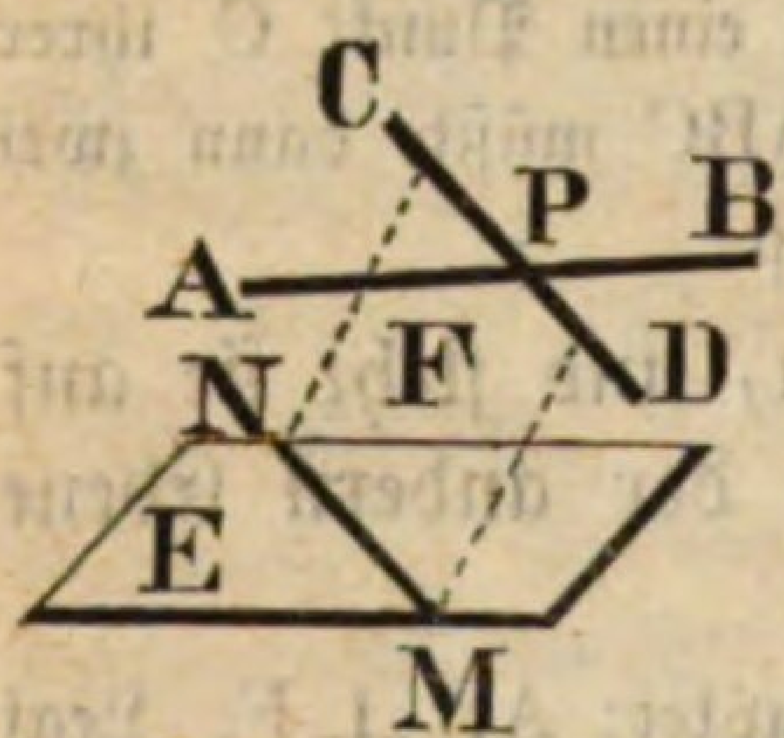
1) Durch einen Punkt P im Raume kann man mit einer Ebene E nur eine parallele Ebene legen.

Bew. Die Annahme, es wären durch P zwei mit E parallele Ebenen F und G möglich, führt zu einem Widerspruch. Legt man nämlich durch P eine die Ebene E schneidende Ebene H, so müßte H drei Durchschnittslinien erzeugen:

nämlich mit den Ebenen E, F und G resp. die Durchschnittslinien e, f und g. Nach §. 249. II. ist dann e ⧺ f und e ⧺ g, woraus f ⧺ g folgt; und dies ist nicht möglich, weil sich f und g in P schneiden.

2) Ist eine Ebene E mit zwei sich schneidenden Linien parallel, so ist sie mit der Ebene parallel, in der diese Linien liegen.

Bew. Legt man durch jede der beiden Linien eine die Ebene E schneidende Ebene, so werden nach §. 257. Nr. 2. in E zwei sich schneidende Linien erzeugt, welche jenen Linien parallel sind. Die Richtigkeit des Satzes folgt daher aus §. 268. Nr. 3.



3) Durch eine Linie AB, welche mit einer Ebene E parallel ist, kann man immer eine mit E parallele Ebene legen, aber auch nur eine.

Bew. Man schneide AB in einem beliebigen Punkte P durch eine Ebene F, welche auch E in NM schneidet, und ziehe nun in F durch P eine Parallele CD mit NM. Die Ebene, welche durch AB und CD gelegt werden kann, ist nach Nr. 2. mit E parallel. Daß man nur eine mit E parallele Ebene durch AB legen kann, folgt aus Nr. 1.

4) Legt man durch einen Punkt P im Raume mit einer Ebene E eine parallele Linie a und eine parallele Ebene F, so fällt a in F.

Bew. indirect aus Nr. 3. und 1.

5) Sind zwei Ebenen derselben dritten Ebene parallel, so sind sie mit einander parallel.

Bew. indirect aus Nr. 1.

6) Eine Ebene, welche eine von zwei parallelen Ebenen schneidet, schneidet gehörig verbreitet auch die andere.

Bew. indirect aus Nr. 5.

7) Eine Ebene, welche eine Linie schneidet, schneidet gehörig verbreitet auch jede mit dieser Linie parallele Ebene F.

Bew. aus Nr. 6., wenn man durch die Linie eine mit F parallele Ebene legt.

8) Eine Linie, welche eine von zwei parallelen Ebenen schneidet, schneidet gehörig verlängert auch die andere.

Bew. indirect aus Nr. 4.

9) Ist eine Linie mit einer von zwei parallelen Ebenen parallel, so ist sie auch mit der andern parallel.

Bew. indirect aus Nr. 8.

10) Ist eine Linie a mit zwei sich schneidenden Ebenen E und F parallel, so ist sie auch mit der Durchschnittslinie b dieser Ebenen parallel.

Bew. Legt man eine Ebene G durch a und einen Punkt P der Linie b, so schneidet nach §. 257. Nr. 2. G die Ebenen E und F in Durchschnittslinien,

welche parallel a sind. Weil aber beide Durchschnittslinien durch P gehen, so müssen sie nach §. 246. in eine Linie zusammenfallen, und weil nur eine Linie beiden Ebenen E und F angehören kann, so muß diese Linie die Durchschnittslinie b der Ebenen E und F sein.

11) Eine Linie schneidet parallele Ebenen unter gleichen Neigungswinkeln. — Der umgekehrte Satz ist nicht allgemein richtig.

Bew. Fällt man von einem Punkte der Linie auf die eine Ebene ein Loth, so steht es verlängert auch auf der andern Ebene senkrecht. Die Neigungswinkel werden als Wechsel- oder Gegenwinkel einander gleich, je nachdem der Punkt zwischen den Ebenen oder außerhalb derselben gewählt wird.

12) Parallele Linien zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich. Stehen die Linien auf beiden Ebenen senkrecht, so heißt jede die Entfernung der Ebenen von einander; daher sind parallele Ebenen überall gleich weit von einander entfernt.

Bew. Legt man durch zwei solche Linien eine Ebene, so entsteht ein Parallelogramm, resp. Rechteck.

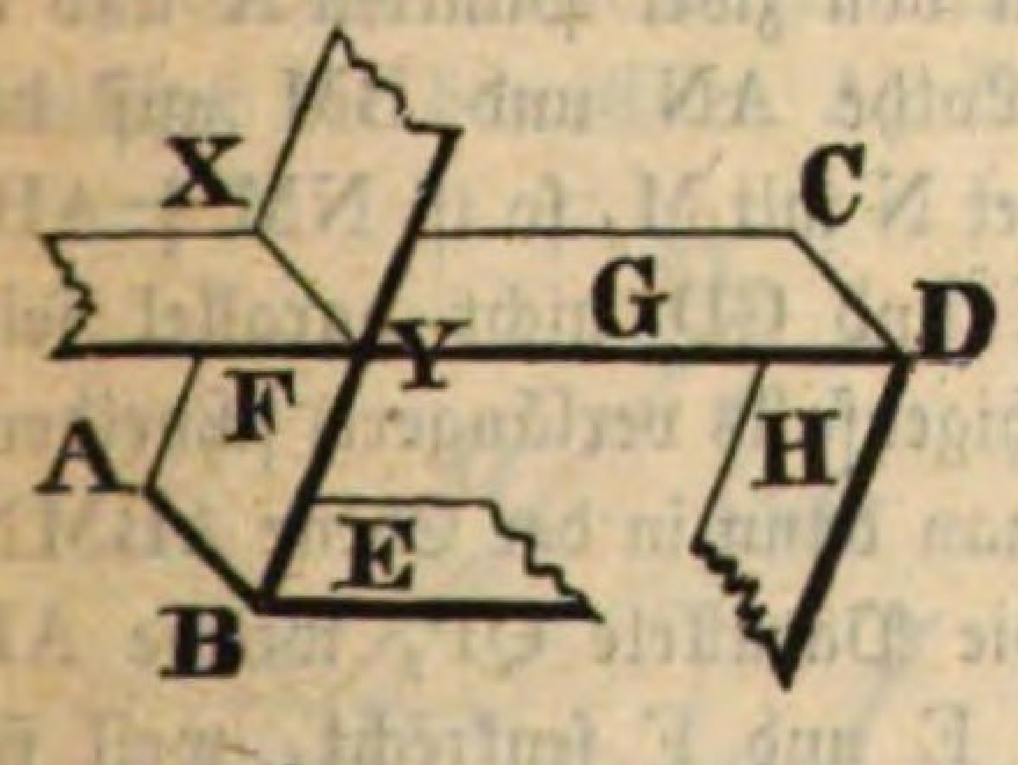
13) Unter allen Linien, deren Endpunkte in zwei parallelen Ebenen liegen, ist die auf beiden Ebenen senkrechte die kürzeste.

Bew. aus Nr. 12. und §. 254. Nr. 2.

14) Zwei Ebenen E und F sind parallel, wenn zwischen ihnen drei gleich lange parallele Linien liegen; nur dürfen diese Linien nicht in einer Ebene liegen, und sie müssen sich auf derselben Seite der einen (also auch der andern) Ebene befinden.

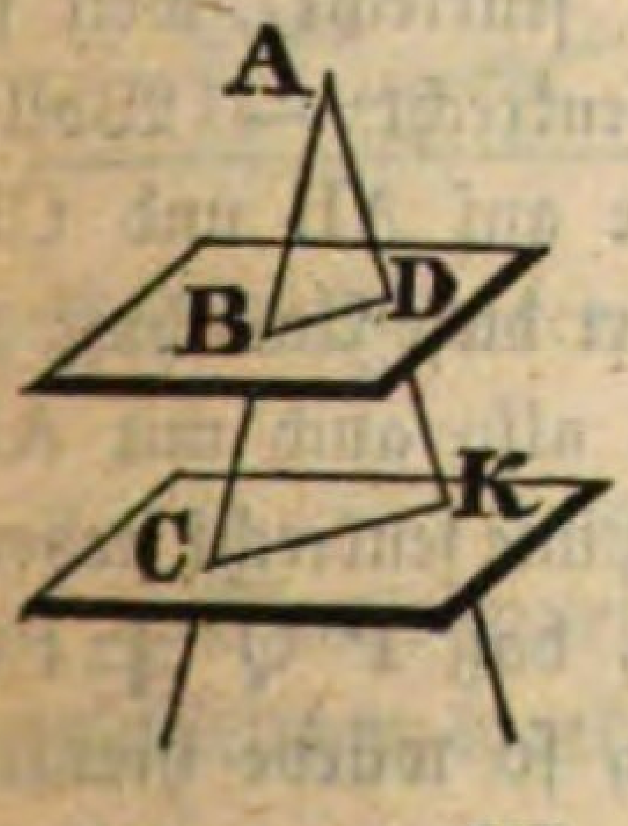
Bew. Sind a, b, c die drei Linien, und legt man durch a und b eine Ebene, eine zweite aber durch a und c: so sind E und F nach §. 268. Nr. 3. parallel.

15) Sind zwei sich schneidende Ebenen E und F zweien andern sich schneidenden Ebenen G und H parallel, so sind die Durchschnittslinien (AB und CD) parallel.



Bew. Ist E $\parallel$ G und F $\parallel$ H, so können F und G nicht parallel sein; man kann sie also verlängern, bis sie sich in XY schneiden. Es ist dann XY $\parallel$ AB und XY $\parallel$ CD, woraus AB $\parallel$ CD folgt.

Anm. Verlängert man auch E und H, bis sie sich schneiden, so entsteht ein vierseitiger prismatischer Raum (§. 251.).

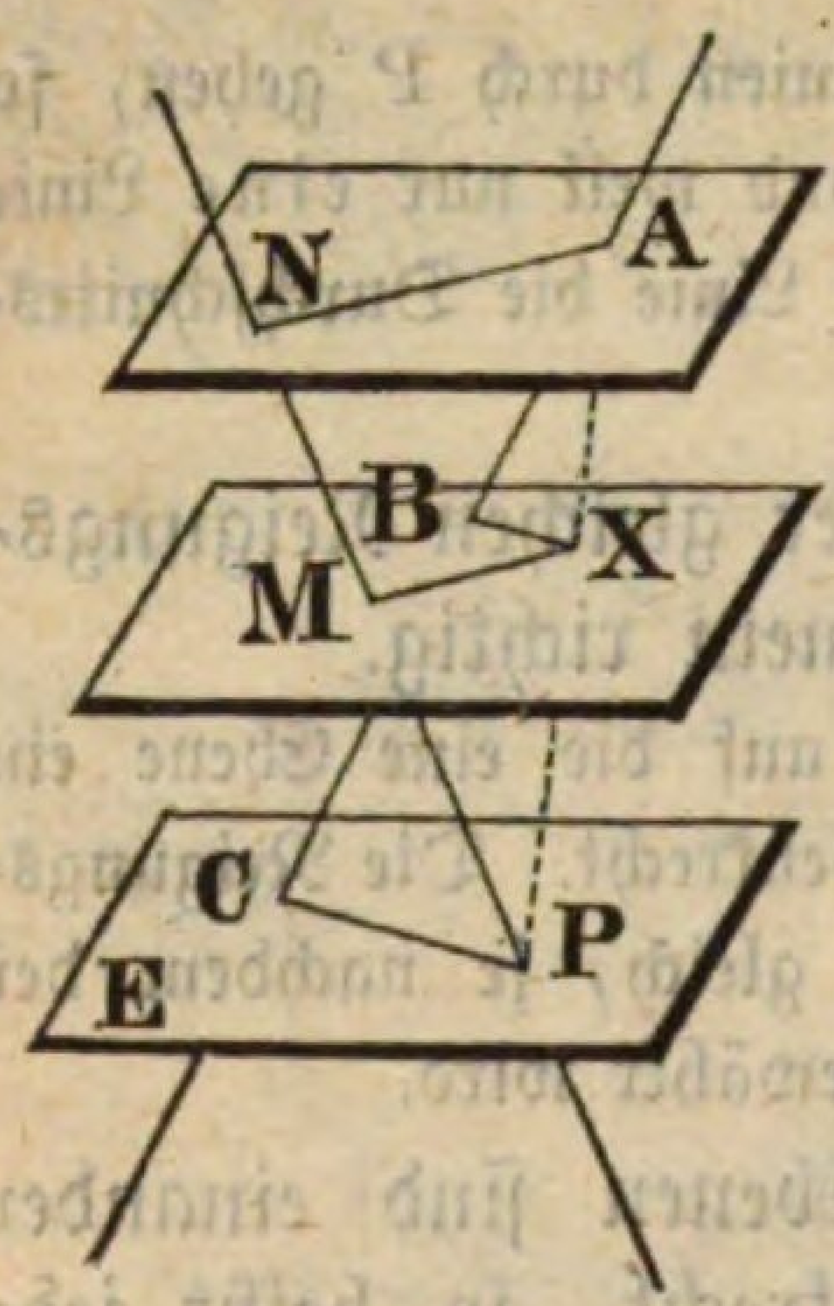


§. 270.

Lehrsätze.

1) Parallele Ebenen schneiden von den Schenkeln eines Winkels proportionale Stücke ab.

Bew. Legt man durch AC und AK eine Ebene, so entstehen die parallelen Durchschnittslinien BD und CK daher verhält sich AB : BC = AD : DK.



2) Drei und mehr parallele Ebenen schneiden von sie durchschneidenden Linien proportionale Stücke ab.

Bew. ABC und NMP mögen die Linien sein; man verbinde A mit P; die Linie AP schneide die mittlere Ebene in X. Legt man durch AC und AP eine Ebene, und eine zweite durch PN und PA, so folgt aus parallelen Durchschnittslinien (BX ⫲ CP und MX ⫲ NA), oder auch unmittelbar aus Nr. 1.: AB : BC = AX : XP und AX : XP = NM : MP; folglich: AB : BC = NM : MP.

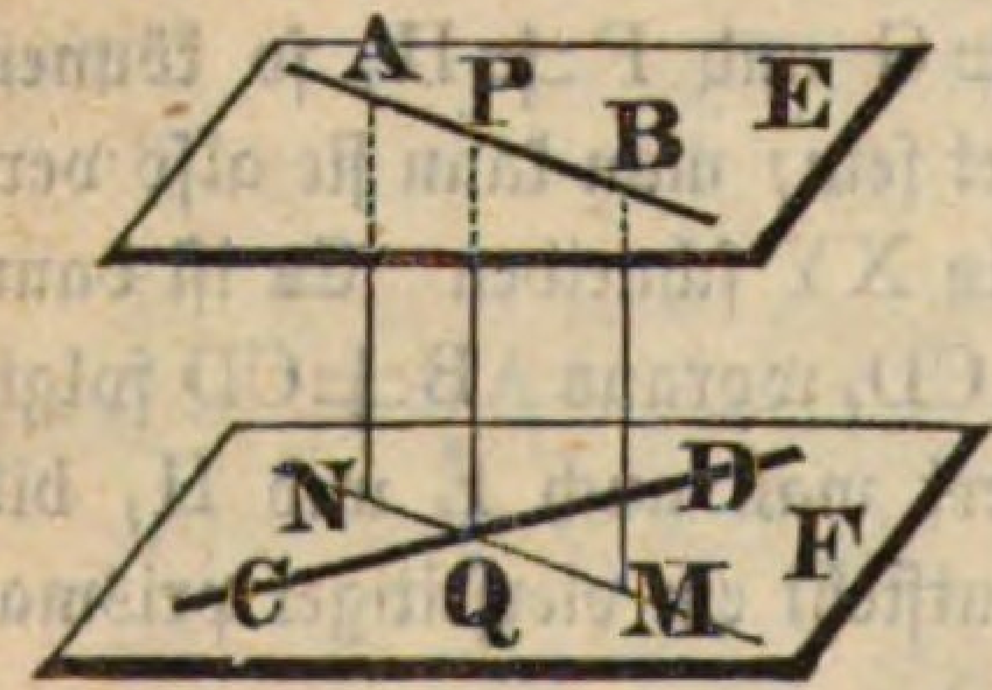
§. 271.
Windschiefe Linien und Flächen.

1) Durch zwei windschiefe Linien kann man immer ein Paar paralleler Ebenen legen, aber auch nur ein Paar.

Bew. Sind a und b die windschiefen Linien, so kann man durch einen Punkt der Linie a eine Parallele β mit b, und durch einen Punkt der Linie b eine Parallele α mit a legen. Die Ebene durch a und β ist dann der Ebene durch b und α parallel (§. 268. Nr. 3.). Daß man nur ein Paar paralleler Ebenen durch a und b legen kann, folgt indirect aus §. 269. Nr. 15.

2) Es giebt immer eine Linie, und nur eine, welche auf zwei windschiefen Linien senkrecht steht. Diese Linie steht auch auf den beiden parallelen Ebenen senkrecht, welche man (nach Nr. 1.) durch die windschiefen Linien legen kann, und ist unter allen Linien, welche Punkte der windschiefen Linien mit einander verbinden, die kürzeste.

Bew. Zwei windschiefe Linien AB und CD können wir uns nach Nr. 1. immer in einem Paare paralleler Ebenen denken; E und F mögen diese Ebenen sein. Fällt man nun von zwei Punkten A und B der Linie AB die Lothe AN und BM auf die Ebene F und verbindet N mit M, so ist NM ⫲ AB; folglich können NM und CD nicht parallel sein und müssen sich (nöthigenfalls verlängert) schneiden, etwa in Q. Zieht man dann in der Ebene ABMN durch Q mit NA die Parallele QP, welche AB in P treffen mag, so steht QP auf den Ebenen E und F senkrecht, weil sie parallel NA ist; folglich steht QP auch auf AB und CD senkrecht. — Wollte man nun annehmen, es gäbe noch eine zweite Linie, welche auf AB und CD senkrecht steht und etwa AB in P′ und CD in Q′ trifft, so führt diese Annahme zu einem Widerspruch. Denn legt man durch Q′ eine mit NM, also auch mit AB parallele Linie, so müßte P′Q′ nach der Annahme auch auf dieser Linie senkrecht stehen, folglich auch auf der Ebene F. Hieraus würde aber folgen, daß P′Q′ ⫲ PQ ist, und weil zwei parallele Linien immer in einer Ebene liegen, so würde hieraus



weiter folgen, daß auch P'P und Q'Q, d. h. AB und CD, in einer Ebene liegen, was nicht möglich ist, da diese Linien windschiefe sind. — Daß jede andere Verbindungslinie zweier Punkte der Linien AB und CD größer als PQ ist, folgt aus §. 269. Nr. 13.

3) Die Fläche, welche eine unbegrenzte Linie c beschreibt, welche zwei Punkte A und B zweier windschiefen Linien a und b mit einander verbindet und stetig so fortbewegt wird, daß sie in jeder Lage durch Punkte beider windschiefen Linien geht, heißt eine **windschiefe Fläche**. Die erzeugende Linie c durchläuft bei der Bewegung auch stetig auf einander folgende Punkte der windschiefen Linien a und b.

Es folgt aus dieser Erklärung, daß durch dieselben zwei windschiefen Linien sehr verschiedene windschiefe Flächen gelegt werden können; denn c kann nach ganz verschiedenen Gesetzen sich bewegen, und doch die oben angegebene Bedingung erfüllen.

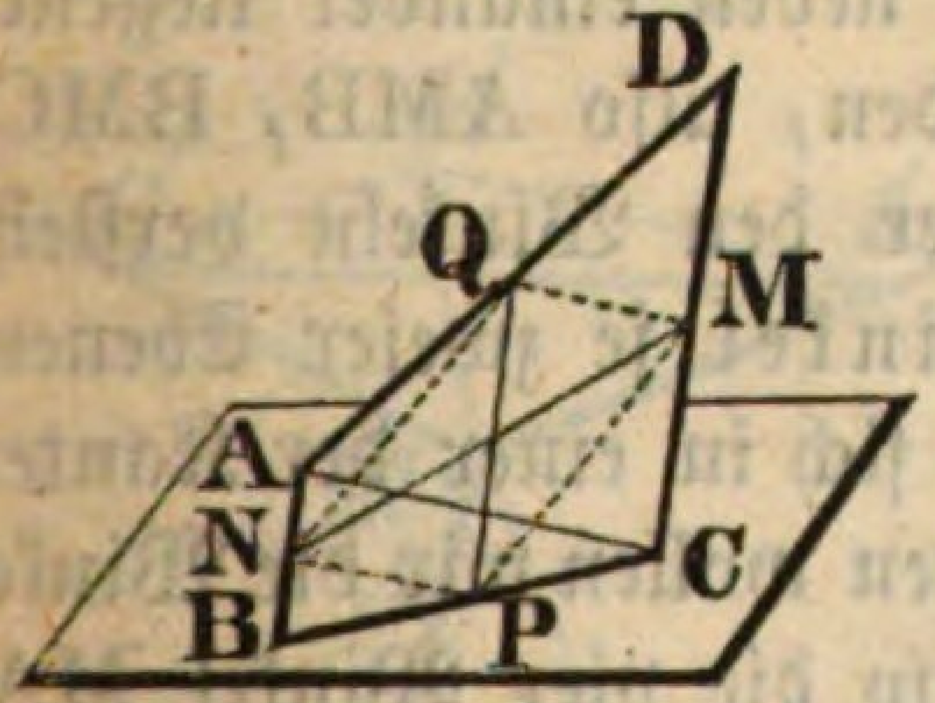
Ein Beispiel mag dies erläutern. Die Figur zu §. 270. Nr. 2. zeigt die windschiefen Linien PN und CA, welche die Ebene E in P und C schneiden; die erzeugende Linie (c) sei PC. Man kann sich nun PC so bewegt denken, daß diese Linie immer durch Punkte der Linien PN und CA geht, zugleich aber

1) in jeder Lage mit der Ebene E parallel ist, oder
2) in jeder Lage von den windschiefen Linien gleiche Stücke (von P und C aus gerechnet) abschneidet.

Im ersten Falle würde PC auch einmal die Lage MB, später die Lage NA annehmen. — Nur wenn PN und CA mit E gleiche Neigungswinkel bilden, fallen die beiden windschiefen Flächen in eine zusammen (leicht zu beweisen). — Die begrenzte windschiefe Fläche PCAN heißt ein **windschiefes Viereck**.

4) In jedem **windschiefen Viereck** (dessen Seiten also nicht in einer Ebene liegen) halbiren sich die Verbindungslinien der Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten.

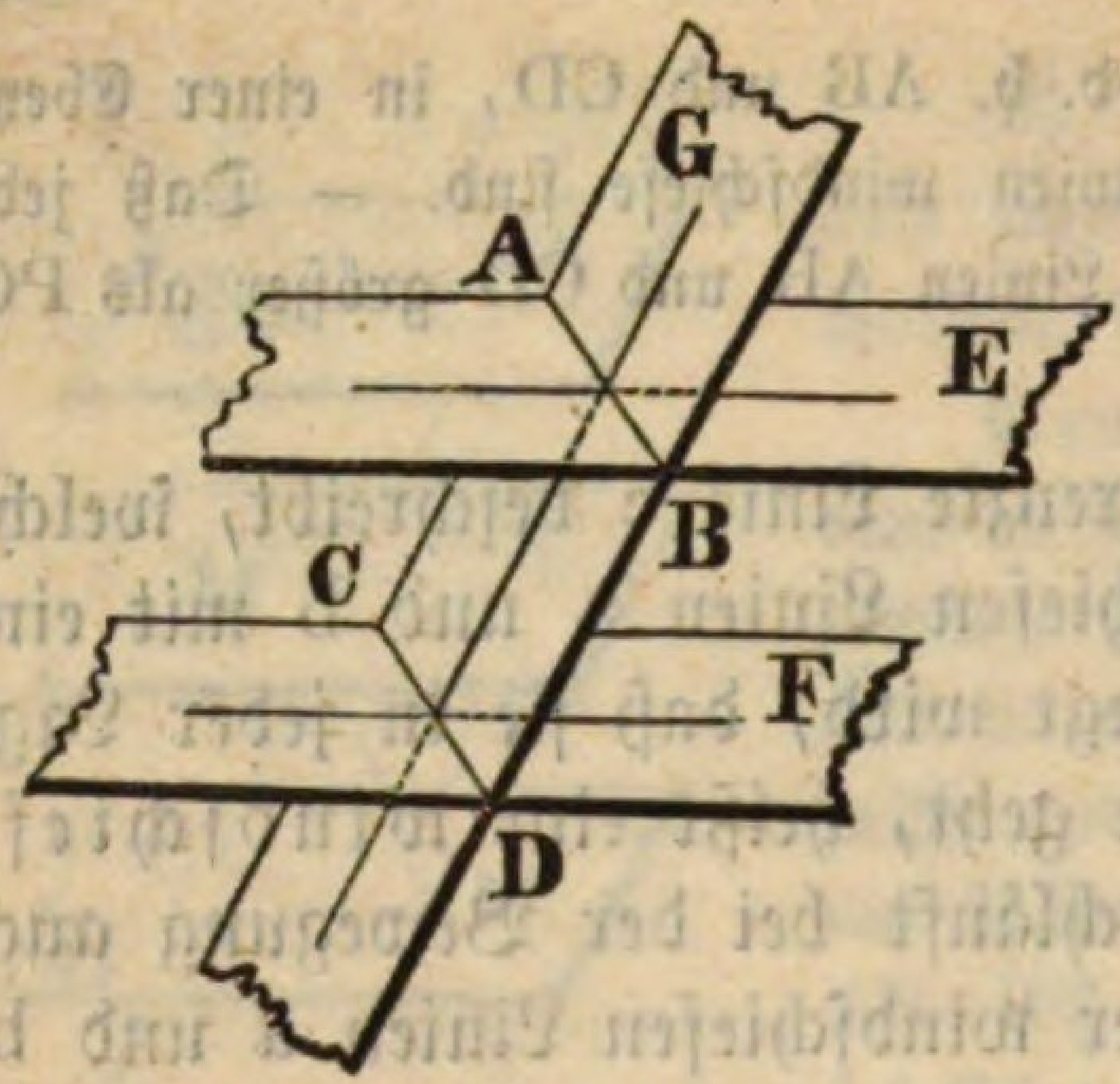
Bew. ABCD sei das windschiefe Viereck. Die Figur zeigt die Ebene, in welcher die drei Ecken A, B, C liegen; die vierte Ecke D liegt oberhalb dieser Ebene.



Sind N, P, M und Q die Mittelpunkte der Seiten, so soll bewiesen werden, daß NM und PQ sich halbiren. Zieht man NP, PM, MQ, QN und die Diagonale AC, so sind NP und QM mit AC parallel und der Hälfte von AC gleich. Hieraus folgt, daß NP und QM parallel und einander gleich sind (also auch in einer Ebene liegen). Es ist sonach NPMQ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen NM und PQ sich schneiden, aber auch sich halbiren müssen.

§. 272.

Wenn zwei parallele Ebenen E und F durch eine dritte Ebene G geschnitten werden, so entstehen an jeder der beiden parallelen Durch-



schnittslinien AB und CD vier (concave) Flächenwinkel. Ganz analog den entsprechenden Erklärungen in der ebenen Geometrie hat man unter diesen acht Flächenwinkeln zwei Paar innerer und zwei Paar äußerer Flächenwinkel, vier Paar Gegen-Flächenwinkel und vier Paar Wechsel-Flächenwinkel. Die Summe zweier inneren oder äußeren Flächenwinkel ist zwei rechten Flächenwinkeln gleich, Gegen- und Wechsel-Flächenwinkel aber sind einander gleich.

Die Beweise sind durch die Neigungswinkel zu führen, und diese erhält man, wenn man die drei Ebenen durch eine vierte Ebene schneidet, welche auf den parallelen Durchschnittslinien AB und CD senkrecht steht. Diese vierte Ebene ist in der Figur durch ihre Durchschnittslinien mit den Ebenen E, F und G markirt. — Die umgekehrten Sätze (z. B. sind die Gegen-Flächenwinkel gleich, so sind die Ebenen E und F parallel) sind nur dann wahr, wenn die Durchschnittslinien AB und CD parallel sind.

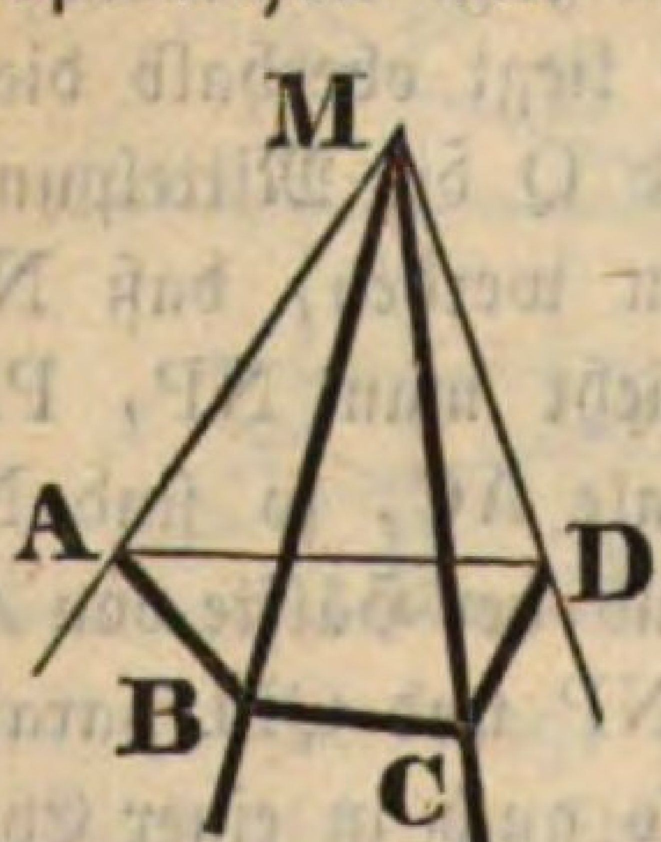
Zweites Kapitel.

Von den körperlichen Ecken.

§. 273.

Erklärung.

Bei jeder körperlichen Ecke (§. 251.), z. B. bei der vierkantigen körperlichen Ecke MABCD, unterscheidet man Seiten und Winkel.



Unter den Seiten versteht man die Linien-Winkel, welche je zwei neben einander liegende Kanten mit einander bilden, also AMB, BMC, CMD und DMA; unter den Winkeln versteht man die Neigungs-Winkel je zweier Ebenen, welche die Ecke bilden und sich in einer der Kanten schneiden. Nach den Kanten wollen wir die Winkel bezeichnen; wir haben also die vier Winkel MA, MB, MC und MD, und $\measuredangle$ MA bezeichnet also den Neigungswinkel der Ebenen AMB und AMD.

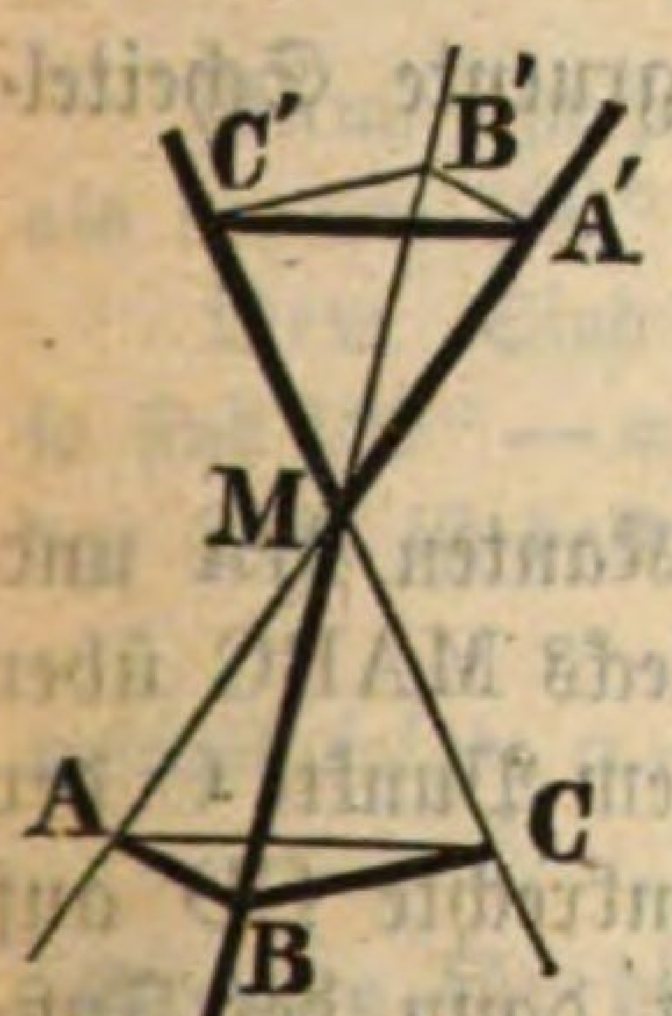
Jede eine körperliche Ecke darstellende Figur stellt eigentlich zwei Ecken vor; denn sie theilt den Raum in zwei Theile, und jeder ist eine körperliche Ecke. Beide Ecken haben dieselben Seiten, ihre Winkel

aber ergänzen sich zu 360°, d. h. zu jedem concaven Winkel der einen Ecke gehört ein convexer der anderen. Jetzt und in der Folge sollen immer nur körperliche Ecken betrachtet werden, welche nicht nur die Eigenschaft haben, daß alle Kanten, ohne über die Spitze verlängert zu sein, sich durch eine Ebene schneiden lassen, sondern bei welchen auch die durch eine solche Ebene erzeugte Durchschnittsfigur (ABCD) nur ausspringende Ecken, also nur concave Winkel hat. Von den zwei körperlichen Ecken, welche eine diesen Bedingungen entsprechende Figur vorstellt, soll dann immer nur die Ecke gemeint sein, in deren Raum jene Durchschnittsfigur liegt. — Bei jeder Ecke dieser Art sind alle Seiten und alle Winkel concav. Die nachfolgenden Sätze werden nur für solche Ecken behauptet.

§. 274.

Die Scheitelecke.

Verlängert man alle Kanten einer körperlichen Ecke, z. B. der dreikantigen MABC, über die Spitze, so sind die Verlängerungen wieder Kanten einer körperlichen Ecke, und jede dieser Ecken heißt die

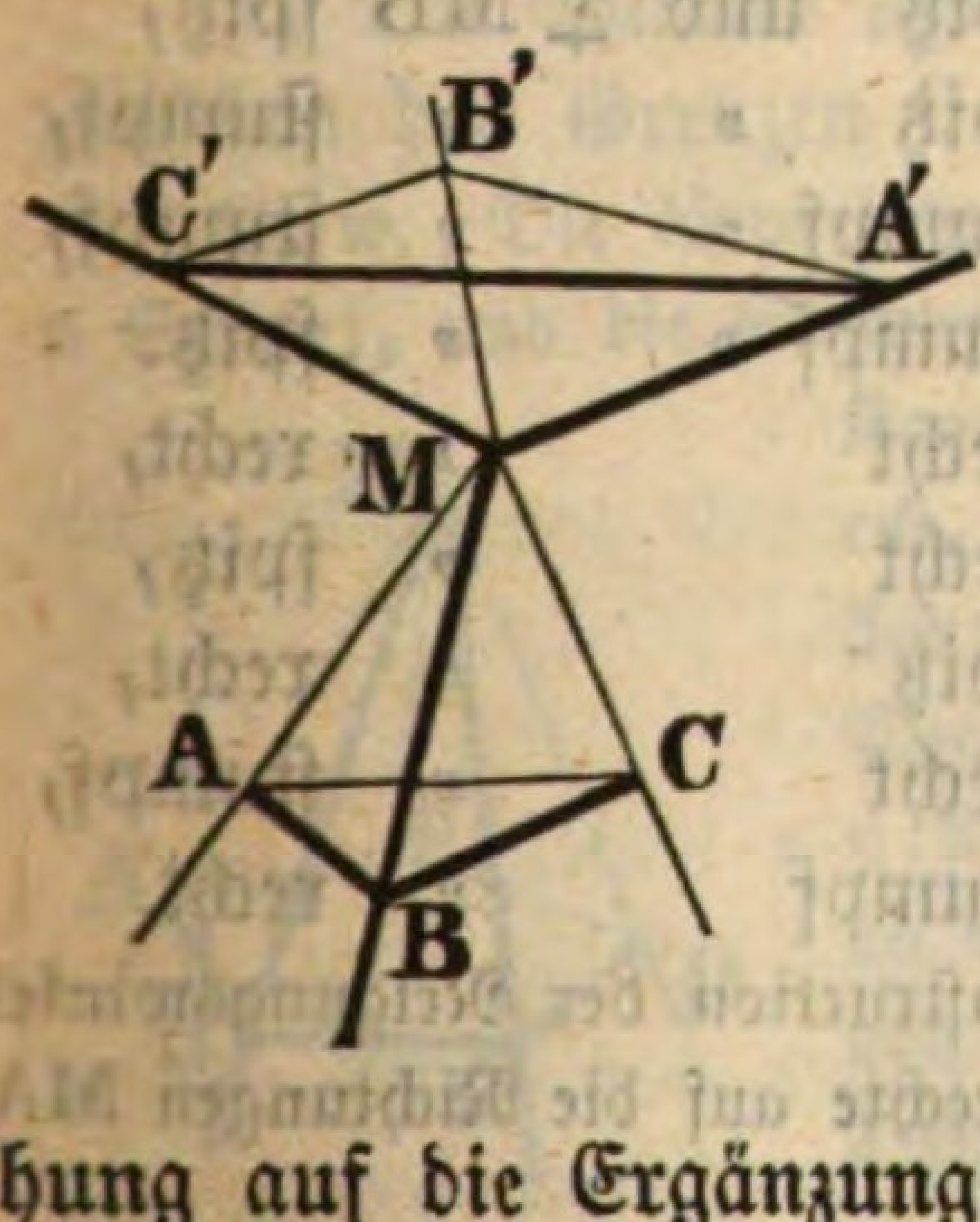


Scheitelecke der andern. Es ist also MA′B′C′ die Scheitelecke (körperl. Scheitel-Dreieck) von MABC, und umgekehrt.

Zwei Scheitelecken haben rings herum in derselben Ordnung gleiche Seiten und gleiche Winkel (Scheitelwinkel); sie sind aber nicht congruent, denn die gleichen Stücke folgen nicht in beiden Ecken nach gleicher Richtung hin auf einander, so daß sich die Ecken nicht zum Decken bringen lassen. Man nennt solche Ecken symmetrisch gleiche.

§. 275.

Die Ergänzungsecke.



Errichtet man in der Spitze einer körperlichen Ecke, z. B. der dreikantigen MABC, auf jede Seite nach außen hin eine Senkrechte, so nennt man die körperliche Ecke, deren Kanten diese Senkrechten sind, die Ergänzungsecke der ursprünglichen Ecke.

Ist also MC′ ⊥ AMB, MB′ ⊥ AMC und MA′ ⊥ BMC: so ist MA′B′C′ die Ergänzungsecke der Ecke MABC. In Beziehung auf die Ergänzungsecke merke man folgende Eigenschaften:

1) Jede körperliche Ecke ist selbst die Ergänzungsecke ihrer Ergänzungsecke.

2) Jeder Winkel einer körperlichen Ecke ergänzt eine Seite ihrer Ergänzungsecke, und jede Seite einer körperlichen Ecke ergänzt einen Winkel ihrer Ergänzungsecke zu 180° (daher der Namen).

Bew. Der erste Satz behauptet, daß MA, MB und MC auch auf den Seiten der Ecke MA'B'C' senkrecht stehen. Nach der Construction sind aber MB' und MC' senkrecht auf MA, weil sie auf den Ebenen senkrecht stehen, in welchen MA liegt. Umgekehrt steht also MA auf MB' und auf MC' senkrecht, also auch auf der Ebene B'MC'. Ganz eben so beweist man, daß MB ⊥ A'MC' und MC ⊥ A'MB' steht.

Der zweite Satz folgt, zum Theil mit Hülfe des Satzes 1., aus §. 267. Nr. 1.

Anm. Für spätere Anwendungen ist besonders hervorzuheben: Sind a und b zwei Seiten und α und β die gegenüberliegenden Winkel eines körperlichen Dreiecks, so sind $2R-\alpha$ und $2R-\beta$ zwei Seiten und resp. $2R-a$ und $2R-b$ die ihnen gegenüberliegenden Winkel des Ergänzungs-Dreiecks.

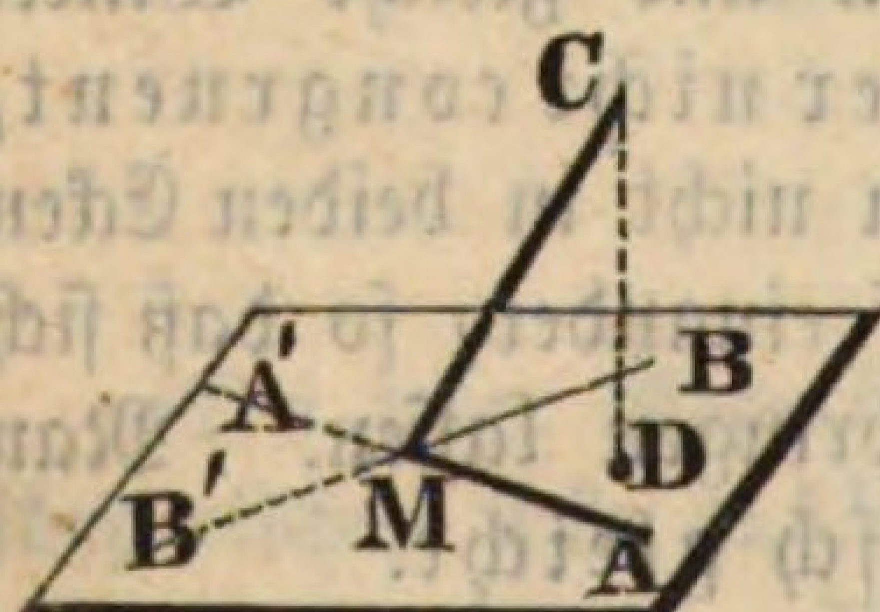
§. 276.

Lehrsatz.

Zu congruenten körperlichen Ecken gehören congruente Scheitelecken und congruente Ergänzungsecken.

Bew. durch Aufeinanderlegen (§. 254. Nr. 1.).

§. 277.



Verlängert man zwei Kanten MA und MB eines körperlichen Dreiecks MABC über die Spitze M, fällt von einem Punkte C der dritten Kante MC eine Senkrechte CD auf die Ebene AMB, und liegt dann der Fußpunkt D

zwischen	MA	und	MB:	so ist ∡MA	spitz	und ∡MB	spitz,
»	MB	»	MA'	» » »	spitz	» »	stumpf,
»	MA'	»	MB'	» » »	stumpf	» »	stumpf,
»	MB'	»	MA	» » »	stumpf	» »	spitz.
Fällt	D	in	M	» » »	recht	»	recht,
»		»	MA	» » »	recht	»	spitz,
»		»	MB	» » »	spitz	»	recht,
»		»	MA'	» » »	recht	»	stumpf,
»		»	MB'	» » »	stumpf	»	recht.

Die Beweise sind für alle Fälle durch Construction der Neigungswinkel MA und MB zu führen. Man fällt von D Senkrechte auf die Richtungen MA und MB und verbindet deren Fußpunkte mit C.

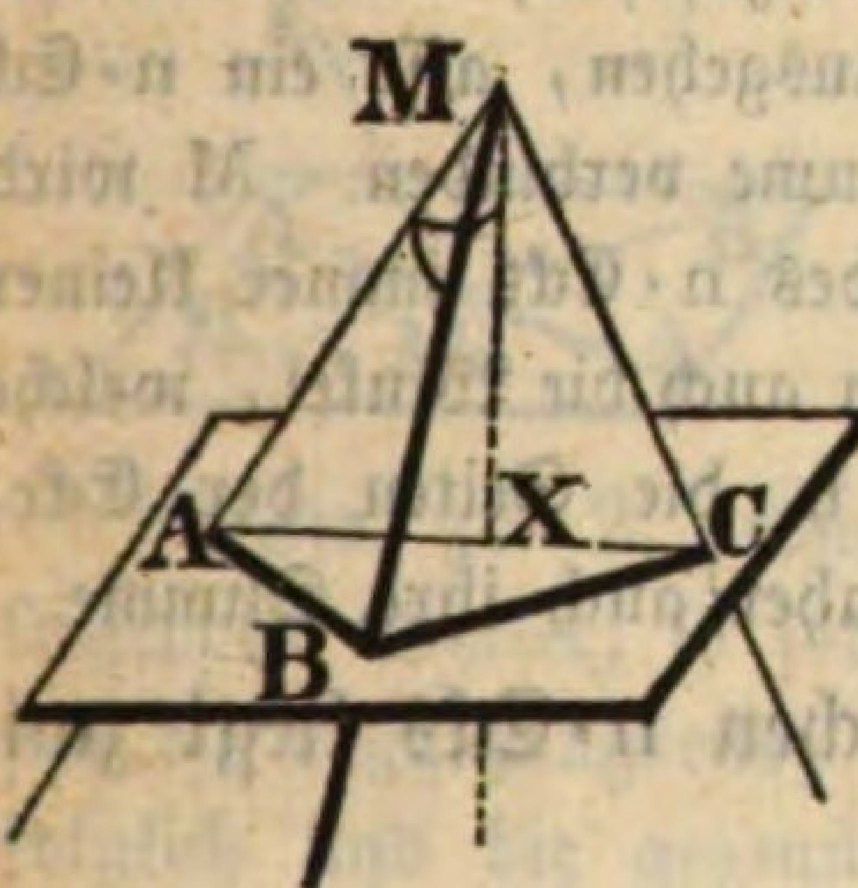
Auch die umgekehrten Sätze sind richtig und ergeben sich aus den vorstehenden leicht indirect. Ist z. B. ∡ MA stumpf und ∡ MB spitz, so fällt D zwischen MA und MB′.

§. 278.

Lehrsatz.

In jedem körperlichen Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.

Bew. Man hat nur zu zeigen, daß die größte Seite kleiner als die Summe der beiden andern ist. Es sei AMC die größte Seite, so heißt die Behauptung: AMB + BMC > AMC. Man mache einen Theil der Seite AMC gleich AMB, etwa AMX = AMB, und dann noch MX = MB. Man lege ferner durch X und B eine Ebene, welche die Kanten MA und MC resp. in A und C schneidet, so ist △ AMB ≌ △ AMX, woraus AB = AX folgt. Weil aber AB + BC > AC ist, so muß BC > XC sein. Die beiden Dreiecke CMB und CMX haben nun zwei Paar gleicher Seiten; die dritten Seiten sind ungleich, nämlich BC > XC. Hieraus folgt ∡ BMC > ∡ XMC, und weil ∡ AMB = ∡ AMX war, so folgt:



Seite AMB + Seite BMC > Seite AMC.

Anm. In jedem körperlichen Dreieck ist die Summe zweier Winkel kleiner als der um 180° vermehrte dritte Winkel.

Bew. Sind α, β, γ die Winkel, und man denkt sich die Ergänzungsecke, so sind $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$ deren Seiten. Nach dem vorstehenden Satze ist daher

$$180° - \alpha + 180° - \beta > 180° - \gamma,$$

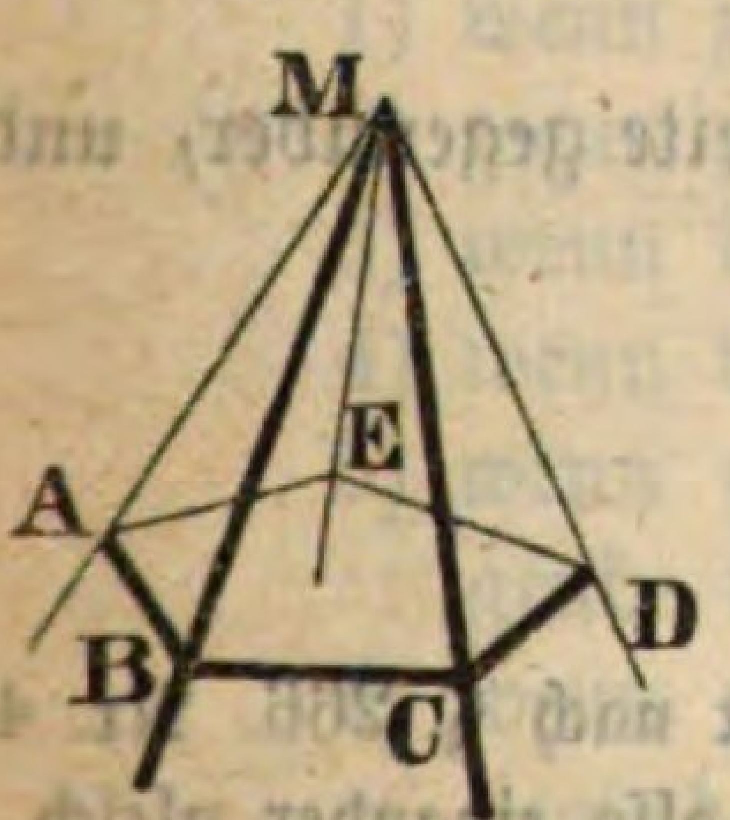
woraus folgt: $\alpha + \beta < 180° + \gamma$.

§. 279.

Grenzen für die Summe aller Seiten und die Summe aller Winkel einer n-kantigen körperlichen Ecke.

1) Die Summe aller Seiten eines körperlichen n-Ecks liegt immer zwischen den Grenzen 0 und 4R.

Bew. Die körperliche Ecke, deren Spitze M ist, habe n Kanten (also auch n Seiten), und die Summe aller Seiten sei gleich S. Durchschneidet man alle Kanten durch eine Ebene ABCD..., so entstehen n Dreiecke, von denen jedes durch eine Seite der Durchschnittsfigur und zwei Kanten begrenzt wird. Die Summe aller Winkel in diesen Dreiecken ist gleich n . 2 R; folglich ist n . 2 R — S die Summe aller Winkel dieser Dreiecke, welche an der Durchschnittsfigur ABCD ... liegen. Jede Ecke von ABCD ... ist aber zugleich Spitze eines körperlichen Dreiecks und nach §. 278. ist daher jeder Winkel der



Durchschnittsfigur als Seite einer körperlichen Ecke kleiner als die Summe der beiden andern Seiten, z. B. $ABC < MBA + MBC$. Hieraus folgt, daß alle Winkel der Durchschnittsfigur zusammen kleiner sind, als die Summe aller andern Seiten der körperlichen Dreiecke bei A, B, C, D u. s. w., d. h. kleiner als $n.2R - S$. Weil aber ABCD... ein n-Eck ist, so ist die Summe aller Winkel gleich $(n-2)2R$, folglich ist

$$(n-2)2R < n.2R - S; \text{ daher}$$
$$S < n.2R - (n-2)2R, \text{ oder}$$
$$S < 4R.$$

Daß Null die andere Grenze für S ist, ist leicht einzusehen; man kann bei der Construction der Ecke von der Durchschnittsfigur ausgehen, also ein n-Eck construiren und jede Ecke mit einem Punkte M im Raume verbinden. M wird dann die Spitze der Ecke. Macht man nun die Seiten des n-Ecks immer kleiner und kleiner, läßt aber M unverändert liegen, so werden auch die Winkel, welche je zwei benachbarte Kanten mit einander bilden, d. h. die Seiten der Ecke, immer kleiner, und jede Seite nähert sich der Null, daher auch ihre Summe.

2) **Die Summe aller Winkel eines körperlichen n-Ecks liegt zwischen den Grenzen $(n-2)2R$ und $n.2R$.**

Bew. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ die Winkel, und denkt man sich die Ergänzungsecke, so sind deren Seiten: $2R - \alpha$, $2R - \beta$, $2R - \gamma$, u. s. w. Nach Nr. 1. ist daher

$$2R - \alpha + 2R - \beta + 2R - \gamma + \ldots \begin{cases} < 4R. \\ > 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$ durch S', so ist also:

$$n.2R - S' < 4R \quad \text{und} \quad n.2R - S' > 0.$$

Hieraus folgt aber:

$$S' > (n-2)2R \quad \text{und} \quad S' < n.2R.$$

Anm. Im körperlichen Dreieck liegt daher die Summe der Seiten zwischen 0 und 4 R, die Summe der Winkel aber zwischen 2 R und 6 R.

§. 280.

Lehrsätze.

In jedem körperlichen Dreieck liegen:

1) gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber,

2) gleichen Seiten gleiche Winkel,

3) dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber, und

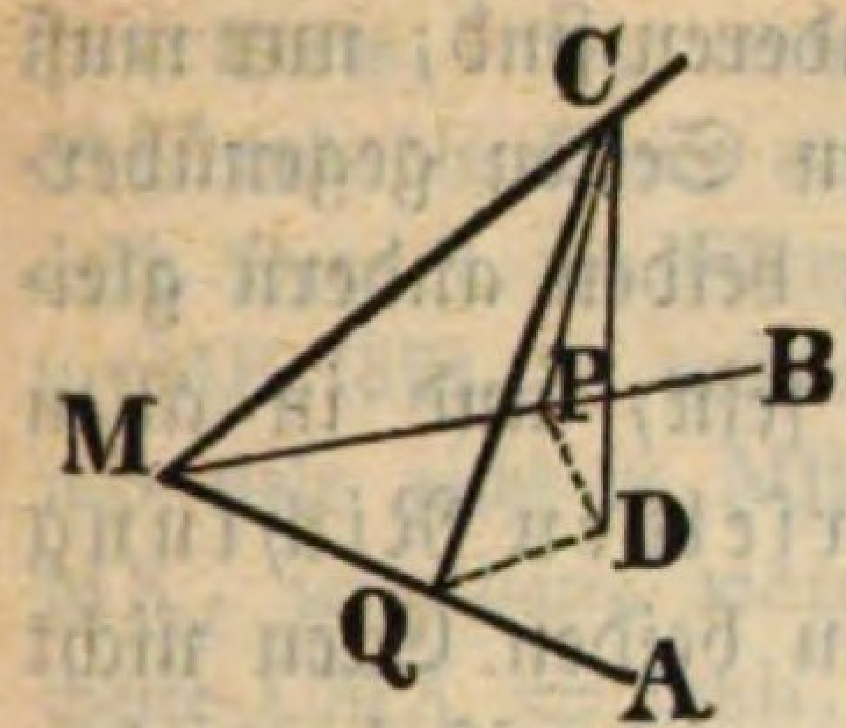
4) der größeren Seite der größere Winkel.

Bew. zu 1. Vorauss. $\sphericalangle MA = \sphericalangle MB$.

Behaupt. Seite CMB = Seite CMA.

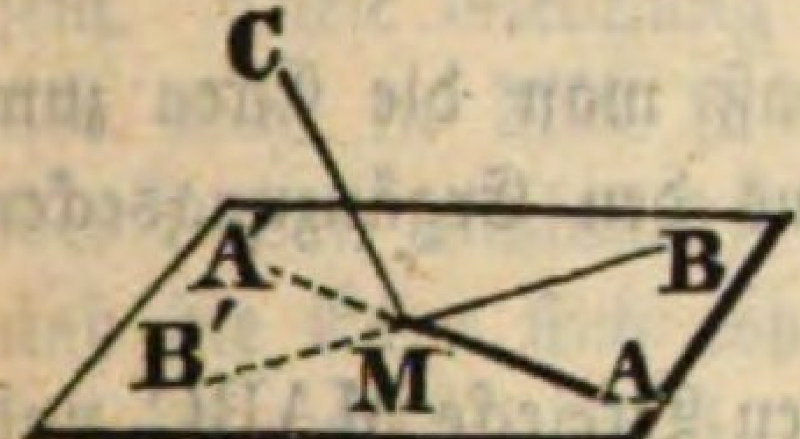
Man unterscheide drei Fälle:

1) Die gleichen Winkel sind rechte; dann steht nach §. 266. Nr. 4. $MC \perp AMB$; daher sind die Seiten auch rechte Winkel, also einander gleich.



2) Die gleichen Winkel sind spitze. Man fälle CD ⊥ AMB (§. 277.) und von D aus DQ ⊥ MA und DP ⊥ MB. Zieht man nun CQ und CP, so sind (§. 256. Nr. 1.) CQD und CPD die gleichen Neigungswinkel MA und MB. Es ist nun $\triangle$ CDQ $\cong$ $\triangle$ CDP, folglich CQ = CP, also auch $\triangle$ CMQ $\cong$ $\triangle$ CMP, daher Seite CMA = Seite CMB.

3) Die gleichen Winkel sind stumpfe. In diesem Falle sind ihre Nebenwinkel spitz; betrachtet man also, nachdem MA und MB über M verlängert sind, das körperliche Dreieck M A′B′C, so sind in ihm die spitzen Winkel MA′ und MB′ einander gleich, folglich nach Nr. 2. auch die gegenüberliegenden Seiten CMB′ und CMA′, daher auch ihre Nebenwinkel, d. h. die Seiten CMB und CMA.

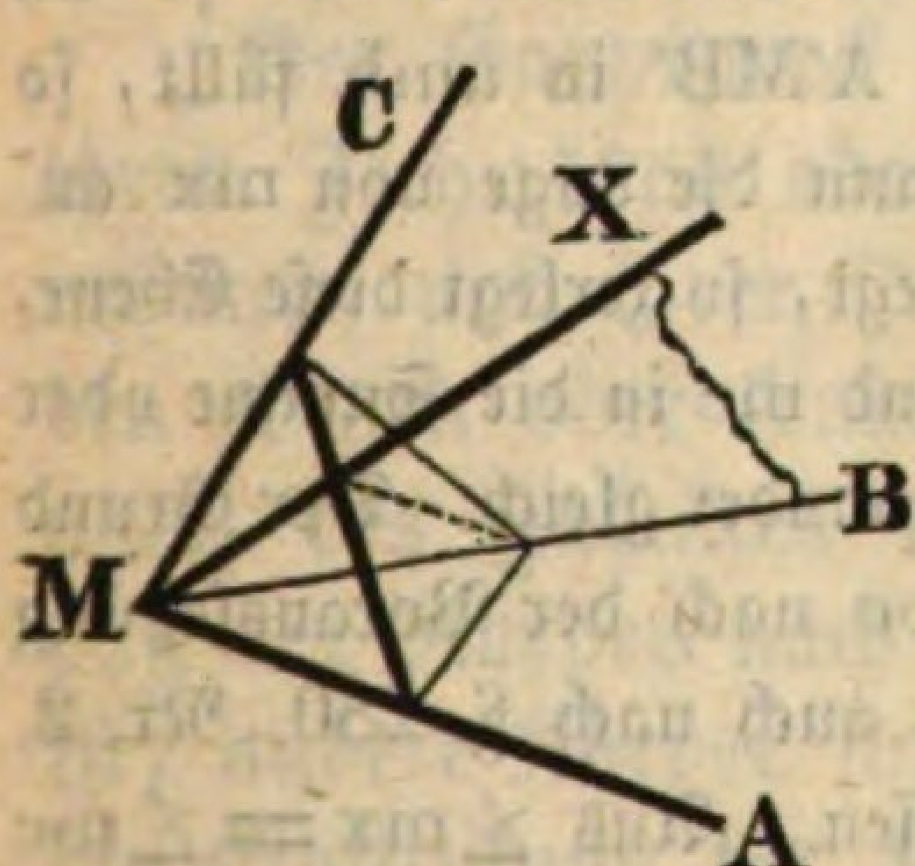


Bew. zu 2. Sind a und b zwei Seiten und α und β die gegenüberliegenden Winkel, so soll aus a = b gefolgert werden: $\alpha = \beta$. Denkt man sich die Ergänzungsecke, so hat diese die gleichen Winkel 2 R — a und 2 R — b, folglich sind die gegenüberliegenden Seiten, nämlich 2 R — α und 2 R — β, nach Nr. 1. einander gleich, woraus $\alpha = \beta$ folgt. (Vergl. §. 275. Anm.)

Bew. zu 3. Vor. $\measuredangle$ MB > $\measuredangle$ MA. Beh. Seite CMA > Seite CMB.

Aus der Voraussetzung folgt, daß ein Theil des Winkels MB dem Winkel MA gleich sein muß. Es sei der Neigungswinkel der Ebene BMX, welche CMA in MX schneidet, gegen die Ebene BMA dem Winkel MA gleich, so sind in dem körperlichen Dreieck MABX zwei gleiche Winkel; folglich ist nach Nr. 1. Seite BMX = Seite AMX. Weil aber in dem körperlichen Dreieck MBXC nach §. 278. BMX + XMC > CMB ist, und statt BMX auch AMX gesetzt werden kann, so folgt:

AMX + CMX > CMB, d. h. Seite CMA > CMB.



Bew. zu 4. indir., oder durch die Ergänzungsecke, ähnlich wie der Bew. zu 2.

§. 281.

Die Lehrsätze von der Congruenz der körperlichen Dreiecke.

Zwei körperliche Dreiecke sind congruent:

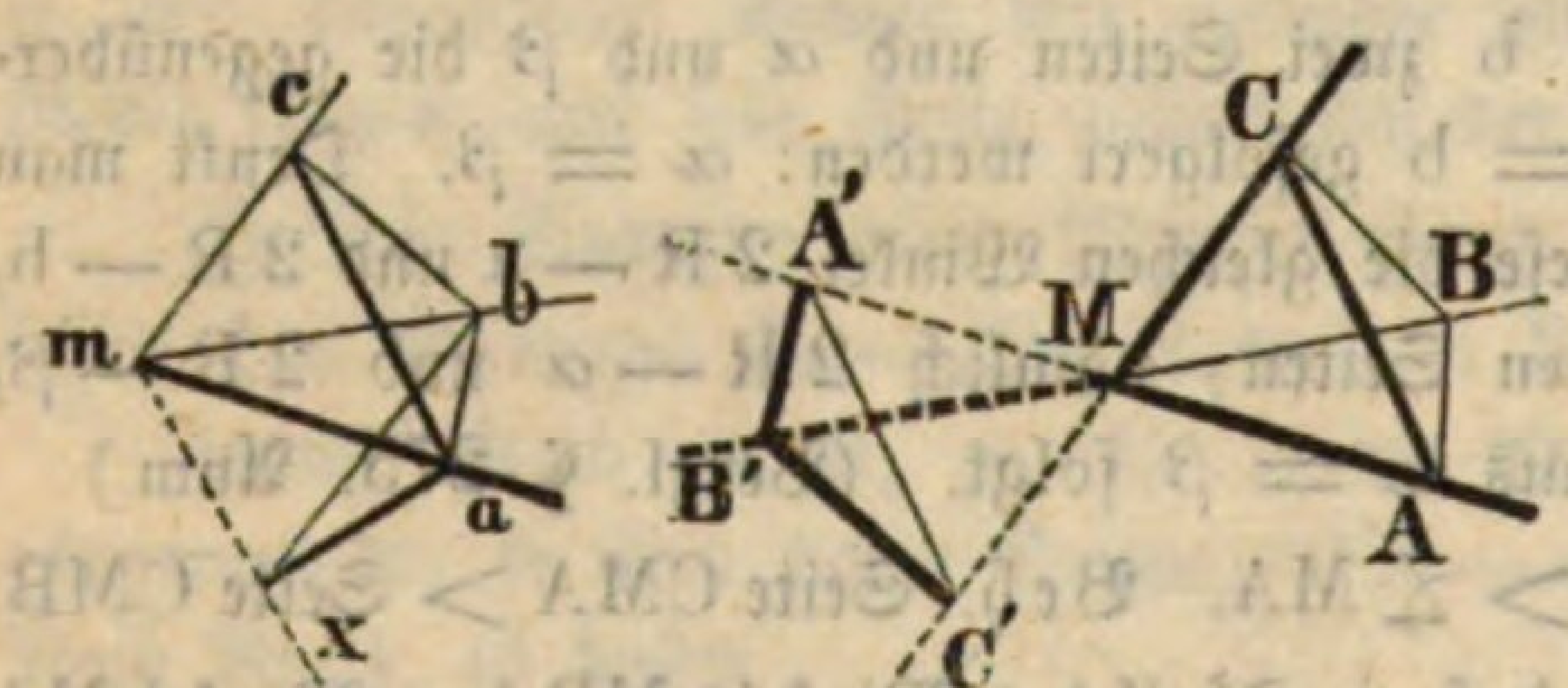
1) wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel,
2) wenn zwei Winkel und die eingeschlossene Seite,
3) wenn die drei Seiten,
4) wenn die drei Winkel,
5) wenn zwei Seiten und der der einen Seite gegenüberliegende Winkel,
6) wenn zwei Winkel und die dem einen Winkel gegenüberliegende Seite

in dem einen Dreieck eben so groß als in dem anderen sind; nur muß in 5) die Summe der den beiden andern gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel und in 6) die Summe der den beiden andern gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten $\gtrless$ 2R sein, und in allen Fällen müssen die gleichen Stücken auch nach derselben Richtung hin auf einander folgen. — Ist die Richtung in beiden Ecken nicht dieselbe, so sind die Ecken symmetrisch gleich; denn jede ist dann der Scheitelecke der andern congruent.

Die Beweise.

Nr. 1. und 2. sind leicht dadurch zu beweisen, daß man die Ecken zum Decken bringt; auch kann 2., nachdem 1. bewiesen ist, aus den Ergänzungsecken gefolgert werden.

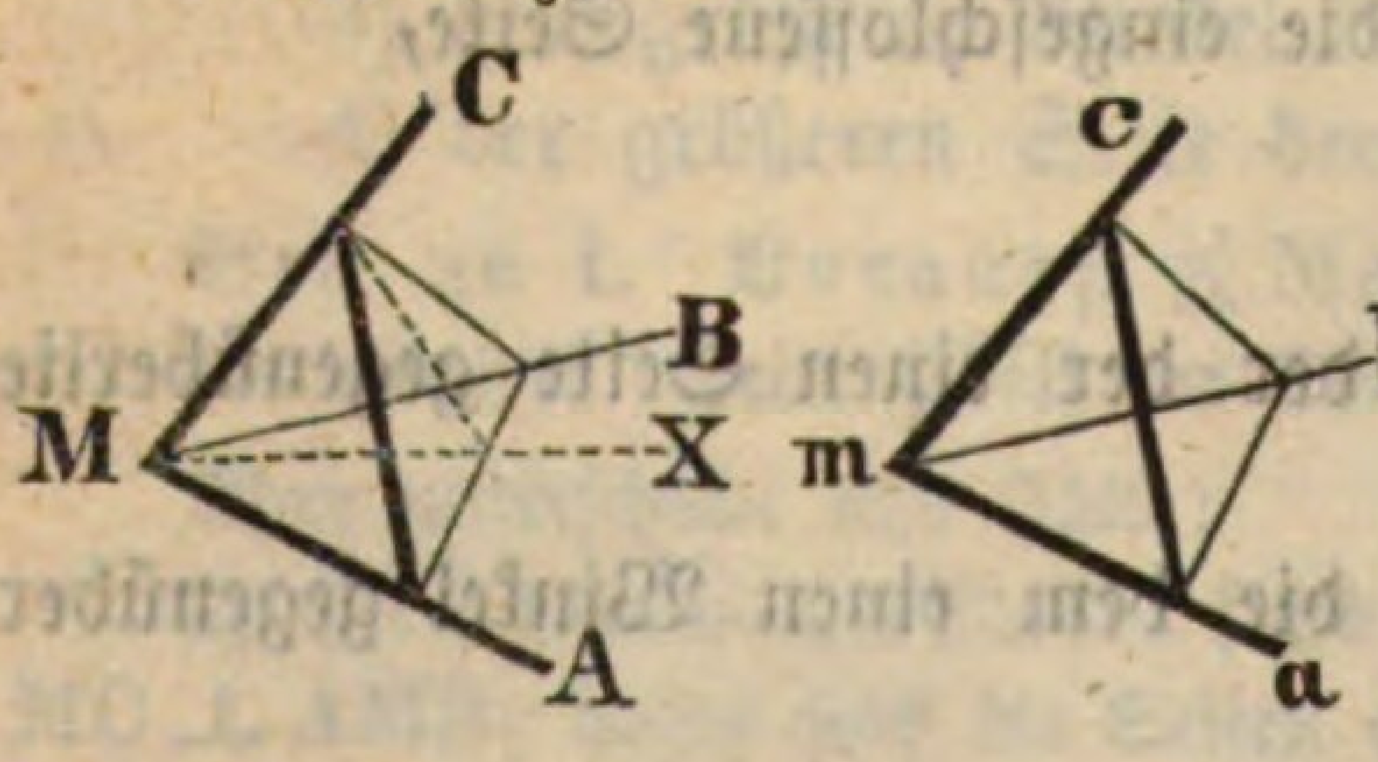
Beweis zu 3. Die gleichen Seiten der körperlichen Dreiecke MABC und mabc sind durch die entsprechenden Buchstaben angedeutet. Bildet man zu MABC die Scheitelecke MA′B′C′, so hat diese mit mabc auch gleiche Seiten, die aber in entgegengesetzter Richtung auf einander folgen. Setzt man nun die Ecke MA′B′C′ so an mabc an, daß M in m, MA′ in ma und die Ebene A′MB′ in amb fällt, so muß MB′ in mb fallen, und die Kante MC′ nimmt dann die Lage von mx an.



Denkt man sich nun durch mx und mc eine Ebene gelegt, so zerlegt diese Ebene, falls nicht ma, oder mb, in ihr liegt, die Winkel mx und mc in die Summe oder Differenz gleicher Winkel; daher sind diese Winkel selbst einander gleich. Der Grund liegt darin, daß jede der beiden Ecken mxac und mxbc nach der Voraussetzung ein Paar gleicher Seiten hat (gleichschenklig ist), also auch nach §. 280. Nr. 2. die gegenüberliegenden Winkel einander gleich sein müssen. Aus $\measuredangle$mx $=$ $\measuredangle$mc folgt aber: $\measuredangle$MC′ $=$ $\measuredangle$mc; folglich auch $\measuredangle$MC $=$ $\measuredangle$mc. Die Ecken MABC und mabc sind daher nach dem Satze 1. congruent. — Liegt aber ma, oder mb, in der Ebene xmc, so ist unmittelbar $\measuredangle$mx $=$ $\measuredangle$mc nach §. 280. Nr. 2.

Beweis zu 4. Denkt man sich zu jeder Ecke die Ergänzungsecke construirt, so sind die Ergänzungsecken nach Nr. 3. congruent, daher auch die ursprünglichen Ecken (§. 276. und 275.)

Beweis zu 5.



Vorausf.

1) Seite CMB $=$ cmb
2) Seite CMA $=$ cma
3) $\measuredangle$ MA $=$ $\measuredangle$ ma
4) $\measuredangle$ MB $+$ $\measuredangle$ mb $\gtrless$ 2R.

Behaupt.

Ecke MABC $\cong$ mabc.

Bew. Legt man die Ecke mabc so in MABC, daß m in M, ma entlang MA und die Ebene amc in AMC fällt: so muß nach Vor. 2. mc in MC und nach Vor. 3. die Ebene amb in AMB fallen; es fragt sich nur, ob auch mb in MB fällt, in welchem Falle die Ecken sich decken. Angenommen, die Kante mb fiele nicht in MB, so muß sie doch in die Ebene AMB fallen, etwa in MX, und dann wäre die Ecke MAXC $\cong$ mabc. Hieraus würde folgen: Seite CMX = cmb, daher nach Vor. 1. CMX = CMB. Die Ecke MXBC wäre sonach gleichschenklig, folglich in dieser Ecke $\measuredangle$MB = $\measuredangle$MX. Weil aber der Nebenwinkel von MX = $\measuredangle$ mb ist, so müßte $\measuredangle$ MB + $\measuredangle$ mb = 2 R sein. Diese Gleichung widerspricht aber der Voraussetzung Nr. 4.; folglich kann mb nicht in MX fallen. Da man aber auf denselben Widerspruch kommt, wenn man annimmt, mb fiele über MB hinaus, so muß mb in MB fallen, und die Ecken sind congruent.

Beweis zu 6. Die Ergänzungsecken sind nach dem Satze 5. congruent, daher auch die Ecken selbst.

Drittes Kapitel.

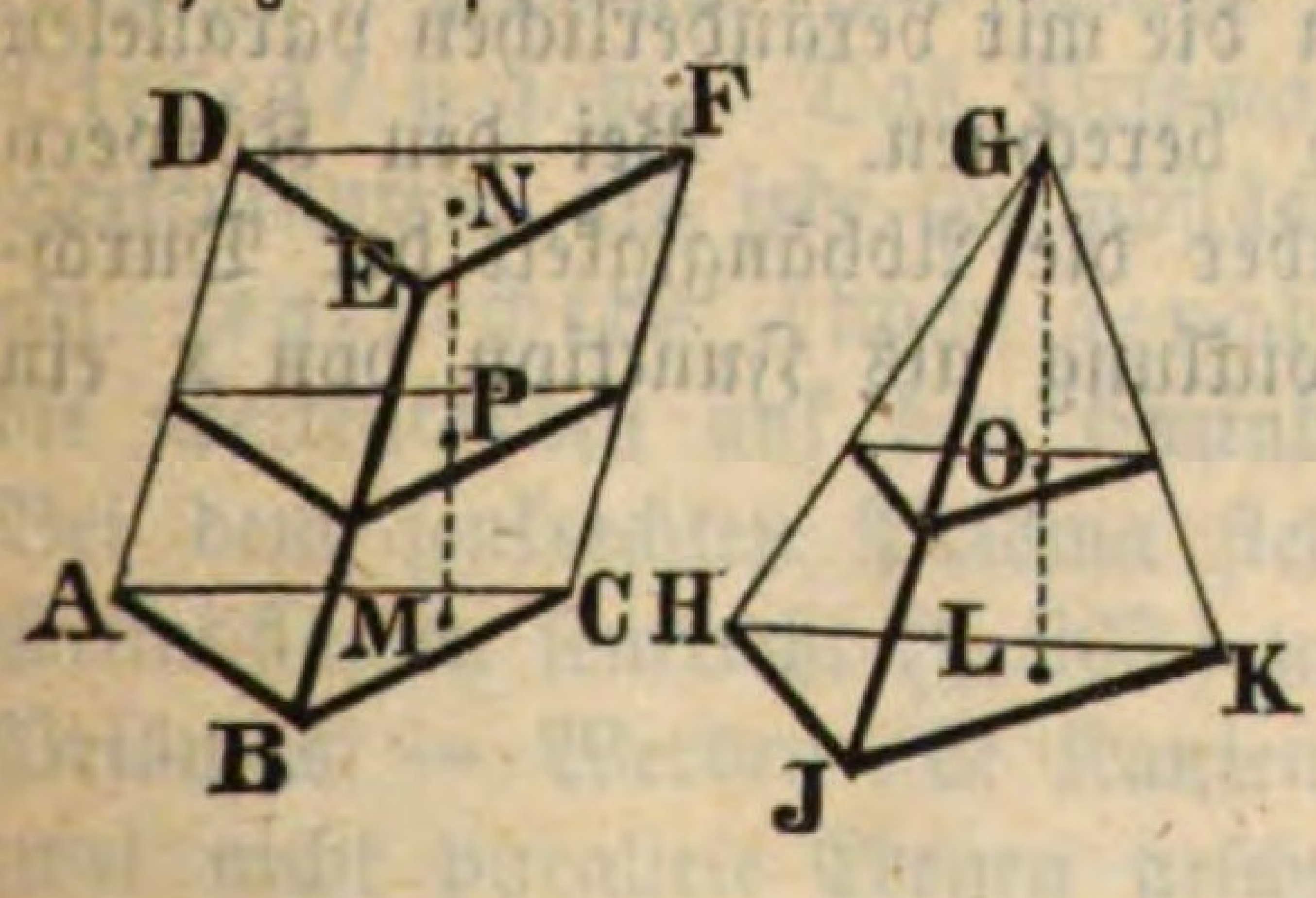
Von den Körpern.

§. 282.

Einleitung.

Der Hauptzweck der Lehre von den Körpern ist die Berechnung ihres Inhaltes oder Volumens, d. h. des Raumes, den sie einnehmen, und ihrer Oberflächen, d. h. der Summe ihrer begrenzenden ebenen oder krummen Flächen. Die mathematisch genaue Berechnung des Inhaltes und der Oberfläche eines Körpers setzt voraus, daß der Körper nach einem bestimmten und bekannten Gesetz gebildet ist; andere Körper sind nur annähernd zu berechnen. Damit der Leser die Eintheilung der Körper, welche der Berechnung in diesem Kapitel zum Grunde liegt, richtig verstehe, wollen wir die beiden Körper betrachten, von welchen bisher überhaupt nur gesprochen worden ist, und zwar im §. 251. der Einleitung in die Stereometrie.

Durchschneidet man einen, etwa dreiseitigen, prismatischen Raum durch zwei parallele Ebenen ABC und DEF, so entsteht der Körper ABCDEF, den man ein Prisma nennt. ABC und DEF sind seine Grundflächen, und ihre Entfernung NM von einander ist seine Höhe. — Durchschneidet man eine dreikantige körperliche Ecke durch eine Ebene HJK, so entsteht der Körper GHJK, den man eine Pyramide



nennt; HJK ist die Grundfläche, G die Spitze, und die Entfernung GL der Spitze von der Grundfläche die Höhe der Pyramide.

Denkt man sich durch G eine mit HJK parallele Ebene gelegt (in welcher dann nur ein Punkt der Pyramide liegt), so kann man Grundfläche und Höhe allgemeiner definiren. Liegt ein Körper zwischen parallelen Ebenen, in denen er endet, über die er also nicht hinaustritt, so nennt man die begrenzenden Ebenen des Körpers, welche in jenen parallelen Ebenen liegen, seine Grundflächen, die Entfernung der parallelen Ebenen von einander seine Höhe. Liegt in der einen Ebene nur ein Punkt des Körpers, oder eine Kante, so hat der Körper nur eine Grundfläche; die andere ist gleich Null. Man kann selbst den Fall sich denken, daß beide Grundflächen Null sind (z. B. wenn eine Kugel zwischen zwei sie berührenden parallelen Ebenen liegt), und wir werden später auch von dieser Vorstellung Gebrauch machen.

Durchschneidet man jeden der beiden Körper ABCDEF und GHJK an beliebiger Stelle durch eine mit den Grundflächen parallele Ebene, so zeigen die Durchschnittsflächen der beiden Körper wesentlich verschiedene Eigenschaften. Bei dem Prisma ist (wie später bewiesen werden wird) die Durchschnittsfläche den Grundflächen congruent, bei der Pyramide ist sie der Grundfläche nur ähnlich, und ihr nicht congruent. Bei dem Prisma ist es also vollständig einerlei, wie weit die Durchschnittsfläche von der oberen Grundfläche DEF entfernt ist: sie ist immer dieselbe; bei der Pyramide hingegen hängt die Größe der Durchschnittsfläche gerade von ihrer Entfernung von der Spitze G ab: die Durchschnittsfläche ist größer oder kleiner, je nachdem diese Entfernung GO größer oder kleiner ist. Bezeichnen wir jede der beiden Entfernungen NP und GO durch x und denken uns x veränderlich, so ist bei dem Prisma die Durchschnittsfläche von x unabhängig oder, nach dem in der Analysis gebräuchlichen Ausdrucke, sie ist nach x constant; bei der Pyramide aber ist sie veränderlich und von x abhängig, d. h. sie ist eine Function von x.

Wir werden in diesem Kapitel zuerst die Körper mit constanten parallelen Durchschnittsflächen, dann die mit veränderlichen parallelen Durchschnittsflächen betrachten und berechnen. Bei den Körpern zweiter Art ist die Untersuchung über die Abhängigkeit der Durchschnittsfläche von x und ihre Entwicklung als Function von x ein wesentlicher Theil der Lehre.

I. Von den Körpern mit constanten parallelen Durchschnittsflächen.

Das Prisma.

§. 283.

Erklärung.

Durchschneidet man alle Kanten eines prismatischen Raumes (§. 251.) durch zwei parallele Ebenen ABCDE und FGHJK, so heißt der zwischen diesen Ebenen liegende und vollkommen begrenzte Theil des Raumes ein Prisma; die parallelen Durchschnittsflächen ABCDE und FGHJK sind seine Grundflächen, ihre Entfernung von einander ist seine Höhe, und die andern Begrenzungsflächen, z. B. ABGF, heißen seine Seitenflächen. Im Allgemeinen heißen bei jedem Körper die Durchschnittslinien je zweier an einander stoßenden begrenzenden Ebenen die Kanten des Körpers; im Besonderen nennt man bei dem Prisma die Kanten, welche die Grundflächen begrenzen, die Grundkanten, z. B. AB, BC, die andern, wie AF, BG u. s. w., welche als Theile der Kanten des prismatischen Raumes mit einander parallel sind, heißen die Seitenkanten. — Eben so heißt bei allen von Ebenen begrenzten Körpern jeder Punkt, in welchem Kanten (mindestens drei) zusammenstoßen, eine Ecke des Körpers; das Prisma in der Figur oben hat sonach 10 Ecken. Jede Ecke eines Körpers ist zugleich Spitze einer körperlichen Ecke.



War der prismatische Raum, aus welchem das Prisma entstand, ein n-seitiger, so heißt auch das Prisma ein n-seitiges Prisma; seine Grundflächen sind dann n-Ecke. Die Grundflächen des dreiseitigen Prismas sind sonach Dreiecke, des vierseitigen sind Vierecke u. s. w. Das Prisma hat eben so viel Seitenflächen und Seitenkanten, als jede Grundfläche Seiten hat. — Ein Prisma heißt ein senkrechtes (auch gerades), oder schiefes, je nachdem die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht stehen, oder nicht. Bei dem senkrechten Prisma stehen auch die Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht (§. 265.) und jede Seitenkante ist die Höhe des Prismas. — Werden alle Kanten eines prismatischen Raumes durch zwei nicht parallele Ebenen geschnitten, die sich aber erst außerhalb

des Raumes treffen, so heißt der zwischen ihnen liegende Theil des prismatischen Raumes ein schief abgeschnittenes Prisma.

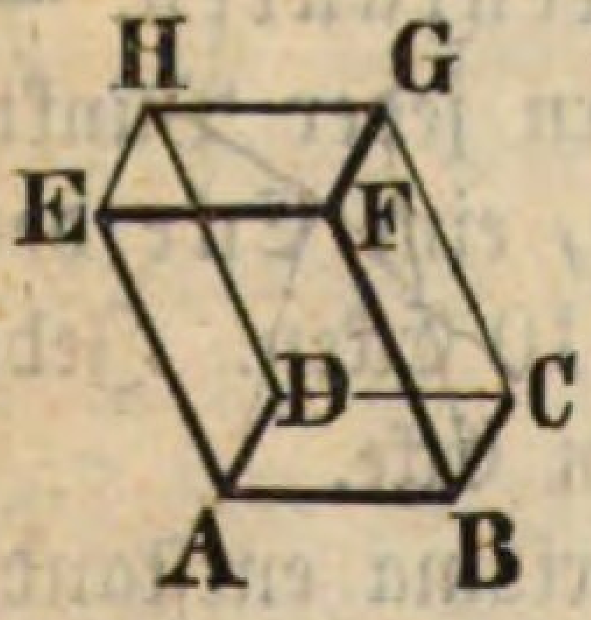
§. 284.
Lehrsatz.

Alle Seitenflächen eines Prismas sind Parallelogramme (bei dem senkrechten also Rechtecke). Die beiden Grundflächen jedes Prismas und jede mit ihnen parallele Durchschnittsebene sind congruente Figuren; diese Durchschnittsebene ist also in Bezug auf ihren Abstand von einer Grundfläche constant.

Bew. (Figur zu §. 283.) Die Seitenkanten AF und BG sind parallel; es ist aber auch AB ≑ FG (§. 249. II.); folglich ist ABGF ein Parallelogramm. Ebenso beweist man, daß die anderen Seitenflächen Parallelogramme sind, woraus dann folgt, daß die beiden Grundflächen gleiche und parallele Seiten haben. Weil sie aber auch gleiche Winkel haben (§. 259.), so sind sie congruent. Daß auch die mit den Grundflächen parallele Durchschnittsfläche LMNOP jeder Grundfläche congruent ist, folgt daraus, daß der Theil des Prismas zwischen ihr und jeder Grundfläche wieder ein Prisma ist; man hätte also nur den vorstehenden Beweis zu wiederholen.

§. 285.
Erklärung.

Jedes vierseitige Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, wird ein Parallelopipedon genannt. Das Parallelopipedon wird sonach von sechs Parallelogrammen begrenzt, von denen je zwei gegenüberliegende parallel und congruent sind, z. B. ⋕ ADHE und BCGF (§. 268. Nr. 3. und §. 259.). Man kann daher zwei beliebige parallele Parallelogramme als die Grundflächen ansehen; ihre Entfernung von einander ist dann die zugehörige Höhe.

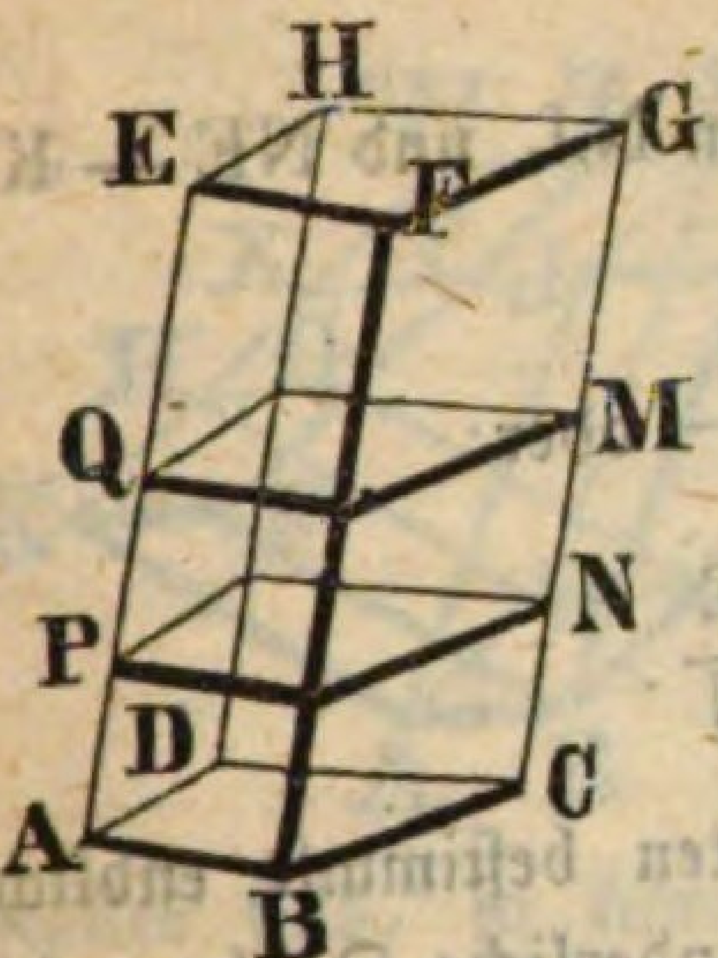


Jedes senkrechte Prisma, dessen Grundflächen reguläre Figuren sind, heißt ein reguläres Prisma. Das senkrechte Parallelopipedon, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges Parallelopipedon; alle Linien- und Flächenwinkel desselben sind rechte Winkel. — Das rechtwinklige Parallelopipedon, dessen Seitenkanten den Grundkanten gleich sind, heißt ein Würfel oder Kubus. Der Kubus wird von sechs congruenten Quadraten begrenzt; er ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil er beim Messen der Körper (mit wenig Ausnahmen) als Einheit genommen wird.

Anmerk. Es ist in der Stereometrie Sprachgebrauch, Durchschnittsfläche statt Durchschnittsebene zu sagen, gerade wie man Grundfläche und Seitenfläche statt Grundebene und Seitenebene sagt.

§. 286.

Lehrsätze.



1) Wenn man von einer Kante AE eines Prismas ABCDEFGH gleiche Längen abschneidet, AP = PQ, und durch die Punkte P und Q Durchschnittsflächen parallel der Grundfläche legt, so werden durch sie congruente Prisma abgeschnitten, d. h. es ist

Prsm. APNC ≅ Prsm. PQMN.

Bew. Die Prisma sind leicht zum Decken zu bringen. Die unteren Grundflächen AC und PN sind congruent; man kann also die Prisma so in einander legen, daß diese Grundflächen sich decken. Die Seitenkante PQ muß dann in AP fallen, weil das körperliche Dreieck bei P dem körperlichen Dreieck bei A congruent ist (aus drei Seiten), und die andern gleichliegenden Seitenkanten fallen dann auch zusammen, weil sie resp. parallel PQ und AP sind. Endlich fallen die obern Endpunkte der Kanten in einander, weil alle Kanten gleich lang sind.



2) Legt man durch einen beliebigen Punkt N der Kante AE eines Prismas ABCDEFGH eine mit den Grundflächen parallele Durchschnittsebene NMPQ, so wird das Prisma in zwei Theile zerlegt, welche sich zu einander verhalten wie die ihnen zugehörigen Theile der Kante AE, d. h. es verhält sich:

Prsm. AP : Prsm. NG = AN : NE.

Bew. 1) Sind AN und NE commensurabel, so trage man den gemeinschaftlichen aliquoten Theil e auf AN und NE so oft wie möglich ab, und lege durch jeden Theilpunkt eine mit den Grundflächen parallele Durchschnittsfläche. Diese Durchschnittsflächen zerlegen nach dem Satze 1. das ganze Prisma in lauter congruente Theile. Ist e in AN n mal und in NE m mal enthalten, so verhält sich:

1) AN : NE = n : m.

Dann besteht aber auch das Prisma AP aus n Theilen, und das Prisma NG aus m Theilen, und alle diese Theile sind einander congruent; folglich verhält sich

2) Prsm. AP : Prsm. NG = n : m.

Aus 1) und 2) folgt die Richtigkeit des Satzes.

2) Sind AN und NE incommensurabel, so denke man sich AN in n gleiche Theile zerlegt, jeder sei = e, und trage nun e auf NE von N aus so oft wie möglich ab. Da AN und NE incommensurabel sind, so bleibt ein Rest KE. Legt man durch K eine den Grundflächen parallele Durchschnittsfläche KJ, so verhält sich, weil NK und AN commensurabel sind, nach dem 1sten Theile des Beweises:

(1.) Prsm. NJ : Prsm. AP = NK : AN.

Schreibt man aber Prsm. NG — Prsm. KG statt Prsm. NJ, und NE — KE statt NK, so folgt aus (1.):

$$(2.)\quad \frac{\text{Prsm. NG} - \text{Prsm. KG}}{\text{Prsm. AP}} = \frac{NE - KE}{AN} \quad \text{oder:}$$

$$(3.)\quad \frac{\text{Prsm. NG}}{\text{Prsm. AP}} - \frac{\text{Prsm. KG}}{\text{Prsm. AP}} = \frac{NE}{AN} - \frac{KE}{AN}.$$

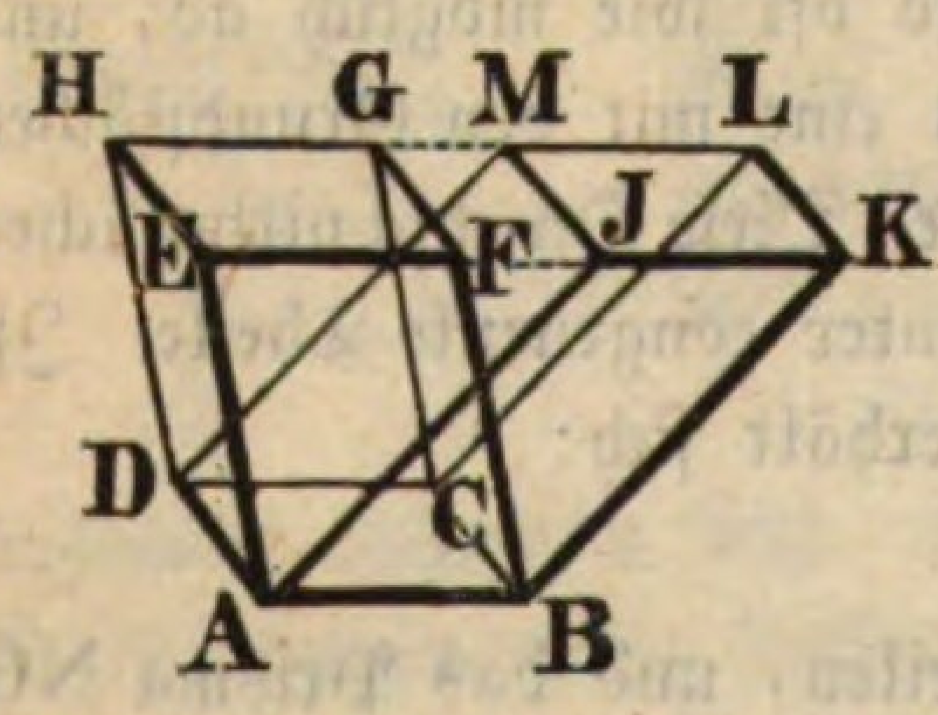
In dieser Gleichung sind die Minuenden beider Seiten bestimmte endliche Zahlen (Verhältnisse), die Subtrahenden aber sind veränderliche Zahlen, die man beliebig kleiner machen und der Null so nahe, wie man nur will, bringen kann. Denn wählt man n immer größer und größer, so wird e immer kleiner und kleiner, woraus folgt (vergl. den Beweis in §. 51.), daß man den Punkt K beliebig nahe an E rücken kann. Dadurch nähert sich die Länge KE, aber auch das Prisma KG, der Null, während die Nenner der Subtrahenden in (3.) unverändert bleiben. Aus §. 50. folgt daher die Gleichheit der Subtrahenden, d. h. die Richtigkeit des Satzes.

§. 287.
Lehrsätze.

I. Parallelopipeda (ABCDEFGH und ABCDJKLM) mit congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich.

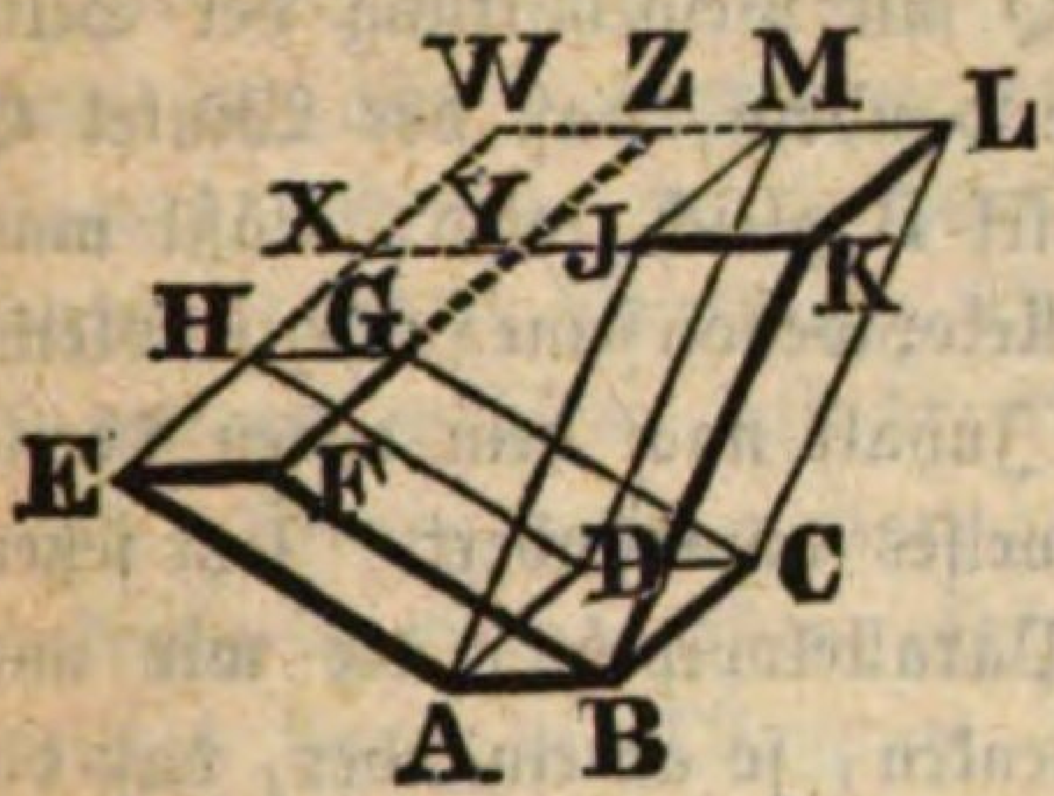
Bew. Legt man die Parallelopipeda so in einander, daß die unteren congruenten Grundflächen sich decken, so müssen die oberen Grundflächen, weil sie den untern parallel sind und in gleicher Entfernung von ihnen liegen, in eine Ebene fallen. Wir unterscheiden jetzt zwei Lagen:

1) Zwei Seitenflächen der beiden Parallelopipeda, welche einer gemeinschaftlichen Grundkante angehören, können in eine Ebene fallen, in der Figur ABFE und ABKJ.



In diesem Falle liegen auch die gegenüberliegenden Seitenflächen DCGH und DCLM in derselben Ebene, und EFJK, so wie HGML sind dann parallele gerade Linien. Nun sind die dreiseitigen Prisma AEJDHM und BFKCGL congruent; denn sie haben congruente Grundflächen AEJ und BFK, die homologen körperlichen Ecken an diesen Grundflächen sind congruent (aus drei Seiten) und die Seitenkanten, z. B. AD und BC, einander gleich. Diese Prisma lassen sich daher so in einander legen, daß sie sich decken. Zieht man jedes Prisma von dem ganzen Körper ab, der ein vierseitiges Prisma ist (ABKE ist die eine Grundfläche), so bleiben die beiden Parallelopipeda ABCDJKLM und ABCDEFGH als gleiche Reste übrig, wodurch der Satz bewiesen ist.

2) Fallen keine zwei Seitenflächen der Parallelopipeda ABCDEFGH und ABCDJKLM in eine Ebene, so sind die Seiten der beiden oberen Grundflächen



bezüglich mit einander parallel, weil sie den Seiten des ⧣ ABCD parallel sind. Verlängert man nun FG und EH, und dann auch KI und LM, bis diese Linien jene schneiden, so entsteht ein Parallelogramm XYZW, welches der gemeinschaftlichen Grundfläche ABCD beider Parallelopipeda congruent ist; und weil auch seine Seiten resp. mit den Seiten des ⧣ ABCD parallel sind, so kann man durch AB und XY, durch BC und YZ, durch CD und ZW, endlich durch DA und WX eine Ebene legen. Dadurch entsteht ein Parallelopipedon ABCDXYZW, welches nach dem ersten Theile dieses Beweises jedem der beiden Parallelopipeda AG und AL gleich ist; folglich sind diese einander gleich.

II. **Jedes Parallelopipedon läßt sich in ein senkrechtes verwandeln, wenn man die Grundfläche als solche beibehält und jede Seitenkante senkrecht auf die Grundfläche errichtet und der Höhe gleich macht. Beide Parallelopipeda haben dann verschiedene Form, aber denselben Inhalt.**

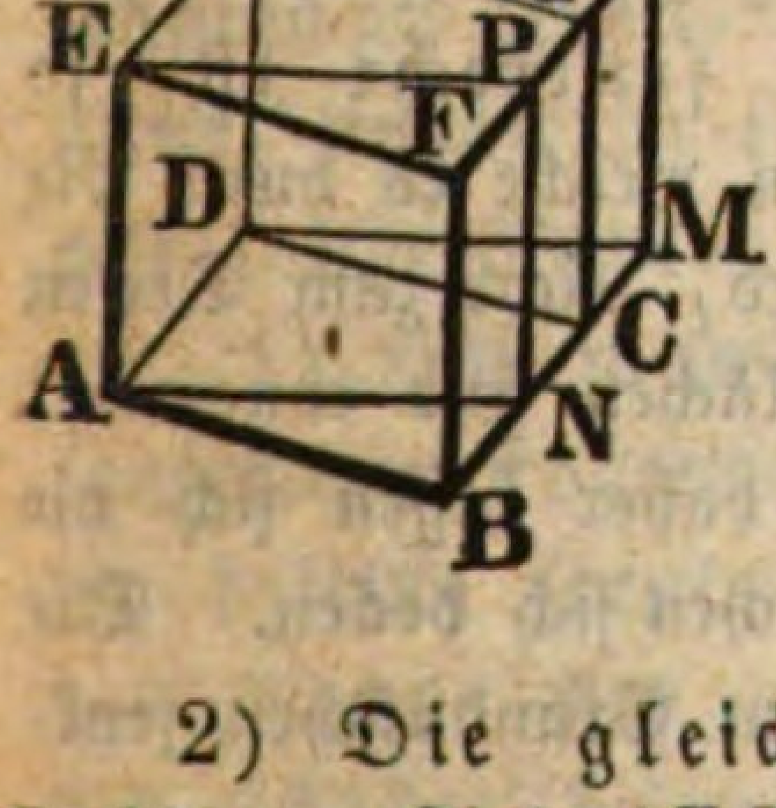
Der Beweis folgt aus I.

§. 288.
Lehrsatz.

Parallelopipeda von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

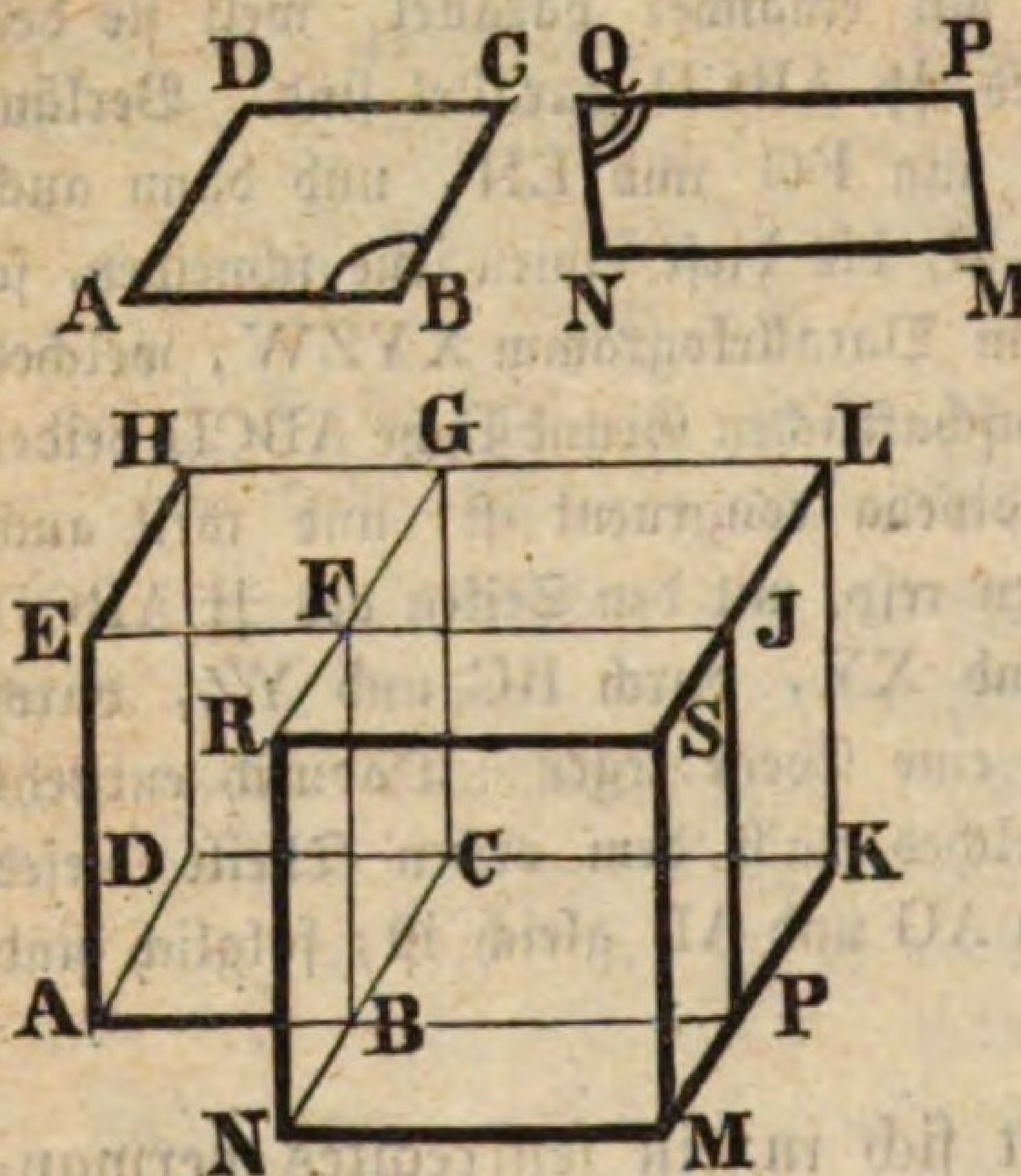
Bew. Nach §. 287. II. können wir uns die Parallelopipeda senkrecht denken; jede Seitenkante ist der Höhe gleich. Wenn der Satz für die senkrechten Parallelopipeda gilt, ist er auch für die ihnen gleichen schiefen wahr. — Wir unterscheiden bei dem Beweise zwei Fälle:

1) die gleichen Grundflächen haben ein Paar gleicher Seiten. Dann sind auch die zugehörigen Höhen einander gleich, und legt man nun die



Parallelopipeda so in einander, daß die Grundflächen (ABCD und ANMD) in eine Ebene fallen, die gleichen Seiten aber (AD) sich decken: so müssen die gegenüberliegenden Seiten in eine Richtung fallen. Es mögen ABCDEFGH und ANMDEPQH die Parallelopipeda sein, so folgt ihre Gleichheit unmittelbar aus §. 287. I., wenn man ADHE als ihre (gemeinschaftliche) Grundfläche ansieht.

2) Die gleichen Grundflächen haben kein Paar gleicher Seiten. Sind ABCD und NMPQ die gleichen Grundflächen, so kann man



NMPQ mit Beibehaltung der Seite QP so verwandeln, daß der Winkel Q dem Winkel B gleich wird. Läßt man dem Parallelopipedon seine Höhe, so bleibt auch sein Inhalt nach dem ersten Theile dieses Beweises unverändert. Jetzt setzen wir die Parallelopipeda, die wir uns senkrecht denken, so an einander, daß die Grundflächen in dieselbe Ebene fallen, der Punkt Q in B fällt, und der Winkel Q Scheitelwinkel des Winkels B wird. Die Seitenkanten durch B und Q fallen dann zusammen; die Figur zeigt beide Parallelopipeda in der jetzigen Lage: ABCDEFGH und BNMPFRSJ. Verlängert man MP und DC, bis sie sich in K schneiden, und denkt sich über BPKC ein senkrechtes Parallelopipedon BPKCFJLG von derselben Höhe mit den anderen construirt, so verhält sich nach §. 286. Nr. 2.:

$$\text{Ppd. } AG : \text{Ppd. } BL = AB : BP$$
$$\text{Ppd. } BL : \text{Ppd. } NJ = BC : BN.$$

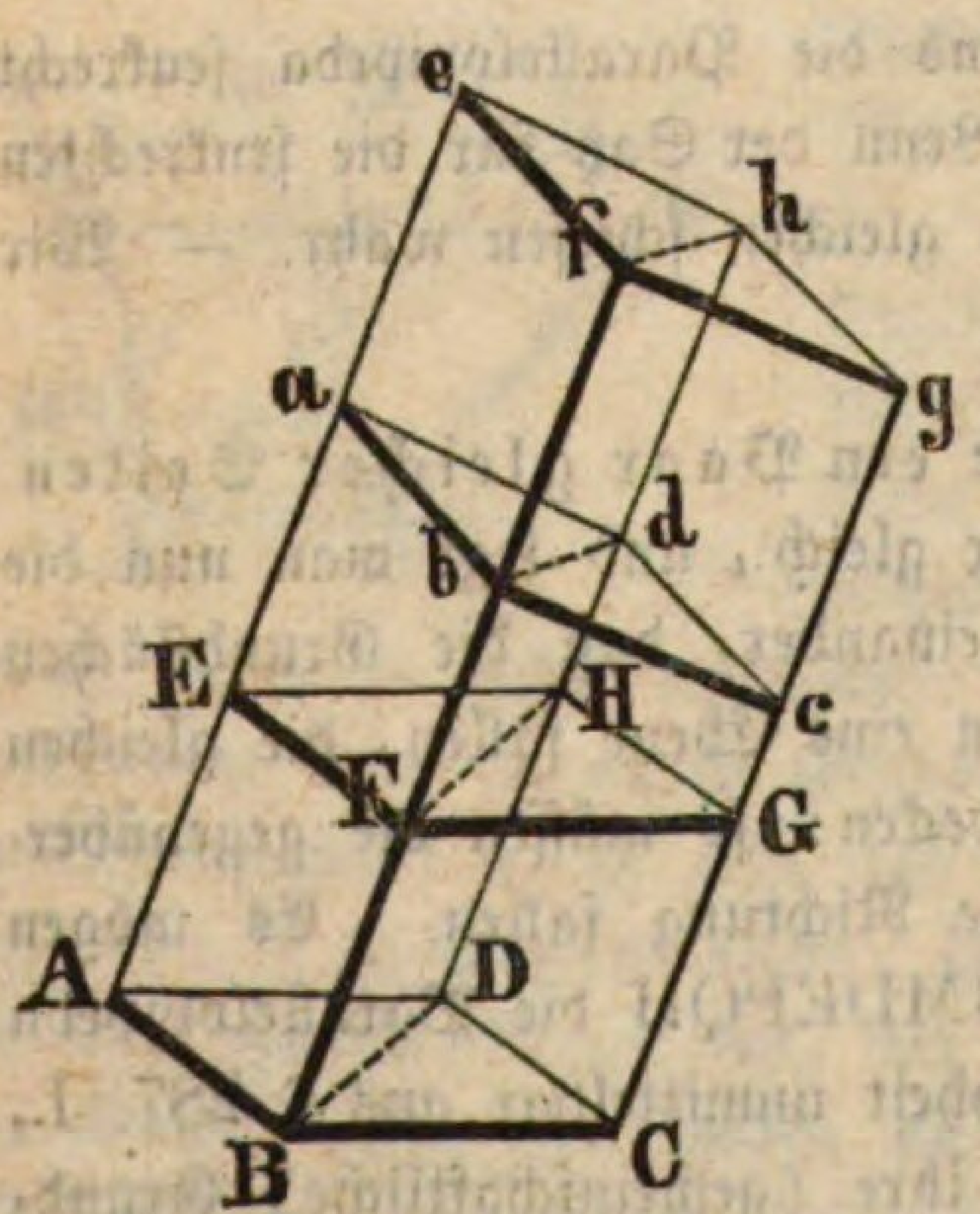
Setzt man diese Proportionen zusammen, so folgt:

$$\text{Ppd. } AG : \text{Ppd. } NJ = AB \,.\, BC : BP \,.\, BN.$$

Aus der Gleichheit der Parallelogramme ABCD und BNMP folgt aber auch: $AB \,.\, BC = BP \,.\, BN$ (§. 69.); daher ist Ppd. AG = Ppd. NJ.

§. 289.

Lehrsatz.



Jedes Parallelopipedon wird durch eine Diagonalebene, welche durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten geht, in zwei gleiche dreiseitige Prisma zerlegt. Ist das Parallelopipedon senkrecht, so sind die Theile nicht nur gleich, sondern auch congruent.

Bew. 1) Wenn das Parallelopipedon ABCDEFGH senkrecht ist, so sind die beiden Prisma, in welche es durch die Ebene BDHF zerlegt wird, leicht zum Decken zu bringen. Die Grundflächen sind congruent ($\Delta ABD \cong \Delta CDB$), daher lassen sich die Prisma zunächst so in einander legen, daß diese Grundflächen sich decken. Die Seitenkanten fallen dann auch in einander, weil sie auf den Grundflächen senkrecht stehen, u. s. w.

2) Wenn das Parallelopipedon ABCDEFGH schief ist, so denke man sich alle Seitenkanten und Seitenflächen über die obere Grundfläche verlängert und lege durch einen Punkt a der verlängerten AE eine alle Seitenkanten senkrecht schneidende Ebene abcd. Den Punkt a möge man so weit von E entfernt wählen, daß die Ebene abcd ganz außerhalb des Parallelopipedons liegt. Ferner mache man ae = AE und lege auch durch e eine alle Seitenkanten senkrecht schneidende Ebene efgh, so ist abcdefgh ein senkrechtes Parallelopipedon, welches durch die Diagonal-Ebene bdhf nach dem ersten Theile des Beweises in zwei congruente dreiseitige Prisma zerlegt wird.

Nun sind die beiden schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma ABDabd und EFHefh congruent; denn sie haben congruente Grundflächen, an den homologen Ecken derselben congruente körperliche Dreiecke, und die Seitenkanten sind bezüglich einander gleich, z. B. Bb = Ff, weil sie aus gleichen Theilen bestehen; die Prisma sind daher leicht zum Decken zu bringen. Zieht man aber von beiden den Körper EFHabd ab, so bleibt:

1) Prisma ABDEFH = Prisma abdefh.

Ganz eben so beweist man:

2) Prisma BCDFGH = Prisma bcdfgh.

In diesen beiden Gleichungen sind aber die rechten Seiten einander gleich; folglich auch die linken Seiten, was zu beweisen war.

Anmerkung. Bei dem schiefen Parallelopipedon sind die Theile nicht congruent, obwohl sie congruente Begränzungsflächen und auch gleiche von ihnen eingeschlossene Flächenwinkel haben. Der Grund liegt darin, daß die congruenten, resp. gleichen Stücke nicht bei beiden Körpern nach gleicher Richtung hin auf einander folgen. So sind z. B. die beiden körperlichen Ecken A und G nur symmetrisch gleich (§. 281.), eine Bezeichnung, welche man auch auf die Körper selbst überträgt.

§. 290.

Das rechtwinklige Parallelopipedon.

Das rechtwinklige Parallelopipedon ist durch drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten vollkommen bestimmt; denn alle rechtwinkligen Parallelopipeda mit denselben drei zusammenstoßenden Kanten lassen sich leicht so in einander legen, daß sie sich decken; sie sind also congruent. (Jede andere Kante ist einer von diesen Kanten gleich.) Man pflegt daher das rechtwinklige Parallelopipedon durch diese drei Kanten zu geben, und meint, wenn von seinen drei Kanten gesprochen wird, immer in einer Ecke zusammenstoßende Kanten. In Bezug auf solche Kanten gelten folgende Sätze:

1) Haben zwei rechtwinklige Parallelopipeda zwei Paar gleicher (zusammenstoßender) Kanten, so verhalten sie sich zu einander, wie die dritten Kanten.

Bew. Aus der Voraussetzung folgt, daß die Parallelopipeda gleiche Grundflächen haben, nämlich die Rechtecke, deren Seiten die gleichen Kanten

sind. Setzt man nun beide Körper so an einander, daß ein Paar congruenter Grundflächen sich decken, so fallen die Seitenkanten des einen in die Verlängerungen der Seitenkanten des andern, und die Richtigkeit des Satzes folgt unmittelbar aus §. 286. Nr. 2.

2) Zwei rechtwinklige Parallelopipeda verhalten sich zu einander, wie die Producte ihrer drei (in einer Ecke zusammenstoßenden) Kanten.

Bew. Das eine rechtwinklige Parallelopipedon P habe die drei Kanten a, b, c, das andere Q habe die Kanten α, β, γ. Denkt man sich nun ein drittes Parallelopipedum X mit den drei Kanten α, b, c und ein viertes Y mit den Kanten α, β, c, so verhält sich nach Nr. 1:

$$P : X = a : \alpha$$
$$X : Y = b : \beta$$
$$Y : Q = c : \gamma, \text{ folglich durch Zusammensetzen:}$$
$$P : Q = abc : \alpha\beta\gamma.$$

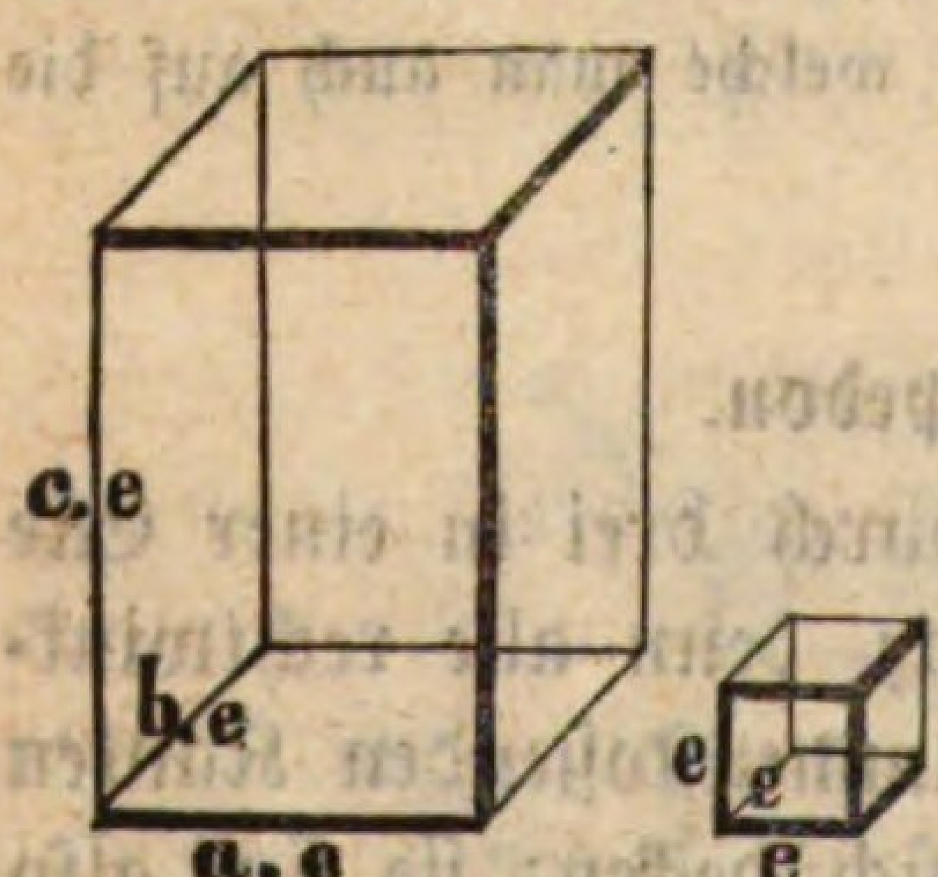
Anmerkung. Das Product der Kanten ist als das Product der unbenannten Zahlen aufzufassen, welche man erhält, wenn die Kante durch dieselbe Einheit gemessen und dann diese Einheit (die Benennung) fortgelassen hat. Es ergiebt sich dies aus den Proportionen in dem vorstehenden Beweise, die man nicht zusammensetzen kann, bevor man nicht rechts die gemeinschaftliche Einheit fortgehoben hat.

§. 291.

Aufgabe.

Den Inhalt eines rechtwinkligen Parallelopipedons zu bestimmen.

Aufl. Um ein rechtwinkliges Parallelopipedon, welches mit K bezeichnet werden mag, zu messen, vergleichen wir es mit einem Kubus, in welchem jede Kante gleich e sei. Messen wir nun drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten von K durch e, sind a.e, b.e und c.e die drei Kanten, und bezeichnen wir den Kubus mit C: so folgt aus §. 290.:



$$K : C = a.b.c : 1.1.1; \text{ folglich ist}$$
$$K = abc \times C,$$

d. h. der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelopipedons wird gefunden, wenn man seine drei Kanten durch dieselbe Einheit mißt, die drei unbenannten Zahlen, welche man durch das Messen erhalten hat, mit einander multiplicirt und dem Producte den Kubus mit der Kante e zur Benennung giebt. In diesem Sinne ist die kürzere Regel zu verstehn: der Inhalt des rechtwinkligen Parallelopipedons ist gleich dem Product seiner drei Kanten.

Weil aber abc = ab × c ist, und weil c eine Höhe, ab aber der Inhalt der zugehörigen Grundfläche des Parallelopipedons ist,

wenn man dieses Product auf das Quadrat über e als Einheit bezieht: so folgt aus

$$K = ab.c \times C$$

auch die Regel: man findet den Inhalt eines Parallelopipedons, wenn man die Höhe durch eine beliebige Längeneinheit, die Grundfläche durch das Quadrat dieser Längeneinheit mißt, die durch das Messen erhaltenen unbenannten Zahlen multiplicirt, dem Product aber den Kubus zur Kante e zur Benennung giebt. Diese Regel drückt man kürzer so aus: der Inhalt des rechtwinkligen Parallelopipedons ist gleich dem Product aus Grundfläche und Höhe.

§. 292.

Die gebräuchlichste Einheit beim Messen der Körper ist der Kubus, dessen Kante ein Duodecimal-Fuß, dessen Grundfläche also 1□' ist. Dieser Kubus heißt ein Kubikfuß (1 C'), und er enthält 12.12.12 d. h. 1728 Kubikzoll (C''); 1 C'' ist gleich 1728 Kubiklinien (C'''); endlich sind noch 1728 Kubikfuß gleich einer Kubikruthe (C°). Der Grund liegt darin, daß, wenn man den Kubikfuß durch den Kubikzoll messen will, jede Kante durch den Zoll gemessen werden muß, also gleich 12'' ist. Hieraus folgt nach dem vorigen §.

$$1\ C' = 12.12.12\ C'' = 1728\ C''.$$

Bei den stereometrischen Rechnungen in diesem Buche ist immer die Duodecimal-Eintheilung zum Grunde gelegt; bei der Decimal-Eintheilung ist die Kubikruthe dieselbe; es ist aber 1 C° = 1000 C', 1 C' = 1000 C'', u. s. w. — Eine andere, bei der Berechnung von Erdkörpern gebräuchliche Einheit ist die Schachtruthe; sie ist ein rechtwinkliges Parallelopipedon von 12' Länge (ddc.-M.), 12' Breite und 1' Höhe, enthält also 144 C'.

§. 293.
Inhaltsbestimmungen.

1) Der Inhalt jedes Parallelopipedons ist gleich dem Product aus Grundfläche und Höhe.

Bew. Dieser Körper ist nach §. 288. einem rechtwinkligen Parallelopipedon gleich, welches mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

2) Der Inhalt jedes dreiseitigen Prisma ist gleich dem Product aus Grundfläche und Höhe.

Bew. (Figur zu §. 289.) Ist ABDEFH das dreiseitige Prisma, so ergänze man seine Grundfläche ABD zu dem ⧣ ABCD, das Prisma selbst zu dem Parallelopipedon AG; dann ist das dreiseitige Prisma nach §. 289. die Hälfte des Parallelopipedons. Der Inhalt des letzteren ist, wenn h die Höhe

bezeichnet, gleich $\#$ ABCD $\times$ h, wofür 2 . Δ ABD $\times$ h gesetzt werden kann. Hieraus folgt, daß der Inhalt des dreiseitigen Prismas $= \Delta$ ABD $\times$ h ist.

3) **Der Inhalt K jedes Prismas ist gleich dem Product aus der Grundfläche G und der Höhe h, oder**

$$\text{Inhalt des Prismas} = G.h.$$

Bew. Durch Diagonalebenen, von denen jede durch ein Paar Seitenkanten geht, kann man jedes Prisma in dreiseitige Prisma von der Höhe h zerlegen — z. B. das fünfseitige Prisma in der Figur zu §. 283., wenn man etwa durch AF und DJ, und dann noch durch AF und CH eine Ebene legt. Die Grundflächen der dreiseitigen Prisma sind dann die Dreiecke AED, ADC und ACB. — Bezeichnet man die Grundflächen der dreiseitigen Prisma durch G′, G″, G‴ u. s. w., so ist nach Nr. 2.:

$$K = G'.h + G''.h + G'''.h + \ldots$$
$$= (G' + G'' + G''' + \ldots).h = G.h.$$

4) Der Inhalt K jedes Kubus ist gleich dem arithmetischen Kubus der Kante a; oder $K = a^3$.

Bew. unmittelbar aus §. 291.

Anmerk. Da Ausdrücke der dritten Dimension (§. 182.) die Bedeutung der Inhalte von Prisma (resp. rechtw. Ppd.) zulassen, so kann man die arithmetischen Gesetze über solche Ausdrücke — z. B. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(2a)^3 = 8a^3$, $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$, u. s. w. — stereometrisch auffassen, ihre Bedeutung aufsuchen und sie stereometrisch beweisen. (Vergl. §. 59.)

§. 294.

Zusatz.

Sind P und p zwei Prisma, G und g ihre Grundflächen, H und h ihre Höhen, so verhält sich

$$P : p = G.h : g.h.$$

Hieraus folgt: Prisma verhalten sich im Allgemeinen zu einander wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen; wenn sie gleiche Höhen haben: wie ihre Grundflächen; wenn sie gleiche Grundflächen haben: wie ihre Höhen.

§. 295.

Die Oberfläche eines Prismas berechnet man durch Addition der begrenzenden Ebenen.

§. 296.

Aehnliche Prisma.

Zwei Prisma heißen ähnlich, wenn sie ähnliche Grundflächen haben, wenn ihre Seitenkanten sich zu einander wie homologe Grundkanten verhalten, und wenn diese Seitenkanten zu den Grundflächen gleiche Lage haben, was erfordert — aber auch daraus folgt —, daß ein Paar körperlicher Ecken an homologen Ecken der Grundflächen con-

gruent sind. Solche Prisma werden dann überhaupt durch Figuren begrenzt, von denen je zwei gleichliegende ähnlich sind; alle homologen Linien- und Flächenwinkel sind einander gleich; homologe körperliche Ecken congruent.

Aehnliche Prisma verhalten sich zu einander wie die Kuben homologer Kanten (oder auch Höhen).

Bew. Sind P und p die Prisma, G und g ihre Grundflächen, H und h ihre Höhen, A und a zwei homologe Grundkanten, B und b zwei homologe Seitenkanten, und denkt man sich die Höhen von den Endpunkten der Seitenkanten B und b gefällt und zur Construction der Neigungswinkel dieser Seitenkanten gegen die Grundflächen benutzt: so folgt aus ähnlichen Dreiecken:

$$H:h = B:b;$$

aus ähnlichen Seitenflächen: $B:b = A:a.$

Man hat nun nach §. 294:

$$P:p = G.H:g.h = \frac{G}{g}:\frac{h}{H}$$

$$= \frac{A^2}{a^2}:\frac{b}{B} = \frac{B^2}{b^2}:\frac{b}{B}$$

$$= B^3:b^3 \text{ (oder } A^3:a^3\text{)}.$$

Anm. Alle Würfel sind ähnlich und verhalten sich zu einander wie die dritten Potenzen ihrer Kanten.

§. 297.

Uebungs-Aufgaben.

1) Wie groß ist in einem rechtwinkligen Parallelopipedon mit den Kanten a, b, c die Oberfläche?

Antw. $2(ab + ac + bc)$.

2) Wie groß ist die Diagonale dieses Körpers, d. h. die Verbindungslinie zweier gegenüberliegender Ecken, welche in keiner Begrenzungsfläche liegt?

Aufl. Zieht man durch den einen Endpunkt der Diagonale in einer Grenzfläche die Diagonale, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die gesuchte Linie ist; daher ihre Länge $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. (Vergl. Arithm. §. 167. II.)

3) Wie groß sind in demselben Körper die Diagonalebenen?

Aufl. Sie sind Rechtecke, und es giebt deren drei Paar. Die Diagonalebene durch die Kante a ist gleich $a\sqrt{b^2 + c^2}$, durch b gleich $b\sqrt{a^2 + c^2}$, durch c gleich $c\sqrt{a^2 + b^2}$.

4) In jedem rechtwinkligen Parallelopipedon schneiden sich die Diagonalen in einem Punkt, der von allen Ecken gleich weit entfernt ist. In diesem Punkte schneiden sich auch alle Diagonalebenen.

Bew. Je zwei Diagonalen sind zugleich Diagonalen desselben Rechtecks, nämlich einer Diagonalebene; andererseits liegt jede Diagonale in drei Diagonalebenen.

5) Der Inhalt eines Kubus ist 2000 C′; wie groß die Kante?

Antw. $\sqrt[3]{2000} = 14{,}422496'$.

6) Die Oberfläche eines Würfels sei 80 □′; wie groß ist die Kante?

Antw. 3,65148′.

7) Die Kanten eines rechtwinkligen Parallelopipedons sind 1°, 1′ und 1″; wie groß Inhalt und Oberfläche?

Antw. Inh. = 1 C′; Obfl. = $26\frac{1}{6}$ □′.

8) Eine Mauer ist 6′ hoch, $3\frac{1}{2}'$ dick und 12° lang; wie groß ist ihr Inhalt?

Antw. 3024 C′.

9) Die Grundfläche eines Prismas sei = 27,435 □′, die Höhe = 2,324′; wie groß ist der Inhalt?

Antw. 63,75894 C′.

10) Jede Kante eines senkrechten dreiseitigen Prismas sei = a; wie groß der Inhalt und die Oberfläche?

Antw. Inh. = $\frac{a^3}{4}\sqrt{3}$; Obfl. = $\frac{a^2}{2}(6+\sqrt{3})$.

11) Das Rechteck ABCD ist die Grundfläche eines rechtwinkligen Parallelopipedons von der Höhe 10′, und es ist AB = 6′ und AD = 4′. Von der Grundfläche aus ist von jeder der durch A und B gehenden Kanten die Länge 3′, von der durch C gehenden Kante aber die Länge 6′ abgeschnitten, und durch die Endpunkte dieser drei Längen ist eine Ebene gelegt. Wie groß ist die Durchschnittsfläche des Parallelopipedons, und wie groß sind die beiden Theile, in welche dieser Körper durch die Durchschnittsfläche zerlegt wird?

Antw. Die Durchschnittsfläche = 30 □′; die beiden Körper 108 C′ und 132 C′.

12) Die Grundfläche eines dreiseitigen Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 0,45′; jede Seitenkante ist 1,28′ und bildet mit der Grundfläche einen Winkel von 60°; wie groß ist der Inhalt des Prismas?

Antw. $\frac{0{,}45^2}{4}\sqrt{3} \,.\, 1{,}28 \sin 60° = 0{,}0972$ C′.

13) Die Diagonale eines Kubus sei gleich a; wie groß Inhalt und Oberfläche?

Antw. Inh. = $\frac{a^3}{9}\sqrt{3}$; Obfl. = $2a^2$.

14) Der Inhalt eines Würfels sei 5832 C″; wie groß ist die Diagonale?

Antw. 2 Fuß 7,1769 Zoll (ddc.).

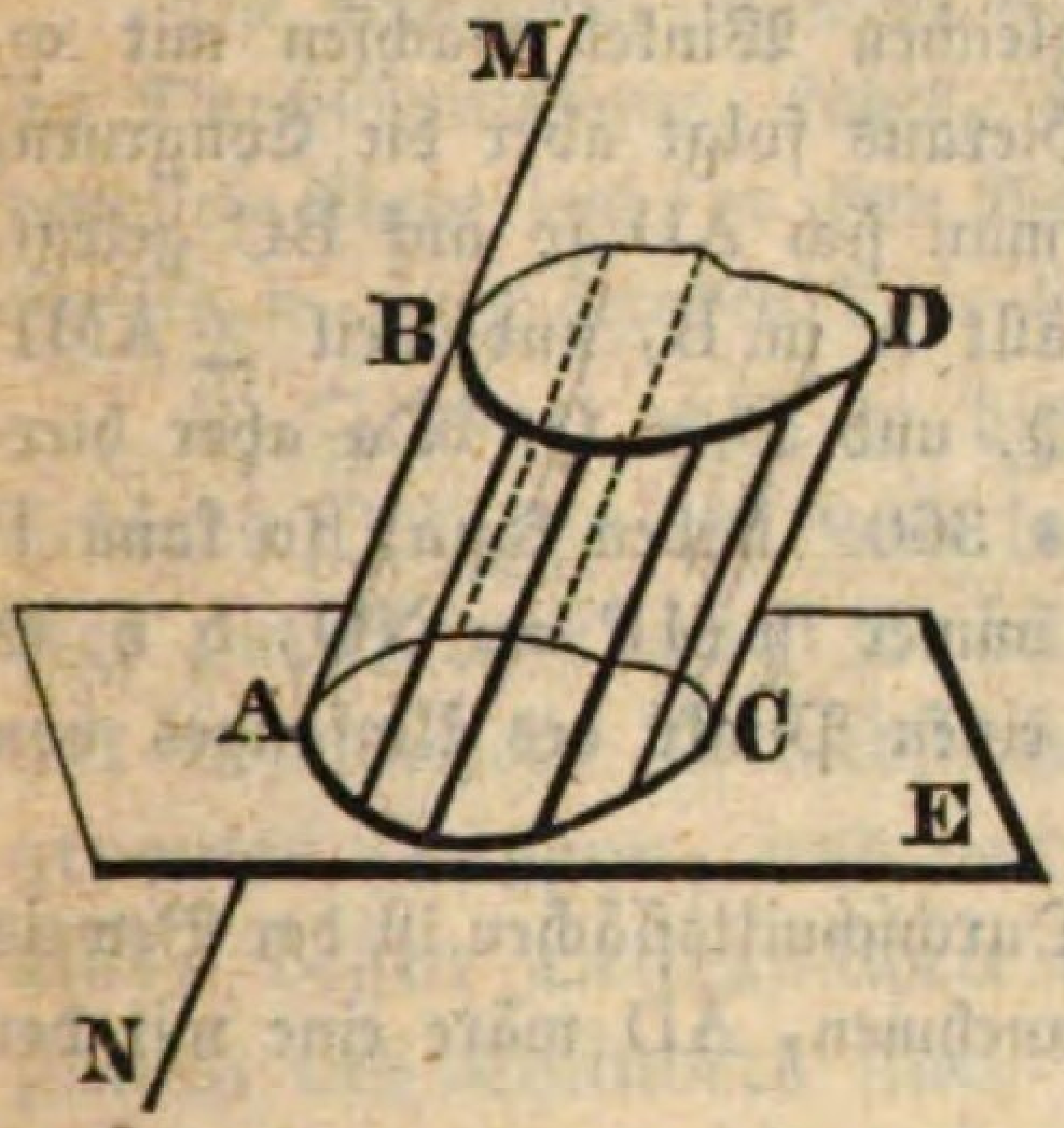
Der Cylinder.

§. 298.

Erklärung.

Schneidet eine unbegrenzte Linie NM eine Ebene E in einem Punkte A des Umfanges einer krummlinigen Figur AC, welche in dieser Ebene E liegt, und denkt man sich NM so fortbewegt, daß sie

mit ihrer ursprünglichen Lage immer parallel bleibt, aber nach und nach alle stetig auf einander folgenden Punkte des Umfangs der Figur AC durchläuft und zuletzt in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt: so nennt man die krumme Fläche, welche NM bei dieser Bewegung durchläuft, eine cylindrische Fläche, den Raum aber, welche diese Fläche umschließt, einen cylindrischen Raum. Durchschneidet man diesen Raum durch zwei parallele Ebenen AC und BD, so heißt der zwischen ihnen liegende Theil des cylindrischen Raumes ein Cylinder; die beiden Ebenen AC und BD heißen seine Grundflächen, ihre Entfernung von einander seine Höhe, der Theil der cylindrischen Fläche, welcher zwischen den Grundflächen liegt, sein Mantel, und der Theil der Linie NM zwischen diesen Grundflächen, und zwar in jeder Lage, welche NM während der Bewegung annimmt, also AB oder CD u. s. w.: eine Seite des Cylinders. Alle Seiten des Cylinders sind parallel und daher nach §. 269. Nr. 12. einander gleich.

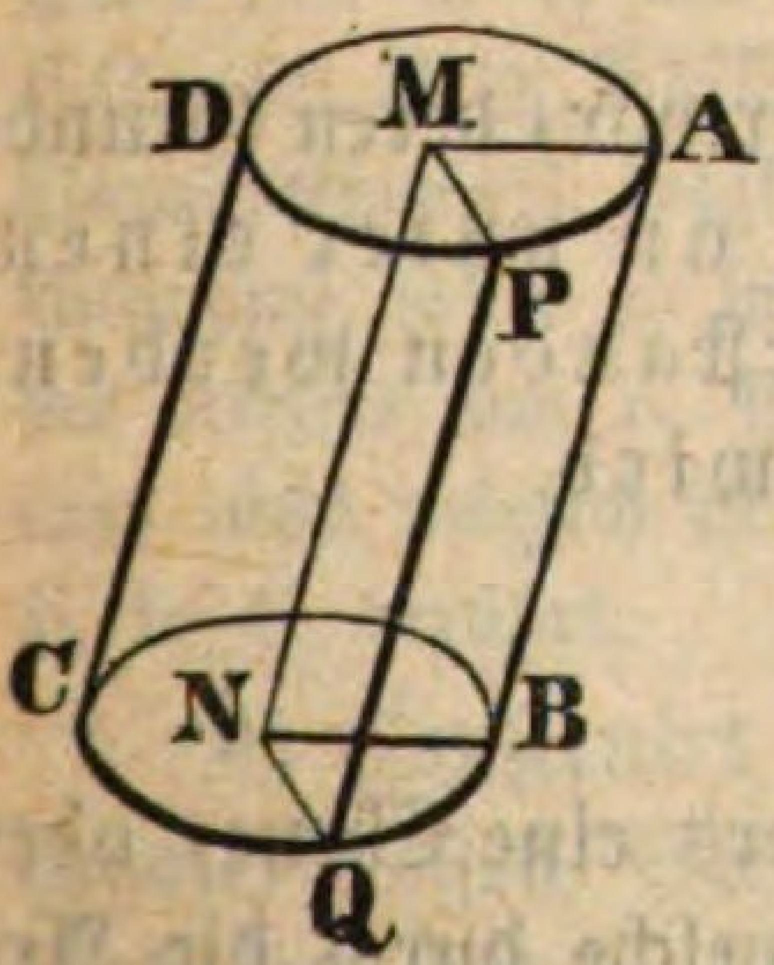


Ein Cylinder heißt senkrecht (gerade), oder schief, je nachdem seine Seiten auf den Grundflächen senkrecht stehen, oder nicht. Sind die Grundflächen Kreise, so heißt der Cylinder der gemeine Cylinder, und die Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Grundflächen heißt seine Axe.

§. 299.

Lehrsatz.

Die beiden Grundflächen jedes Cylinders und jede mit ihnen parallele Durchschnittsfläche sind congruente Figuren; daher ist jede solche Durchschnittsfläche in Bezug auf ihren Abstand von einer Grundfläche constant.



Bew. Durch einen beliebigen Punkt M der einen Grundfläche AD ziehe man mit den Seiten des Cylinders eine parallele Linie MN, welche die andere Grundfläche BC in N schneiden mag. Legt man nun durch MN und eine Seite AB des Cylinders eine Ebene, so entsteht das Parallelogramm MABN; daher ist MA = NB. Legt man dann noch durch MN eine zweite Ebene MPQN unter einem beliebigen Winkel φ mit der Ebene MABN (bei dem senkrechten Cylinder würde $\measuredangle$ AMP = φ sein), so schneidet

diese Ebene den Cylindermantel in einer Seite PQ. Denn sie schneidet den Umfang der Grundfläche AD in einem Punkte P, und durch P geht eine mit MN parallele Seite PQ des Cylinders, die also sowohl in der durch MN und P gelegten Ebene, als auch im Cylindermantel liegt, folglich die Durchschnittslinie beider Flächen ist. Weil nun MPQN auch ein Parallelogramm ist, so folgt MP = NQ. Das Gesagte findet aber bei jedem beliebigen Werthe von φ, von 0° bis 360° Statt; bei jedem Werthe von φ ist auch immer $\measuredangle$ AMP = $\measuredangle$ BNQ (parallele Schenkel), und diese gleichen Winkel wachsen mit φ, wiewohl ungleichmäßig, von 0° bis 360°. Hieraus folgt aber die Congruenz der Grundflächen AD und BC. Denn denkt man sich AD so auf BC gelegt, daß M in N und MA entlang NB fällt: so fällt A in B, und weil $\measuredangle$ AMP = $\measuredangle$ BNQ ist, so fällt auch MP entlang NQ, und P in Q. Da aber hierbei $\measuredangle$ AMP jede beliebige Größe von 0° bis 360° haben kann, so kann P jeder Punkt des Umfanges von AD sein, und immer ist MP = NQ, d. h. es fällt jeder Punkt des Umfanges von AD in einen Punkt des Umfanges von BC; die Grundflächen sind also congruent.

Für die mit den Grundflächen parallelen Durchschnittsflächen ist der Beweis eben so zu führen; man kann ohne Weiteres annehmen, AD wäre eine mit der Grundfläche BC parallele Durchschnittsfläche.

§. 300.

Zusatz.

Ist eine Grundfläche, etwa AD, ein Kreis, so folgt aus dem vorigen Satze nicht nur, daß BC auch ein Kreis ist, sondern auch, daß **die Axe immer den Seiten parallel ist.** Denn nimmt man im vorstehenden Beweise zum Punkte M den Mittelpunkt des Kreises AD, und zieht MN parallel mit den Seiten, so ist wieder MA = NB und MP = NQ. Weil aber jetzt MA = MP ist, so folgt NB = NQ, und weil hierbei NQ jede beliebige Lage haben kann, so ist N von allen Punkten des Umfanges der Ebene BC gleich weit entfernt, also Mittelpunkt des Kreises BC.

Hieraus folgt, daß **im gemeinen senkrechten Cylinder die Axe zugleich Höhe ist,** und daß ein solcher Cylinder dadurch entstanden gedacht werden kann, daß ein Rechteck (MABN) um eine seiner Seiten (MN) eine volle Umdrehung macht.

In den meisten Anwendungen kommen Cylinder vor, deren Grundflächen Kreise sind. **Es soll daher von jetzt an unter einem Cylinder immer der gemeine Cylinder verstanden werden, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt wird.**

§. 301.

Folgerungen.

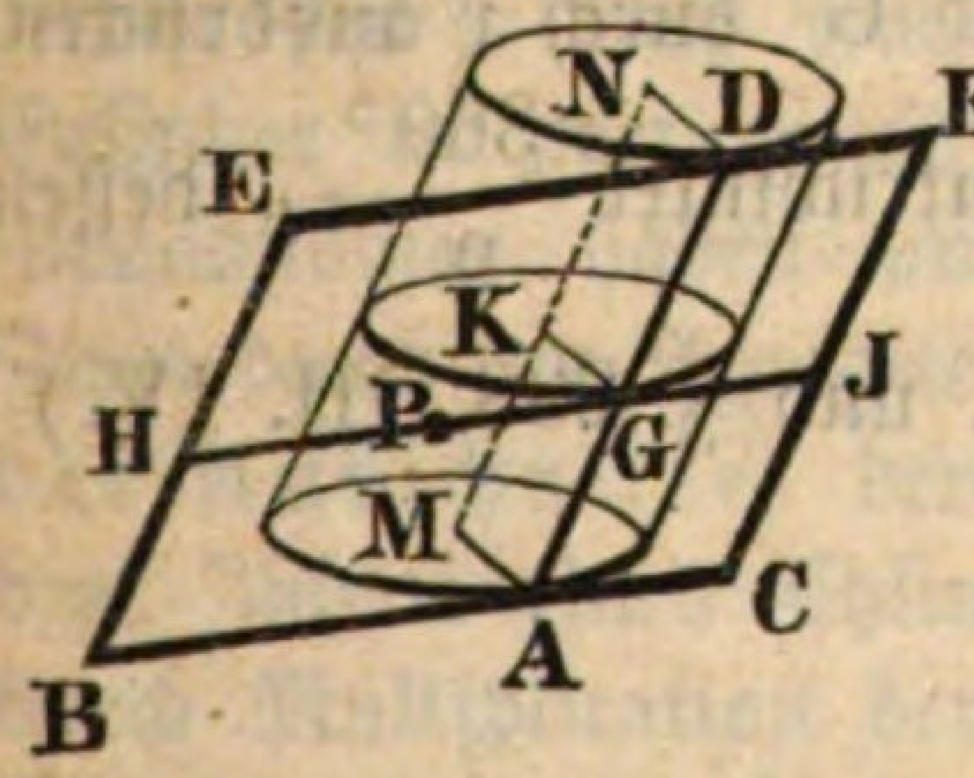
1) Legt man durch zwei Seiten eines Cylinders eine Ebene, oder schneidet man den Cylinder durch eine Ebene, welche durch die Axe

geht oder mit der Axe parallel ist, so ist die Durchschnittsfigur ein Parallelogramm (beim senkrechten Cylinder ein Rechteck). Zwei Seiten dieses Parallelogramms sind parallele und gleiche Sehnen der beiden Grundflächen, die beiden andern Seiten sind Seiten des Cylinders. Mit dem Cylindermantel hat dies Parallelogramm nur die Punkte dieser beiden Seiten gemein.

Die Annahme, es wäre ein anderer Punkt P des Mantels auch ein Punkt der Durchschnittsfigur, führt, wenn man durch P eine mit den Grundflächen parallele Ebene legt, zu dem Widerspruch, daß drei Punkte der Peripherie eines Kreises in einer geraden Linie liegen müßten.

2) Zeichnet man in die eine Grundfläche eines Cylinders ein beliebiges Polygon ein und legt durch jede Seite desselben eine mit der Axe parallele Ebene, so bilden die Durchschnittslinien dieser Ebenen mit der andern Grundfläche dort wieder ein jenem Polygon congruentes Polygon, und beide Polygone sind Grundflächen eines Prismas, dessen Seitenflächen die mit der Axe parallelen Durchschnittsflächen des Cylinders sind. Man nennt dieses Prisma: ein in den Cylinder eingeschriebenes Prisma. Mit dem Cylindermantel hat das eingeschriebene Prisma nur die Seitenkanten gemein, welche Seiten des Cylinders sind.

3) Legt man in der verbreiteten Grundfläche eines Cylinders durch einen Punkt A der Peripherie dieser Grundfläche eine Tangente BC an die Peripherie, und legt man dann durch BC und die zu A gehörige Seite AD des Cylinders eine Ebene BCFE: so hat diese Ebene mit dem Cylindermantel nur diese eine Seite AD gemein, d. h. sie berührt den Cylindermantel in dieser Seite.



Bew. Angenommen, irgend ein Punkt P der Ebene BCFE, welcher nicht in AD liegt, läge auch im Cylindermantel, so lege man durch P eine mit der Grundfläche des Cylinders parallele Ebene. Diese Ebene mag die Ebene BCFE in HJ, die Seite AD in G und den Cylinder in dem Kreise um K schneiden. Zieht man KG, so ist $\measuredangle$ KGP $=$ $\measuredangle$ MAB $= 90^\circ$ (parallele Schenkel, und nach der Voraussetzung); folglich ist HJ eine Tangente des Kreises um K. Nach der Annahme sollte P im Cylindermantel liegen, und weil auch P in der Ebene des Kreises um K liegt, so müßte P in der Peripherie dieses Kreises liegen, was nicht möglich ist, weil P in der Tangente HJ liegt, welche den Kreis um K in G berührt.

4) Construirt man um die Grundfläche eines Cylinders ein Polygon, dessen Seiten also die Peripherie der Grundfläche berühren, und legt durch jede Seite eine den Cylindermantel berührende Ebene

(Nr. 3.): so sind die Durchschnittslinien dieser Ebenen mit der verbreiteten andern Grundfläche wieder Seiten eines jenem Polygone congruenten Polygons, dessen Seiten die Peripherie dieser andern Grundfläche berühren. Das Prisma, dessen Grundflächen diese Polygone sind, dessen Seitenflächen also den Cylindermantel berühren, heißt ein dem Cylinder umschriebenes Prisma.

§. 302.
Der Inhalt des Cylinders.

Es sei r der Radius der Grundfläche und h die Höhe des Cylinders. Denkt man sich in den Cylinder ein Prisma eingeschrieben, ein zweites Prisma aber um den Cylinder gelegt, und nimmt man zur Grundfläche jedes Prismas ein reguläres n-Eck, bezeichnet mit K den Inhalt und mit G die Grundfläche des eingeschriebenen, mit K' aber den Inhalt und mit G' die Grundfläche des umschriebenen Prismas: so ist

$$K = G.h \text{ und } K' = G'.h,$$

während der Inhalt des Cylinders zwischen K und K' liegt; denn er ist größer als K, aber kleiner als K'. Denkt man sich nun n immer größer und größer gemacht (etwa durch fortwährende Verdoppelung der Seitenzahl der Grundflächen), so rücken die Grenzen, zwischen welchen der Cylinder liegt, nämlich G.h und G'.h einander immer näher, und weil beide Grenzen den gemeinschaftlichen constanten Factor h haben, G und G' aber dem Inhalte des Kreises $r^2\pi$ sich fortwährend nähern: so folgt hieraus der Inhalt des Cylinders $= r^2\pi.h$. — Zur Ergänzung des Beweises kann man G und G' durch r ausdrücken. Zur Seite des regulären n-Ecks gehört der Centriwinkel $\frac{360°}{n}$, dessen Arcus $= \frac{2\pi}{n}$ ist. Man hat daher (§. 229. und §. 238. III. IV.)

$$K = \frac{n}{2} r^2 . \sin\frac{2\pi}{n} \cdot h;$$

$$K' = nr^2 . \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \cdot h = nr^2 . h \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}; \text{ oder}$$

$$K = \frac{n}{2} r^2 h \cdot \left[\frac{2\pi}{n} - \frac{1}{3!}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^5 - + \ldots\right]$$

$$K' = nr^2 . h \cdot \frac{\frac{\pi}{n} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^5 - + \ldots}{1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^4 - + \ldots}.$$

Beide Ausdrücke lassen sich vereinfachen, indem man durch n hebt:

$$K = \frac{1}{2} r^2 h \cdot \left[2\pi - \frac{(2\pi)^3}{3!\,n^2} + \frac{(2\pi^5)}{5!\,n^4} - + \ldots \right]$$

$$K' = r^2 h \cdot \frac{\pi - \frac{\pi^3}{3!\,n^2} + \frac{\pi^5}{5!\,n^4} - + \ldots}{1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^4 - + \ldots}.$$

Setzt man jetzt für n immer größere Werthe, so nähern sich K und K' derselben Grenze $r^2\pi . h$ und gehen für $n = \infty$ in diese Grenze über. Es ist daher:

der Inhalt des Cylinders $= r^2\pi . h$.

Zusatz 1. Sind die Grundflächen des Cylinders nicht Kreise, so ist der Inhalt ebenfalls gleich dem Product aus Grundfläche und Höhe.

Man kann sich hiervon elementar nur wieder durch eingeschriebene und umschriebene Prisma überzeugen, deren Umfänge ihrer Grundflächen sich mit steigender Seitenzahl immer mehr und mehr den Umfängen der Grundflächen des Cylinders anschließen. Haben die letztern Umfänge Uebergänge aus concav in convex, so können die Seiten der Grundflächen der Prisma nicht mehr Sehnen allein, oder Tangenten allein sein.

Zusatz 2. Schneidet man einen Cylinder (dessen Grundflächen Kreise sind) durch eine mit der Axe parallele Ebene, so wird der Cylinder in zwei cylindrische Körper zerlegt, die Kreisabschnitte zu Grundflächen haben und Cylinder-Abschnitte genannt werden. Zwei durch die Axe gelegte Ebenen zerlegen den Cylinder in Cylinder-Ausschnitte, deren Grundflächen Kreisausschnitte sind. Auch den Inhalt eines Cylinder-Ausschnitts und Abschnitts findet man durch Multiplication der Grundfläche mit der Höhe. Man kann den Beweis zunächst für den Cylinder-Ausschnitt führen und wie oben bei der Inhaltsbestimmung des Cylinders verfahren. Der Cylinder-Abschnitt ergiebt sich durch Subtraction eines dreiseitigen Prismas vom Cylinder-Ausschnitt.

Zusatz 3. Man rechnet häufig die Cylinder auch zu den prismatischen Körpern. Bei beiden Körpern, dem Cylinder und dem Prisma, trifft als characteristisch zu, daß sie congruente parallele Durchschnittsfläche haben und ihr Inhalt gleich dem Product aus Grundfläche und Höhe ist. Allgemein kann man als Erklärung aufstellen: prismatische Körper entstehen, wenn eine beliebige begrenzte

Ebene so parallel im Raume fortbewegt wird, daß alle ihre Punkte gerade Linien durchlaufen.

§. 303.

Der Mantel des senkrechten Cylinders.

Der Radius der Grundfläche sei $= r$, die Höhe $= h$. Denkt man sich ein reguläres n-seitiges Prisma in den Cylinder eingeschrieben, und ein eben solches dem Cylinder umschrieben, und nennt man die Summe aller Seitenflächen den **Mantel** des **Prismas**, so ist (vergl. den Beweis §. 302.):

1) der Mantel des eingeschriebenen Prismas

$$= n . 2r \sin\frac{\pi}{n} \cdot h$$

$$= 2rh\left[\pi - \frac{\pi^3}{3!\,n^2} + \frac{\pi^5}{5!\,n^4} - + \ldots\right].$$

2) der Mantel des umschriebenen Prismas

$$= n . 2r \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \cdot h$$

$$= 2rh \cdot \frac{\pi - \frac{\pi^3}{3!\,n^2} + \frac{\pi^5}{5!\,n^4} - + \ldots}{1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^4 - + \ldots}.$$

Der Mantel des Cylinders liegt zwischen den Mänteln beider Prisma; und zwar nicht nur räumlich, sondern auch seiner Größe nach. Denn geht man vom regulären n-seitigen Prisma zu mehrseitigen durch fortwährende Verdoppelung der Seitenzahl (n) über, so wird der Mantel des eingeschriebenen Prismas nach und nach immer größer, der des umschriebenen immer kleiner (weil im senkrechten dreiseitigen Prisma die Summe zweier Seitenflächen größer als die dritte ist), während sich beide Mäntel immer enger und enger an den Cylinder-Mantel anschließen.

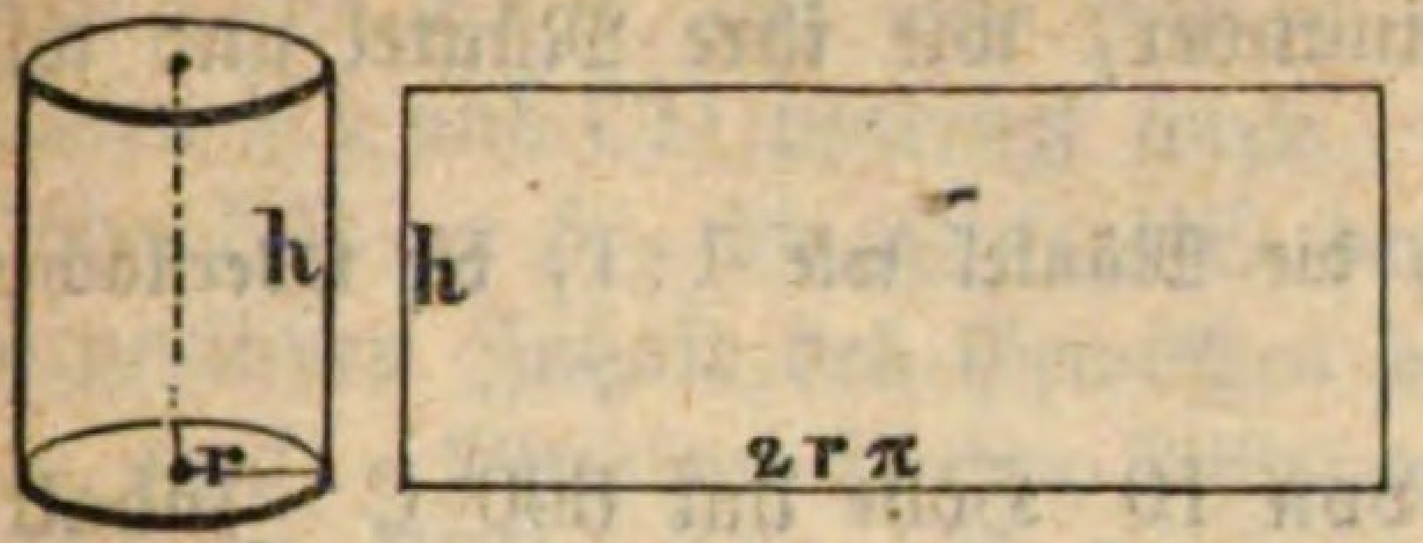
Hieraus folgt, daß der Cylinder-Mantel die gemeinschaftliche Grenze beider Prisma-Mäntel ist, für $n = \infty$. Setzt man aber in die in 1) und 2) gefundenen Ausdrücke $n = \infty$, so folgt $2rh . \pi$ als gemeinschaftliche Grenze. Daher ist

I. **Mantel des Cylinders** $= 2r\pi . h$.

II. **Oberfläche** $= 2r\pi . h + 2r^2 . \pi = 2r\pi . (h + r)$.

Um den Mantel zu finden, multiplicirt man also den Umfang der Grundfläche mit der Höhe.

Anm. 1. Denkt man sich den Mantel des Cylinders als eine den Cylinder umgebende unendlich dünne Hülle, trennt diese in einer Seite auf und denkt sich



dieselbe vom Cylinder abgewickelt und in eine Ebene gebreitet, so bildet der Mantel in dieser Ebene ein Rechteck mit den Seiten $2r\pi$ und h; daher ist sein Inhalt $= 2r\pi.h$. So prägt sich die Formel dem Gedächtniß leicht ein.

Anm. 2. Der Mantel des schiefen Cylinders ist elementar nicht zu berechnen.

§. 304.

Zwei senkrechte Cylinder heißen ähnlich, wenn die Radien der Grundflächen den Axen (Höhen) proportional sind. Bei schiefen Cylindern müssen auch noch die Axen gleiche Neigungswinkel mit den Grundflächen bilden. Aehnliche Cylinder verhalten sich zu einander, wie die Kuben ihrer Radien oder Axen. Bezeichnen K und K' die Cylinder, R und r die Radien, H und h die Axen und α ihren Neigungswinkel zur Grundfläche, so hat man:

$$K : K' = R^2\pi H.\sin\alpha : r^2\pi h.\sin\alpha$$
$$= R^2 H : r^2.h$$
$$= \frac{R^2}{r^2} : \frac{h}{H} = \frac{R^2}{r^2} : \frac{r}{R}$$
$$= R^3 : r^3 = H^3 : h^3.$$

Auch verhalten sich bei ähnlichen senkrechten Cylindern die Mäntel zu einander wie die zugehörigen Grundflächen; nämlich:

$$M : M' = 2R\pi.H : 2r\pi.h = RH : rh$$
$$= \frac{R}{r} : \frac{h}{H} = \frac{R}{r} : \frac{r}{R}$$
$$= R^2 : r^2 = R^2\pi : r^2\pi.$$

§. 305.

Uebungs-Aufgaben.

Vorbemerkung. Unter einem Cylinder soll jetzt und in der Folge immer der gemeine senkrechte Cylinder verstanden werden, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt wird.

Aufgabe 1. Der Radius eines Cylinders (d. h. seiner Grundfläche) sei 2', die Höhe 6'; wie groß sind Inhalt, Mantel und Oberfläche?

Antw. Inh. = 75,398 C'; Mant. = 75,398 □'; Oberfl. = 100,531 □'.

Aufgabe 2. Ein Rechteck mit den Seiten a und b macht zuerst um a, dann um b eine volle Umdrehung. Wie verhalten sich die

beiden entstandenen Cylinder zu einander, wie ihre Mäntel und wie ihre Oberflächen?

Antw. Die Cylinder wie b : a, die Mäntel wie 1 : 1, die Oberflächen wie b : a.

Aufgabe 3. Ein Cylinder von 10′ Höhe hat 600 C′ Inhalt; wie groß ist sein Mantel?

Antw. $20\sqrt{60\pi} = 274{,}5874\,\square'$.

Aufgabe 4. Ein Cylinder vom Inhalt a hat die Peripherie seiner Grundfläche zur Höhe; wie groß ist die Höhe?

Antw. $\sqrt[3]{4a\pi}$.

Aufgabe 5. Wie groß sind der Radius und die Höhe eines Cylinders vom Inhalt a, dessen Mantel der Summe seiner beiden Grundflächen gleich ist?

Antw. Radius und Höhe $= \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$.

Aufgabe 6. Ein Cylinder vom Radius r und der Höhe h ist durch einen Cylinder vom Radius ϱ und der Höhe h ausgehöhlt; wie groß ist die ganze Oberfläche dieses ausgehöhlten Körpers?

Antw. $2(r+\varrho)(r-\varrho+h)\pi$.

Aufgabe 7. Der Inhalt eines Cylinders ist 100 C′, sein Mantel $= 20\,\square'$; wie groß der Radius und die Höhe?

Antw. Radius = 10′; Höhe = 0,3183′.

Aufgabe 8. Die Peripherie der Grundfläche eines Cylinders ist = a, der Mantel $= b^2$; wie groß der Inhalt?

Antw. $\frac{ab^2}{4\pi}$.

Aufgabe 9. Der Inhalt eines Cylinders ist $= a^3$, die Grundfläche $= b^2$; wie groß der Mantel?

Antw. $\frac{2a^3\sqrt{\pi}}{b}$.

Aufgabe 10. Ein Cylinder vom Radius 10′ und der Höhe 20′ ist parallel seiner Axe durch eine Ebene so durchschnitten, daß der Inhalt der Durchschnittsebene $= 340\,\square'$ ist; wie groß ist der Inhalt des kleineren Cylinder-Abschnitts?

Antw. 1136,44 C′.



Aufgabe 11. Ein kreisförmiges Gewölbe ist 26′ lang, und ABCDEF ist seine auf der Länge senkrechte Durchschnittsebene, welche von den concentrischen Kreisbogen

ABC und FED und von den in einer Richtung liegenden geraden Linien FA und CD begrenzt wird. Es sei die Weite AC = 20′, die Höhe NB = 5′, die Dicke BE der Steinlage = 2′; man soll den körperlichen Inhalt des Gewölbes berechnen.

Aufl. Bezeichnet M den Mittelpunkt der Kreise, zu welchen die Bogen ABC und FED gehören, so findet man den Inhalt der Ebene ABCDEF, wenn man von dem Kreisausschnitte MFED den Kreisausschnitt MABC und die beiden Dreiecke MAF und MCD abzieht. Der Rest ist dann mit 26 zu multipliciren. Das gesuchte Volumen ist gleich 1377,99 C′.

Aufgabe 12. Ein Cylinder, dessen Höhe seinem Durchmesser gleich ist, hat mit einem Kubus gleichen Inhalt; wie verhalten sich die Oberflächen dieser Körper zu einander?

Antw. Umgekehrt wie ihre Höhen; oder auch: es verhält sich die Oberfläche des Cylinders zu der des Kubus, wie $\sqrt[3]{\pi}$ zu $\sqrt[3]{4}$. Dieses Verhältniß ist größer als das Verhältniß 11 : 12, aber kleiner als das Verhältniß 12 : 13.

Aufgabe 13. Wenn aber diese beiden Körper gleiche Oberflächen haben, wie verhalten sich ihre Inhalte zu einander?

Antw. Wie ihre Höhen; oder auch: es verhält sich der Inhalt des Cylinders zu dem des Kubus, wie 2 zu $\sqrt{\pi}$. Dieses Verhältniß ist kleiner als das Verhältniß 8 : 7, aber größer als das Verhältniß 9 : 8.

Aufgabe 14. Die Höhe eines Cylinders ist dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich; die Höhe eines zweiten Cylinders ist dem Radius seiner Grundfläche gleich. Wenn nun die beiden Körper gleiche Oberflächen haben: wie verhalten sich ihre Inhalte zu einander? und wenn sie gleiche Inhalte haben: wie verhalten sich dann ihre Oberflächen zu einander?

Antw. Im ersten Falle verhalten sich die Inhalte zu einander wie die Summen aus ihren Durchmessern und Höhen; im zweiten Falle verhalten sich ihre Oberflächen zu einander, umgekehrt wie diese Summen.

II. Von den Körpern mit veränderlichen parallelen Durchschnittsflächen.

§. 306.



Durchschneidet man einen Körper ABCD, der zwei parallele Grundflächen AB und CD und die Höhe h hat, in der Entfernung x von der einen Grundfläche AB durch eine mit AB parallele Ebene NM, deren Inhalt y sein mag, und ist y veränderlich, so daß im Allgemeinen zu verschiedenen Werthen von x auch verschiedene Werthe von y gehören: so

erkennen wir, daß der Körper nach einem bestimmten Gesetz gebildet ist, daran, daß y als Function von x sich ausdrücken läßt. Diese Function von x bestimmt dann die Durchschnittsfläche zu jedem Werthe von x, von x = 0 bis x = h. So unendlich viele verschiedene Functionen von x es giebt, so unendlich verschieden können also auch Körper gebildet sein. Elementar, d. h. durch die Gesetze der niederen Geometrie und der Arithmetik innerhalb der Grenze der niederen Analysis, läßt sich zwar nur eine beschränkte Anzahl von Körpern berechnen, allein diese Körper sind gerade für practische Anwendung besonders wichtig. Es sind dies diejenigen Körper, deren Durchschnittsfläche eine algebraische ganze Function von x ist, also die Form

$$y = a + bx + ex^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots + px^m$$

hat. Wir werden allerdings auch bei diesen Körpern, um mit voller mathematischer Strenge verfahren zu können, noch bestimmte beschränkende Nebenbedingungen machen; hieraus wird sich aber nur die Nothwendigkeit ergeben, das Stattfinden dieser Nebenbedingungen bei den einzelnen Körpern nachzuweisen.

In der Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots + px^m$$

bezeichnet x eine Linie; weil aber y eine Fläche ist, so muß die rechte Seite ein homogener Ausdruck vom zweiten Grade sein (§. 182.). Hieraus folgt, daß a ein Ausdruck der 2ten, b der 1ten, c der 0ten, d der —1ten, e der —2ten, endlich p der —(m — 2ten) Dimension sein muß. Bezeichnet also α eine abstracte Zahl und k eine Linie, so muß d die Form $\frac{\alpha}{k}$, e die Form $\frac{\alpha}{k^2}$ u. s. w., p die Form $\frac{\alpha}{k^{m-2}}$ haben.

Sind die bekannten Linien eines Körpers in bestimmten Zahlen gegeben, und ist y als Function von x entwickelt, so lassen die Coefficienten a, b, c, ... diese Eigenschaft nicht mehr erkennen. Hieraus entspringt aber die Nothwendigkeit, x immer in derselben Einheit auszudrücken, in welcher die gegebenen Linien bei der Herleitung der Function verstanden worden sind. Ist z. B. gefunden:

$$y = 2 + 3x + x^2$$

und hat man alle bekannten Linien durch Fuße ausgedrückt, so darf man, um beliebige Durchschnittsflächen zu berechnen, x immer nur in Fuße ausdrücken. Hat der Körper 10′ Höhe und bezeichnet x die Entfernung der Durchschnittsfläche y von der oberen Grundfläche, so ist diese Grundfläche = 2□′ (man setzt x = 0), die untere Grundfläche = $2 + 3 . 10 + 10^2 = 132$□′, die Durchschnittsfläche in der

Mitte $= 2 + 3 \cdot 5 + 5^2 = 42 \square'$ u. s. w. Will man die Durchschnittsfläche in der Entfernung 3″ von oben finden, so ist

$$y = 2 + 3 \cdot \frac{3}{12} + \left(\frac{3}{12}\right)^2 = 2\frac{13}{16} \square'.$$

Es ist also falsch, $x = 3$ zu setzen und das Resultat $y = 2 + 3 \cdot 3 + 3^2 = 20$ auf Quadratzoll als Einheit zu beziehen.

Für die folgenden Untersuchungen halte man fest: Ist

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + px^m$$

gegeben, so soll diese Gleichung für jeden Werth von x, von $x = 0$ bis $x = h$, gelten; daher ist durch die gegebene Function von x jede einzelne Durchschnittsfläche des Körpers bestimmt.

§. 307.

Lehrsatz.

Ist die den Grundflächen parallele Durchschnittsfläche y eines Körpers eine ganze algebraische Function vom mten Grade in Bezug auf ihren Abstand (x) von einer beliebigen den Grundflächen parallelen Ebene E, so ist sie auch in Bezug auf ihren Abstand von jeder anderen den Grundflächen parallelen Ebene, namentlich auch in Bezug auf ihren Abstand von einer der beiden Grundflächen selbst, eine ganze algebraische Function von demselben, also mten, Grade.

Bew. Die Höhe des Körpers möge, gehörig verlängert, die Ebene E in P schneiden. P habe von der oberen Grundfläche den Abstand α, und die Durchschnittsfläche y habe von P den Abstand x, von der oberen Grundfläche den Abstand z, und es sei



$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + px^m,$$

so ist $x = z + \alpha$, und substituirt man diesen Werth von x, so folgt:

$$y = a + b(z + \alpha) + c(z + \alpha)^2 + d(z + \alpha)^3 + \ldots + p(z + \alpha)^m.$$

Löst man nach dem Binomischen Lehrsatze die Klammern auf, so erhält man nur Glieder ohne z und Glieder mit ganzen positiven Potenzen von z; die höchste Potenz von z aber enthält das Glied pz^m, wodurch der Satz bewiesen ist. — Liegt P innerhalb des Körpers, so geht $z + \alpha$ in $z - \alpha$ oder in $\alpha - z$ über; sonst bleibt der Beweis unverändert. — Eben so wenig ändert sich der Beweis, wenn z den Abstand der Durchschnittsfläche y von einer beliebigen mit den Grundflächen parallelen Ebene bedeutet.

§. 308.

Methode der Inhaltsbestimmung der Körper mit veränderlichen Durchschnittsflächen.

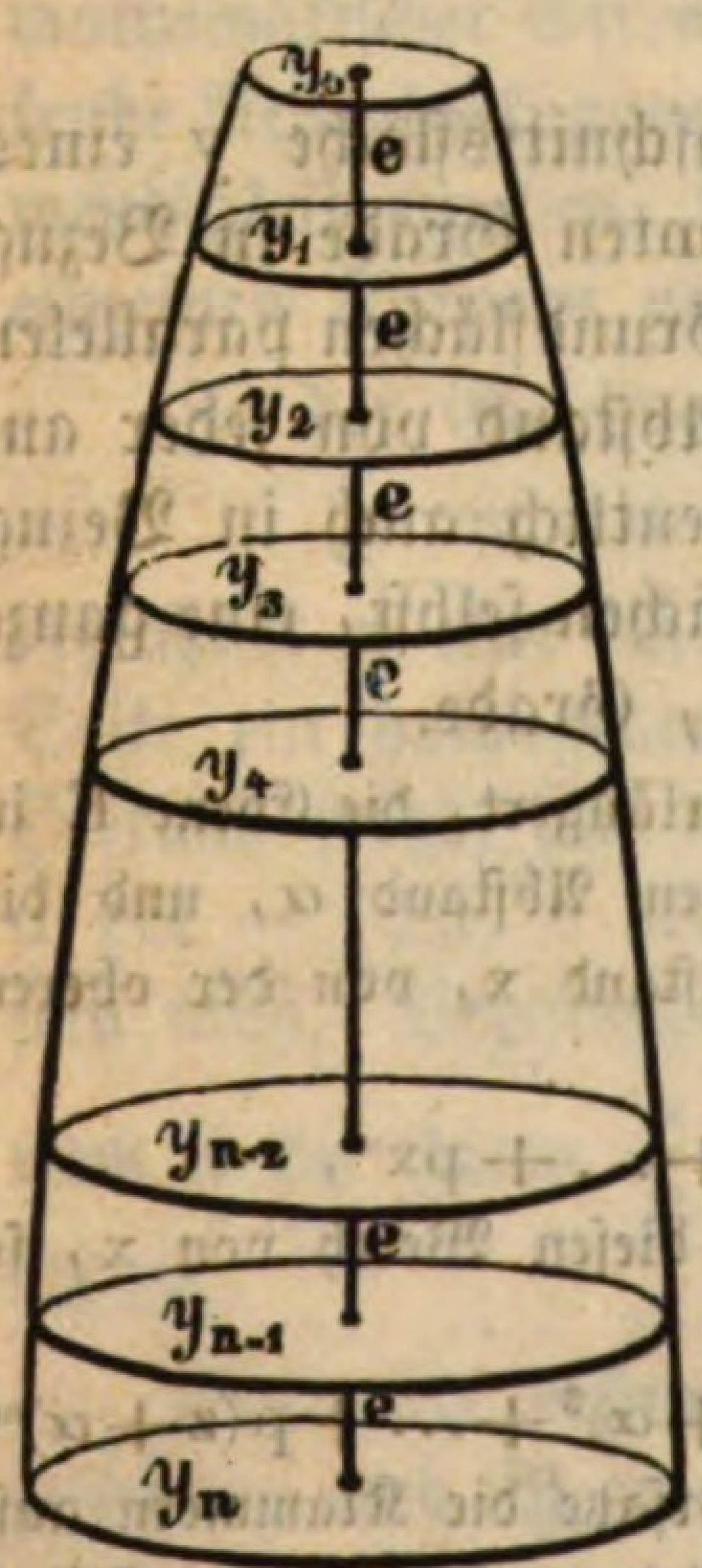
Denkt man sich die Höhe h eines Körpers in n gleiche Theile zerlegt, und nennt jeden Theil e, so daß

(1.) $h = n . e$

ist, und legt man durch jeden Theilpunkt eine mit den Grundflächen parallele Durchschnittsebene: so wird der Körper, dessen Inhalt durch K bezeichnet werden soll, in n Theile zerlegt, deren jeder die Höhe e hat. Die obere Grundfläche bezeichnen wir mit y_0, die erste, zweite, dritte, vierte u. s. w. Durchschnittsfläche mit y_1, y_2, y_3, y_4 ...., also die letzte Durchschnittsfläche mit y_{n-1} und die untere Grundfläche mit y_n.

Wir setzen nun Körper voraus, welche folgende Eigenschaft haben:

Schneidet man aus dem Körper durch zwei den Grundflächen parallele Ebenen, welche den beliebig kleinen Abstand e von einander haben, an ganz beliebiger Stelle ein Stück heraus, so soll sich nachweisen lassen, daß dieses Stück größer ist, als ein prismatischer Körper, welcher die eine (kleinere) seiner Grundflächen zur Grundfläche und e zur Höhe hat, zugleich aber auch kleiner, als ein prismatischer Körper, welcher die andere (größere) seiner Grundflächen zur Grundfläche und e zur Höhe hat.



Hieraus ergiebt sich von selbst eine zweite Eigenschaft solcher Körper: ihre Durchschnittsflächen müssen von der einen Grundfläche zur andern hin immer größer, in entgegengesetzter Richtung immer kleiner werden; wir wollen annehmen, von oben nach unten hin immer größer. (Vergl. die folgende Anmerkung.)

Bei dieser Voraussetzung ist es nun leicht, für den Inhalt K des Körpers, den die Figur zeigt, Grenzwerthe zu finden, zwischen denen er liegen muß. Berechnet man jeden Theil von der Höhe e, indem man immer die obere Grundfläche mit e multiplicirt, so ist die Summe aller Theile kleiner als K; nimmt man aber zur Berechnung der Theile immer die untere Grundfläche, so ist die Summe größer als K. Es ist also

$$K > y_0 e + y_1 e + y_2 e + y_3 e + \ldots\ldots + y_{n-2} e + y_{n-1} e$$
$$K < y_1 e + y_2 e + y_3 e + y_4 e + \ldots\ldots + y_{n-1} e + y_n e.$$

Sondert man e ab, so folgt:

(2.) $K > e[y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_{n-2} + y_{n-1}]$

(3.) $K < e[y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots + y_{n-1} + y_n]$.

Zieht man aber die beiden Ausdrücke rechts von einander ab, so ist

(4.) Die Differenz der Grenzen $= e[y_n - y_0]$

d. h. die Differenz ist einem Prisma gleich, welches die Differenz der Grundflächen des Körpers zur Grundfläche und e zur Höhe hat.

Das Product $e[y_n - y_0]$ hat aber den constanten Factor $y_n - y_0$, während der andere Factor e beliebig klein gemacht und der Null so nahe, wie man nur will, gebracht werden kann [folgt aus (1.), wenn man n immer größer wählt]. Hieraus folgt, daß die beiden Ausdrücke in (2.) und (3.) für ein unendlich kleines e denselben Werth haben und, weil K zwischen ihnen liegt, daß K selbst dieser Werth ist.

Die Methode zur Berechnung von K ist also folgende: Man theile die Höhe h in n gleiche Theile, lege durch jeden Theilpunkt eine mit den Grundflächen parallele Ebene und berechne einen der beiden Grenzwerthe von K in (2.) oder (3.). Wir werden in der Folge immer den Ausdruck in (3.)

$$e[y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots + y_{n-1} + y_n]$$

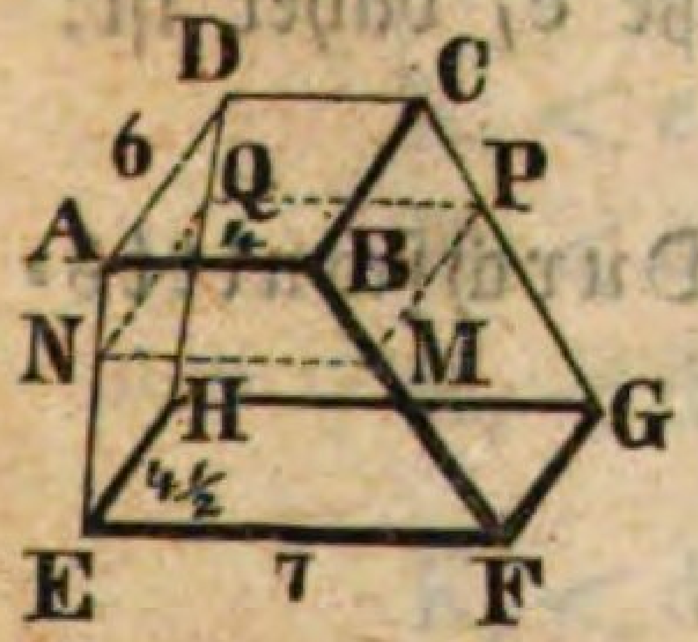
berechnen. Der so gefundene Werth weicht von K noch nicht um die Größe $e[y_n - y_0]$ ab, und diese Abweichung wird um so geringer, je kleiner e ist. Kann man also den Werth finden, in welchen

$$e[y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots + y_{n-1} + y_n]$$

für ein verschwindendes e übergeht, so ist dieser Werth $= K$.

Beide Grenzwerthe von K in (2.) und (3.) würde man nur dann berechnen müssen, und zwar für ein endliches n und e, wenn man nicht im Stande wäre, einen dieser Grenzwerthe für ein unendlich kleines e zu ermitteln. Man würde dann K nur so weit genau erhalten, als beide Grenzwerthe übereinstimmen. — Die Schwierigkeit der Berechnung ist hiernach eine rein arithmetische, und daher kommt es eben, daß die niedere Analysis die Berechnung nur für eine beschränkte Anzahl von Körpern gestattet; die höhere Analysis lehrt auf einem ähnlichen Wege den Inhalt aller Körper finden.

Anm. Der Leser sei darauf aufmerksam gemacht, daß aus der oben angegebenen zweiten Eigenschaft nicht ohne Weiteres die erste folgt. Es mögen



ABCD und EFGH zwei parallele Rechtecke im Raume sein; auch sei AB ∦ EF und AD ∦ EH, woraus die Parallelität der andern Seitenpaare folgt. Legt man nun durch AB und EF, durch BC und FG, durch CD und GH, durch AD und EH eine Ebene, so entsteht ein Körper, der im Allgemeinen ein Obelisk heißt. Es sei $AB = 4'$, $AD = 6'$, $EF = 7'$ und $EH = 4\frac{1}{2}'$; die Höhe des Körpers sei 5'. Bei diesem Körper läßt sich weder durch die bisher bewiesenen Gesetze, noch durch unmittelbare Construction nachweisen, daß er, oder ein durch parallele Durchschnittsflächen herausgeschnittener Theil des-

selben zwischen den prismatischen Körpern liegt, welche die resp. Grundflächen des Körpers oder des Theils zu Grundflächen und die entsprechende Höhe haben: und doch nehmen die Durchschnittsflächen von oben nach unten fortwährend zu. Durchschneidet man nämlich den Körper parallel den Grundflächen in der Entfernung x von oben, so ist die Durchschnittsfigur NMPQ ein Rechteck, und aus §. 189., I. in Verbindung mit §. 270. Nr. 2. folgt:

$$NM = 4 + \frac{7-4}{5}x = 4 + \frac{3}{5}x$$

$$NQ = 6 + \frac{4\frac{1}{2}-6}{5}x = 6 - \frac{3}{10}x.$$

Bezeichnen wir die Durchschnittsfläche mit φx, so ist

$$\varphi x = 24 + \frac{12}{5}x - \frac{9}{50}x^2, \text{ folglich}$$

$$\varphi' x = \frac{12}{5} - \frac{9}{25}x.$$

Da $\varphi' x$ für jeden Werth von x zwischen den Grenzen 0 und 5 positiv ist, so wächst die Durchschnittsfläche von oben nach unten ohne Unterbrechung (Arithm. §. 200. II.).

§. 309.

Inhaltsbestimmung der Körper, deren Durchschnittsflächen rationale ganze Functionen ihres Abstandes von einer Grundfläche sind.

Alle Durchschnittsflächen den Grundflächen parallel vorausgesetzt, so habe

der Körper K_1 die Durchschnittsfläche $y = bx$
» » K_2 » » $y = cx^2$
» » K_3 » » $y = dx^3$, u. s. w.
» » K_m » » $y = px^m$

Alle diese Körper haben die zweite in §. 308. angegebene Eigenschaft; wir berechnen ihre Inhalte unter der Voraussetzung, daß sie auch die erste haben, werden die Resultate also auch nur in diesem Falle anwenden. Jeder dieser Körper habe die Höhe h, und diese Höhe sei in n gleiche Theile getheilt; jeder Theil heiße e; daher ist:

$$h = ne.$$

1) Berechnung des Körpers K_1 mit der Durchschnittsfläche

$$y = bx.$$

Aus §. 308. (3.) folgt:

$$K_1 < e[y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots + y_n].$$

Aus $y = bx$ folgt aber jede Durchschnittsfläche, wenn man x resp. gleich e, 2e, 3e, u. s. w. setzt; daher ist

$$K_1 < e[be + b.2e + b.3e + b.4e + \ldots\ldots + b.ne]$$
$$K_1 < be^2[1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n]$$
$$K_1 < b.e^2 \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n \text{ (Arithm. §. 184, II.)}$$
$$K_1 < \tfrac{1}{2}b(e + ne).ne.$$

Weil aber $ne = h$ ist, so folgt

$$K_1 < \tfrac{1}{2}bh(h + e).$$

Setzt man nun für e immer kleinere und kleinere Werthe und geht zur Grenze $e = 0$ über, so folgt:

$$\text{I.} \quad K_1 = \tfrac{1}{2}bh^2.$$

Berechnet man K aus (2.) in §. 308., so erhält man $K > \frac{1}{2}bh(h-e)$; geht man zur Grenze $e = 0$ über, so entsteht wie oben: $K = \frac{1}{2}bh^2$. Die weitere Ausführung hier und in den folgenden Fällen sei dem Leser überlassen; bei allen angeführten Körpern ist $y_0 = 0$.

2) Berechnung des Körpers K_2 mit der Durchschnittsfläche

$$y = cx^2.$$
$$K_2 < e[y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots + y_n].$$

Hieraus folgt wie in 1):

$$K_2 < e[c.e^2 + c(2e)^2 + c(3e)^2 + c(4e)^2 + \ldots\ldots + c(ne)^2]$$
$$K_2 < c.e^3[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + n^2]$$
$$K_2 < c.e^3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (Arithm. §. 186. Beisp. 7.)}$$
$$K_2 < \tfrac{1}{6}c.ne(ne + e)(2ne + e)$$
$$K_2 < \tfrac{1}{6}c.h(h + e)(2h + e).$$

Geht man zur Grenze $e = 0$ über, so folgt:

$$\text{II.} \quad K_2 = \tfrac{1}{3}ch^3.$$

3) Berechnung des Körpers K_3 mit der Durchschnittsfläche

$$y = dx^3.$$
$$K_3 < e[y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots + y_n]$$
$$K_3 < e[de^3 + d(2e)^3 + d(3e)^3 + d(4e)^3 + \ldots\ldots + d(ne)^3]$$
$$K_3 < de^4[1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + n^3]$$
$$K_3 < de^4 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ (Arithm. §. 186. Beisp. 9.)}$$
$$K_3 < \tfrac{1}{4}d(ne)^2(ne + e)^2$$
$$K_3 < \tfrac{1}{4}dh^2(h + e)^2.$$

Geht man zur Grenze $e = 0$ über, so folgt:

$$\text{III.} \quad K_3 = \tfrac{1}{4} d h^4.$$

4) Berechnung des Körpers K_m mit der Durchschnittsfläche:

$$y = px^m$$

$$K_m < e[y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots + y_n]$$

$$K_m < e[pe^m + p(2e)^m + p(3e)^m + p(4e)^m + \ldots\ldots + p(ne)^m]$$

$$K_m < pe^{m+1}[1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \ldots\ldots + n^m].$$

Es kommt jetzt darauf an, die Summe der ersten n Glieder der Reihe:

$$1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \ldots\ldots$$

zu berechnen. Das allgemeine, xte Glied dieser Reihe ist x^m; folglich ist die Reihe eine höhere arithmetische Progression vom mten Grade, und jedes Glied der mten Differenzen-Reihe ist $= m!$ (Arithm. §. 188. I.). Die Glieder der vorhergehenden Differenzen-Reihen werden wir auf die bekannte Art bezeichnen; es geht aus der weiteren Rechnung hervor, daß man sie gar nicht zu kennen braucht, und daß es genügt, zu wissen: sie sind bestimmte von n und e unabhängige Zahlen. Durch Anwendung der Summenformel (Arithm. §. 186. II.) erhält man:

$$K_m < pe^{m+1}[n.1 + n_2 \Delta^1 y_1 + n_3 \Delta^2 y_1 + \ldots + n_m \Delta^{m-1} y_1 + n_{m+1} . m!].$$

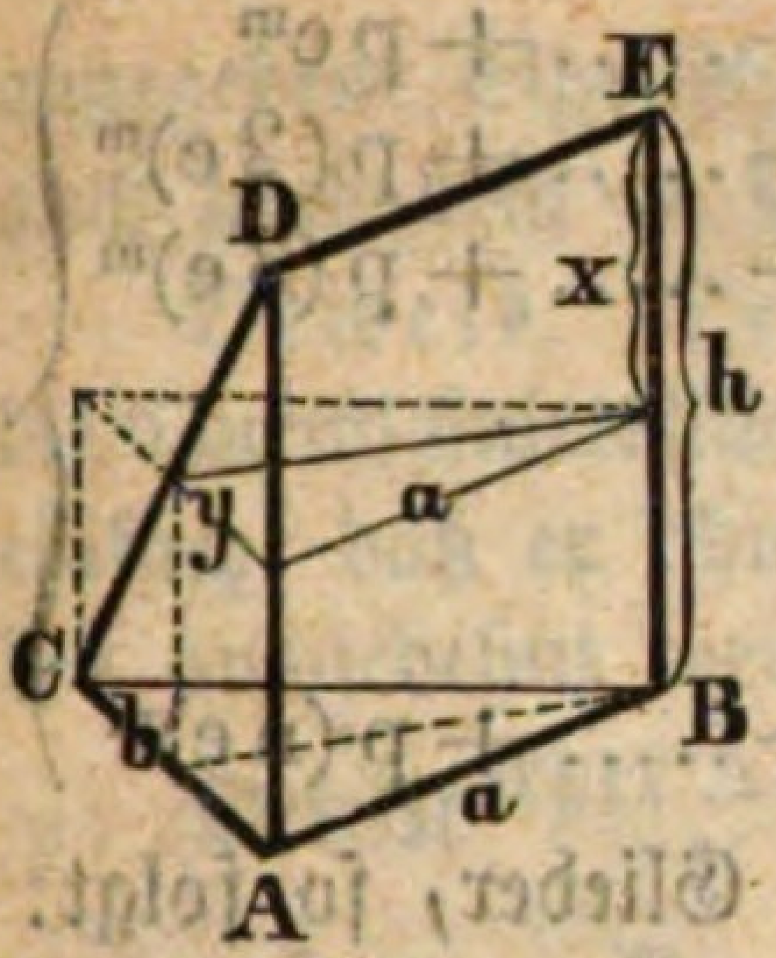
Multiplicirt man nun jedes Glied in der Klammer mit e^{m+1}, setzt für die Binomial-Coefficienten die entsprechenden Brüche und bedenkt, daß nur der letzte Binomial-Coefficient (n_{m+1}) im Zähler $m + 1$ Factoren hat, alle anderen aber weniger haben, und daß $ne = h$ ist, so folgt:

$$K_m < p\Big[h e^m + \frac{h(h-e)}{1.\ 2} e^{m-1}.\Delta^1 y_1 + \frac{h(h-e)(h-2e)}{1.\ 2.\ 3} e^{m-2} \Delta^2 y_1$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{h(h-e)(h-2e)\ldots\ldots(h-(m-1)e)}{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m} e \Delta^{m-1} y_1$$
$$+ \frac{h(h-e)(h-2e)(h-3e)\ldots\ldots\ldots(h-me)}{(m+1)!} m!\Big].$$

Geht man nun zur Grenze über, setzt also $e = 0$, so fallen in den großen Klammern alle Glieder bis auf das letzte fort, und man erhält:

$$K_m = p \cdot \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \cdot m! = p \cdot \frac{h^{m+1}}{m+1}.$$

$$\text{IV.} \quad K_m = \frac{1}{m+1} p . h^{m+1}.$$



Beisp. Der Körper ABCDE wird begrenzt durch das rechtwinklige horizontale Dreieck ABC, dessen Katheten AB = a, AC = b sind; ferner durch das verticale Rechteck ABED, durch das verticale Dreieck DAC und und durch die windschiefe Fläche BCDE, welche so construirt ist, daß jede horizontale Durchschnittsebene sie in einer geraden Linie schneidet. Es sei BE = AD = h; wie groß ist der Inhalt des Körpers ABCDE?

Aufl. In der Entfernung x von DE lege man durch den Körper eine mit ABC parallele Ebene, so ist die entstandene Durchschnittsfläche ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete a ist; die andere werde durch y bezeichnet. Dann verhält sich

$$x : y = h : b; \text{ folglich } y = \frac{b}{h} x.$$

Hieraus ergiebt sich die Durchschnittsfläche $= \frac{ab}{2h} x$, also eine Function des ersten Grades. Aus dieser Durchschnittsfläche (oder unmittelbar aus der Figur) erkennt man, daß der Körper die im §. 308. angegebene zweite Eigenschaft hat; daß er auch die erste hat, ergiebt sich leicht durch die in der Figur durch punktirte Linien angedeuteten Prisma, welche man eben so für jedes beliebige durch horizontale Ebenen herausgeschnittene Stück construiren kann. Da der Körper die Höhe h hat, so folgt aus der Durchschnittsfläche sein Inhalt $= \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{2h} \cdot h^2 = \frac{1}{4} abh.$

§. 310.

Lehrsatz.

Hat ein Körper von der Höhe h in der beliebigen Entfernung x von der einen Grundfläche die mit den Grundflächen parallele Durchschnittsfläche

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots + px^m,$$

und hat er die in §. 308. angegebene Eigenschaft, so ist sein Inhalt:

$$K = ah + \tfrac{1}{2} bh^2 + \tfrac{1}{3} ch^3 + \tfrac{1}{4} dh^4 + \ldots\ldots + \frac{1}{m+1} ph^{m+1},$$

wobei a, b, c, u. s. w. auch beliebig negativ und Null sein können.

Beweis. Der Beweis folgt aus §. 309. Es ist nach §. 308. (3.):

$$K < e[y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots + y_n].$$

Die Durchschnittsflächen $y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots\ldots$ erhält man aus der Voraussetzung, wenn man statt x resp. e, 2e, 3e, 4e ..... setzt.

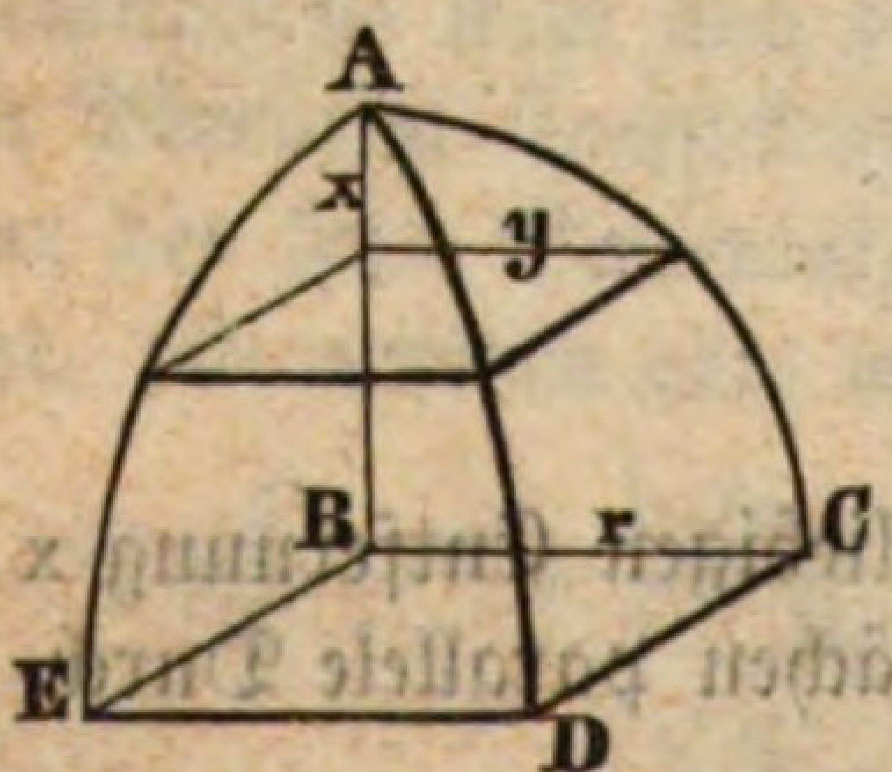
$$K < e \cdot \left\{ \begin{array}{l} a + be + ce^2 + de^3 + \ldots\ldots + pe^m \\ + a + b(2e) + c(2e)^2 + d(2e)^3 + \ldots\ldots + p(2e)^m \\ + a + b(3e) + c(3e)^2 + d(3e)^3 + \ldots\ldots + p(3e)^m \\ \quad + \\ \quad \vdots \\ + a + b(ne) + c(ne)^2 + d(ne)^3 + \ldots\ldots + p(ne)^m \end{array} \right\}.$$

Addirt man die vertical unter einander stehenden Glieder, so folgt:

$$K < \left\{ \begin{array}{l} e.na \\ + be^2.(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n) \\ + ce^3.(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2) \\ + de^4.(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^3) \\ \quad \vdots \\ + pe^{m+1}(1^m + 2^m + 3^m + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^m) \end{array} \right.$$

Setzt man $e.na = a(ne) = ah$ und für die Ausdrücke in den folgenden Zeilen die in §. 309. gefundenen Werthe, und geht man dann zur Grenze $e = 0$ über: so folgt die Richtigkeit der Behauptung.

Beisp. Der Körper ABCDE wird begrenzt durch das horizontale Quadrat BCDE und durch den verticalen Quadranten ABC; jede auf AB senkrechte (also horizontale) Durchschnittsfläche sei ein Quadrat; wie groß ist der Inhalt K des Körpers, wenn $BC = BA = r$ ist?



Auflösung. Die Durchschnittsfläche in der Entfernung x von A habe die Seite y, so ist

$y^2 + (r - x)^2 = r^2$, woraus folgt:

$y^2 = 2rx - x^2$.

Daß der Körper die Eigenschaft in §. 308. hat, ist leicht zu beweisen und sei dem Leser überlassen. Da y^2 die Durchschnittsfläche ist, der Körper aber die Höhe r hat, so folgt sein Inhalt

$$K = \tfrac{1}{2}.2r.r^2 - \tfrac{1}{3}r^3 = \tfrac{2}{3}r^3.$$

§. 311.

Lehrsatz.

Wenn die mit den Grundflächen parallele Durchschnittsfläche

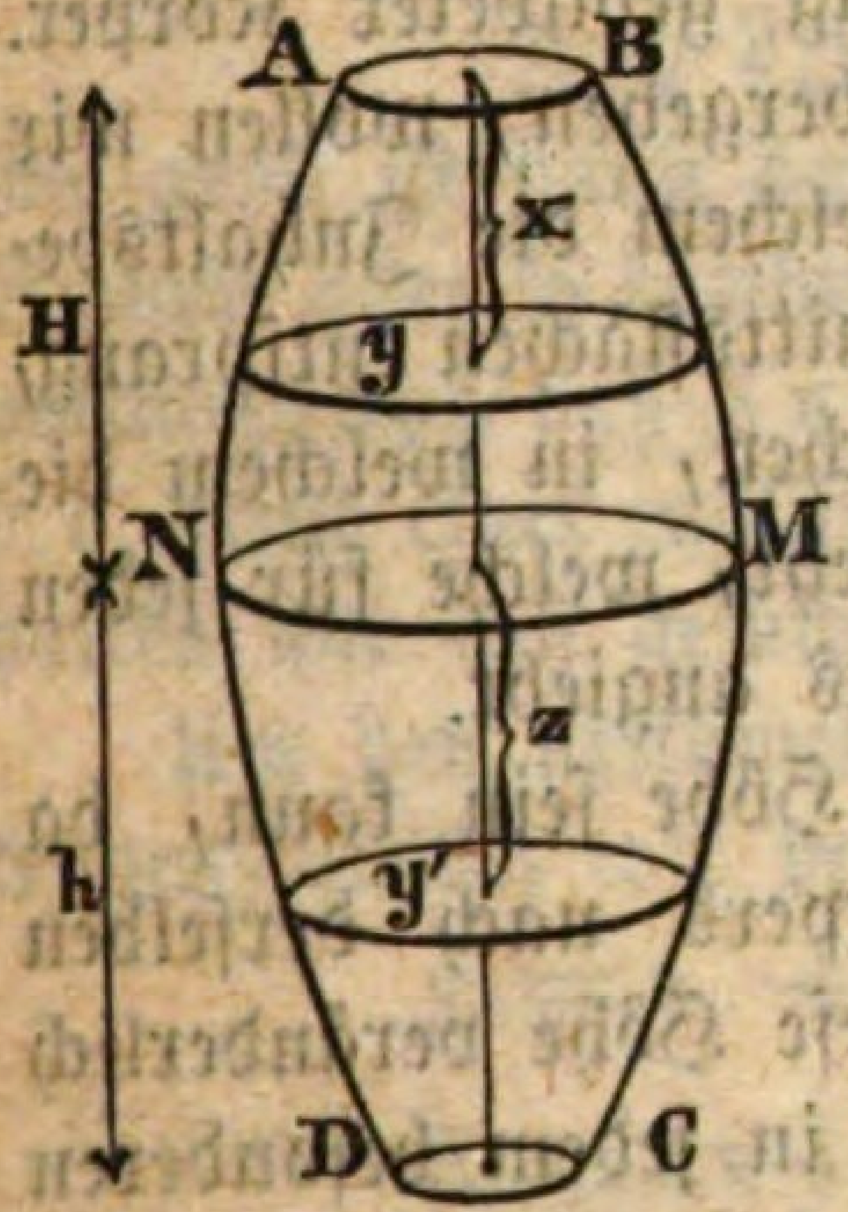
$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots + px^m$$

eines Körpers, während x von Null bis zur ganzen Höhe des Körpers wächst, nicht im fortwährenden Wachsen oder Fallen bleibt, sondern an bestimmten Stellen Uebergänge aus Wachsen in Fallen oder umgekehrt hat, wenn aber die einzelnen Theile des Körpers, in welchen die Durchschnittsflächen nur wachsen oder nur fallen, die in §. 308.

angegebene Eigenschaft haben: so ist der Inhalt des ganzen Körpers auch nach dem in §. 310. angegebenen Gesetze zu berechnen.

Beweis. Der Beweis soll für den Fall geführt werden, daß die Durchschnittsfläche eine Function des dritten Grades ist; er ist so einfach, daß er ohne Weiteres auf jede Function eines höheren Grades ausgedehnt werden kann.

Der Körper ABCD bestehe aus den beiden Theilen ABMN mit der Höhe H, und NMCD mit der Höhe h; die Durchschnittsflächen des oberen Theils wachsen von oben nach unten, die des unteren fallen; jeder Theil erfülle die Bedingung in §. 308. Es sei ferner jede Durchschnittsfläche



$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

für jeden Werth von x, von $x = 0$ bis $x = H + h$, so heißt die Behauptung:

$$K = a(H+h) + \tfrac{1}{2}b(H+h)^2 + \tfrac{1}{3}c(H+h)^3 + \tfrac{1}{4}d(H+h)^4$$

Zum Beweise berechne man jeden einzelnen Theil nach §. 310. und addire die Inhalte. Der obere Theil K_1 ist unmittelbar zu finden:

$$K_1 = aH + \tfrac{1}{2}bH^2 + \tfrac{1}{3}cH^3 + \tfrac{1}{4}dH^4.$$

Um den unteren Theil K_2 zu berechnen, muß man zunächst seine Durchschnittsfläche y' als Function ihres Abstandes z von NM ausdrücken. Nach der Voraussetzung ist:

$$y' = a + b(H + z) + c(H + z)^2 + d(H + z)^3.$$

Ordnet man nach den Potenzen von z, so entsteht:

$$y' = (a + bH + cH^2 + dH^3) + (b + 2cH + 3dH^2)z$$
$$+ (c + 3dH)z^2 + dz^3.$$

Hieraus folgt der Inhalt des Körpers NMCD:

$$K_2 = (a + bH + cH^2 + dH^3)h + \tfrac{1}{2}(b + 2cH + 3dH^2)h^2$$
$$+ \tfrac{1}{3}(c + 3dH)h^3 + \tfrac{1}{4}dh^4.$$

Addirt man K_1 und K_2 und ordnet die Summe nach den Coefficienten a, b, c, d, so folgt:

$$K = (H+h)a + (\tfrac{1}{2}H^2 + Hh + \tfrac{1}{2}h^2)b + (\tfrac{1}{3}H^3 + H^2h + Hh^2 + \tfrac{1}{3}h^3)c$$
$$+ (\tfrac{1}{4}H^4 + H^3h + \tfrac{3}{2}H^2h^2 + Hh^3 + \tfrac{1}{4}h^4)d,$$

oder

$$K = a(H + h) + \tfrac{1}{2}b(H + h)^2 + \tfrac{1}{3}c(H + h)^3 + \tfrac{1}{4}d(H + h)^4,$$

was zu beweisen war. Aus diesem Beweise ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit des Satzes, wenn die Durchschnittsflächen mehrere Uebergänge aus Wachsen in Fallen und umgekehrt haben. Denkt man sich den Körper nach unten hin verlängert, und wachsen die Durch-

schnittsflächen von CD an wieder: so bezeichne man mit H die ganze Höhe des Körpers ABCD, die Höhe des angesetzten Theils mit h, und wiederhole den vorstehenden Beweis.

§. 312.

Anmerkung.

Die in den vorhergehenden §§. entwickelte Formel gestattet die Berechnung sehr vieler und sehr verschiedenartig gebildeter Körper. Ehe wir aber zu Anwendungen dieser Formel übergehen, wollen wir noch einmal das Princip hervorheben, aus welchem die Inhaltsbestimmung der Körper mit veränderlichen Durchschnittsflächen entsprang, und den arithmetischen Zusammenhang untersuchen, in welchem die gefundene Formel mit der gegebenen Function steht, welche für jeden Werth von x die Durchschnittsfläche des Körpers angiebt.

Da die Höhe h des Körpers jede beliebige Höhe sein kann, da man also auch einen beliebigen Theil des Körpers nach derselben Formel berechnen kann, so können wir uns diese Höhe veränderlich denken und durch x bezeichnen und müssen nur in jedem besonderen Falle für x die diesem Falle entsprechende Höhe setzen. Der Inhalt K des Körpers ist dann eine Function von x und giebt zu jedem Werthe von x den Inhalt des zugehörigen Körpers an, d. h. des Körpers, der zwischen der Grundfläche, die durch den einen Endpunkt von x geht, und der Durchschnittsfläche, die durch den andern Endpunkt von x geht, liegt. — Wir theilten nun die Höhe x in n gleiche Theile, nannten jeden Theil e und fanden, daß der Inhalt des Körpers zwischen folgenden Grenzen liegt:

$$K > (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_{n-1}) \cdot e$$

und $$K < (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots + y_n) \cdot e.$$

Die beiden Grenzen für K näherten sich für ein immer kleiner werdendes e dem gesuchten Inhalte K und gingen beide für ein unendlich kleines e in K über. Bezeichnen wir das unendlich kleine e durch Δx, so ist der gesuchte Inhalt

$$K = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots + y_n) \cdot \Delta x,$$

d. h. der Inhalt des Körpers ist die Summe aller unendlich nahe an einander liegenden, mit den Grundflächen parallelen Durchschnittsflächen, welche zwischen beiden Grundflächen liegen, oder welche, wie man gewöhnlich sagt, zwischen den Grenzen von x = 0 bis x = x liegen, multiplicirt mit dem unendlich kleinen Abstand Δx jeder Durchschnittsfläche von der nächsten. Man schreibt diese Regel so:

$$K = \Sigma_0^x (y \cdot \Delta x).$$

Ist die Höhe eine bestimmte, etwa gleich h, so setzt man h an die Stelle von x und schreibt:

$$K = \Sigma_0^h (y \cdot \Delta x).$$

Die weitere Berechnung des Inhaltes K führte zu einer rein arithmetischen Frage, nämlich zu folgender: Wenn

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots + px^m$$

ist, und man setzt statt x nach der Reihe

$$\Delta x,\ 2\Delta x,\ 3\Delta x,\ 4\Delta x,\ \ldots\ldots \text{ bis } n\Delta x:$$

wie groß ist dann das Product, welches man erhält, wenn man die Summe aller so entstandenen Werthe für y noch mit Δx multiplicirt, vorausgesetzt, daß Δx unendlich klein, n unendlich groß, aber $n \cdot \Delta x = x$, d. h. gleich einer endlichen Zahl ist? In der Beantwortung dieser Frage hatten wir den gesuchten Werth von K.

Um den arithmetischen Zusammenhang zwischen y und K zu erkennen, stellen wir beide Functionen von x neben einander:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots + px^m$$

$$K = ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^4}{4} + \ldots\ldots + p\frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Leicht ist das Gesetz zu erkennen, nach welchem K aus y entspringt: man läßt den Coefficienten jedes Gliedes unverändert, vermehrt aber den Exponenten von x um 1 und dividirt noch diese neue Potenz von x durch ihren Exponenten.

Untersucht man aber, wie y aus K sich bilden läßt, so findet man: y ist die Ableitung von K, d. h. K (der Körper) ist diejenige Function von x, deren Ableitung gleich y (gleich der Durchschnittsfläche) ist. Man kann entsprechend K die Rückleitung der Function y nennen (in der höheren Analysis: das Integral der Function).

Die hier entwickelten Ansichten bilden auch in der höhern Analysis die Grundlage aller Körperberechnung.

§. 313.

Die Simpsonsche Regel.

Hat ein Körper die in §. 308., oder die in §. 311. angegebene Eigenschaft, und ist seine den Grundflächen parallele Durchschnittsfläche y eine algebraische ganze Function ihres Abstandes x von einer Grundfläche, welche den dritten Grad nicht übersteigt (oder auch noch nicht erreicht): so läßt sich, wenn die Durchschnittsfläche in der Entfernung der halben Höhe von einer Grundfläche seine Mittelfläche genannt wird, sein Inhalt nach folgender Regel berechnen:

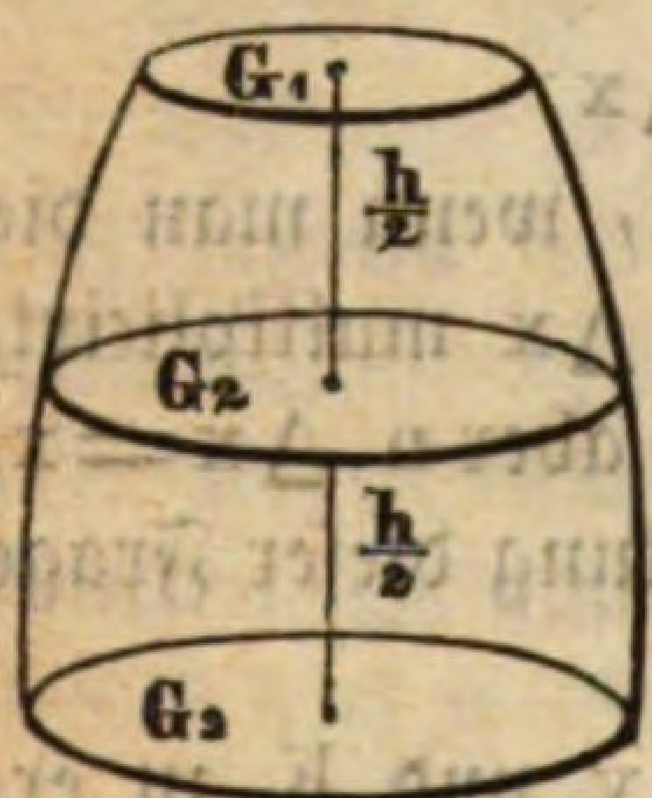
Man addire seine beiden Grundflächen zu der vierfachen Mittelfläche und multiplicire den sechsten Theil dieser Summe mit der Höhe.

Bezeichnen G_1 und G_3 die beiden Grundflächen, G_2 die Mittelfläche und h die Höhe, so ist bei der Voraussetzung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

der Inhalt des Körpers:

$$K = \frac{G_1 + 4G_2 + G_3}{6} \cdot h.$$



Beweis. Aus der Durchschnittsfläche

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

findet man G_1, G_2 und G_3, wenn man statt x resp. 0, $\frac{h}{2}$ und h setzt.

So entsteht:

$$G_1 = a$$

$$4.G_2 = 4a + 2bh + ch^2 + \tfrac{1}{2}dh^3$$

$$G_3 = a + bh + ch^2 + dh^3; \text{ folglich:}$$

$$G_1 + 4G_2 + G_3 = 6a + 3bh + 2ch^2 + \tfrac{3}{2}dh^3.$$

Multiplicirt man beide Seiten mit $\frac{1}{6}h$, so folgt:

$$\frac{G_1 + 4G_2 + G_3}{6}h = ah + \tfrac{1}{2}bh^2 + \tfrac{1}{3}ch^3 + \tfrac{1}{4}dh^4.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber nach §. 310., resp. §. 311., der Inhalt K des Körpers, woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt.

§. 314.

Erklärung. Zusätze.

1) Jeder Körper, dessen Inhalt nach der Simpsonschen Regel sich genau berechnen läßt, soll ein Simpsonscher Körper genannt werden.

2) Läßt sich ein Körper in Theile zerlegen, von denen jeder einzelne die Höhe des ganzen Körpers zur Höhe hat, ist jede Grundfläche des Körpers gleich der Summe oder Differenz der resp. Grundfläche der Theile, gilt dies auch für jede beliebige Durchschnittsfläche, und ist endlich jeder einzelne Theil ein Simpsonscher Körper: so ist auch der ganze Körper ein solcher.

Bew. Bezeichnen A, B und M resp. die Grundflächen und die Mittelfläche des Körpers K, h aber seine Höhe, und sind A_1, A_2, A_3 ....., so wie B_1, B_2, B_3 ..... die resp. Grundflächen der Theile, M_1, M_2, M_3 ..... aber ihre Mittelflächen, so ist

$$K = \frac{A_1 + 4M_1 + B_1}{6}h + \frac{A_2 + 4M_2 + B_2}{6}h + \frac{A_3 + 4M_3 + B_3}{6}h + \ldots.$$

$$K = \frac{h}{6}[(A_1+A_2+A_3+\ldots)+4(M_1+M_2+M_3+\ldots)+(B_1+B_2+B_3+\ldots)].$$

Hieraus folgt nach der Voraussetzung:

$$K = \frac{h}{6}(A+4M+B).$$

3) Haben zwei Körper K und K′ gleiche Höhen (h), und durchschneidet man jeden Körper in derselben Entfernung x von einer seiner Grundflächen parallel den Grundflächen durch eine Ebene, und ist die Durchschnittsfläche des Körpers K′ das m-fache der Durchschnittsfläche des Körpers K, und zwar für jeden Werth von x, von $x = 0$ bis $x = h$, erfüllen endlich beide Körper die Bedingung in §. 308.: so ist auch der Inhalt des Körpers K′ das m-fache des Inhalts des Körpers K. Es kann hierbei beliebig $m \gtreqless 1$ sein.

Bew. Bei derselben Bezeichnung wie in §. 308. hat man für K die Grenzen:

$$K > e[y_0+y_1+y_2+\ldots\ldots+y_{n-1}] \text{ und}$$
$$K < e[y_1+y_2+y_3+\ldots\ldots+y_n].$$

Nach der Voraussetzung liegt sonach K′ zwischen folgenden Grenzen:

$$K' > e[my_0+my_1+my_2+\ldots\ldots+my_{n-1}] \text{ und}$$
$$K' < e[my_1+my_2+my_3+\ldots\ldots+my_n].$$

Bezeichnet man $y_0+y_1+y_2+\ldots\ldots+y_{n-1}$ durch S und $y_1+y_2+y_3+\ldots\ldots+y_n$ durch S′, so ist

$$K\begin{Bmatrix} > eS \\ < eS' \end{Bmatrix} \text{ und } K'\begin{Bmatrix} > m\,.\,eS \\ < m\,.\,eS' \end{Bmatrix}.$$

Für ein verschwindendes e gehen aber eS und eS′ in denselben Werth über, nämlich in den Inhalt des Körpers K, und weil m constant ist, müssen m . eS und m . eS′ in das m-fache dieses Werthes übergehen; d. h. K′ muß gleich m . K sein.

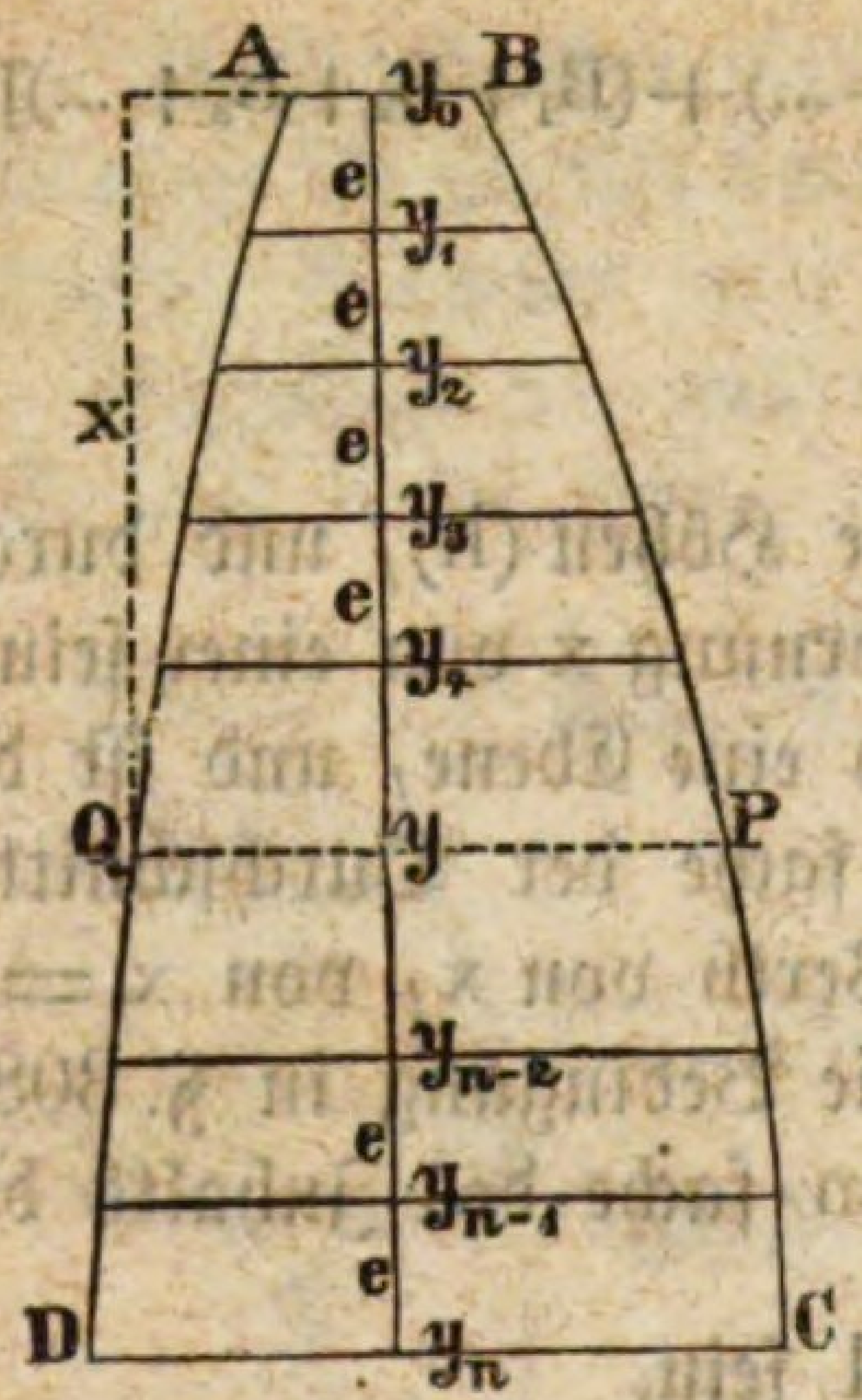
4) Der Satz gilt auch, wenn die Körper Uebergänge aus Wachsen in Fallen haben, oder umgekehrt; denn er gilt dann für ihre Theile, also auch für die Summe derselben.

Anmerk. Der Satz Nr. 3., wenn man die beschränkende Bedingung, welche sich auf §. 308. bezieht, wegläßt, ist der Cavalerische Satz. (Cavaleri lebte in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts zu Bologna.) Läßt man diesen Satz als Grundsatz gelten, so wird ein großer Theil der Sätze dieses Kapitels überflüssig, aber auf Kosten mathematischer Strenge.

§. 315.

Anwendung auf ebene Figuren.

Die in §. 306. bis §. 314. vorgetragenen Gesetze gestatten eine Anwendung auf ebene Figuren.



Liegt eine ebene Figur ABCD zwischen zwei parallelen Grenzlinien AB und CD, so können wir diese die **Grundlinien** und ihre Entfernung von einander die **Höhe** der Figur nennen. Durchschneidet man ABCD in der Entfernung x von AB durch eine mit AB parallele Linie y, so können wir uns die Ebene ABCD dadurch bestimmt denken, daß y als Function von x gegeben ist. Theilen wir die Höhe h in n gleiche Theile (h=ne), und legen wir durch alle Theilpunkte Parallelen mit AB, so liegt der Flächeninhalt F der Ebene ABCD, vorausgesetzt daß y für steigende Werthe von x immer größer wird, zwischen den Grenzen:

$$F > y_0 e + y_1 e + y_2 e + \ldots\ldots + y_{n-1} e$$
$$F < y_1 e + y_2 e + y_3 e + \ldots\ldots + y_n e.$$

Während also in §. 308. die Producte $y_0 e$, $y_1 e$, $y_2 e$, $y_3 e$ u. s. w. prismatische Körper bedeuteten, sind dieselben hier Parallelogramme; im Uebrigen sind alle Schlüsse hier, wie dort.

Wir heben hervor, daß aus der Durchschnittslinie

(1.) $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots + px^m$

der Inhalt F der Ebene folgt:

(2.) $F = ah + \frac{1}{2} bh^2 + \frac{1}{3} ch^3 + \frac{1}{4} dh^4 + \ldots + \frac{1}{m+1} ph^{m+1}$,

wobei y bei wachsenden Werthen von x beliebig Uebergänge aus Wachsen in Fallen, und umgekehrt, haben kann (§. 311.), und daß die **Simpsonsche Regel auf Ebenen Anwendung findet**, wenn die Durchschnittslinie eine algebraische Function von x ist, welche den dritten Grad nicht übersteigt. Natürlich bedeuten in der Formel $F = \frac{G_1 + 4G_2 + G_3}{6} \cdot h$, G_1, G_3 und G_2 resp. die beiden Grundlinien und die Mittellinie der Ebene F. Jede Ebene, welche sich nach der Simpsonschen Regel genau berechnen läßt, werden wir eine **Simpsonsche Ebene** nennen. — Uebersteigt die Durchschnittslinie y (bei Körpern die Durchschnittsfläche) als Function von x den dritten Grad, so giebt die Simpsonsche Regel den Inhalt nicht mehr genau. Um sich davon zu überzeugen, setze man

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots\ldots$$

Dann hat man zunächst den Inhalt genau nach (2.), und berechnet man ihn auch nach der Simpsonschen Regel (eben so, wie in §. 313.):

so findet man, daß die beiden Ausdrücke für den Inhalt nur in den ersten vier Gliedern übereinstimmen. — Endlich werden wir später auch den Satz §. 314. Nr. 3. auf Ebenen anwenden.

In Bezug auf §. 312. sei noch bemerkt, daß

$$F = \Sigma_0^h (y \cdot \Delta x)$$

ist, d. h. die Ebene ist die Summe aller unendlich nahe an einander liegenden, mit den Grundlinien parallelen Durchschnittslinien, welche zwischen den Grundlinien liegen, multiplicirt mit dem unendlich kleinen Abstand Δx jeder Durchschnittslinie von der nächsten. Diese Formel gilt nicht nur für die ganze Ebene ABCD, sondern auch für jeden Theil ABPQ derselben, der zwischen AB und einer mit AB parallelen Durchschnittslinie y liegt, d. h. es ist für jeden Werth von x,

wenn $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots + px^m$ ist:

$$F(x) = \Sigma_0^x (y \cdot \Delta x) = ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^4}{4} + \ldots + p\frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

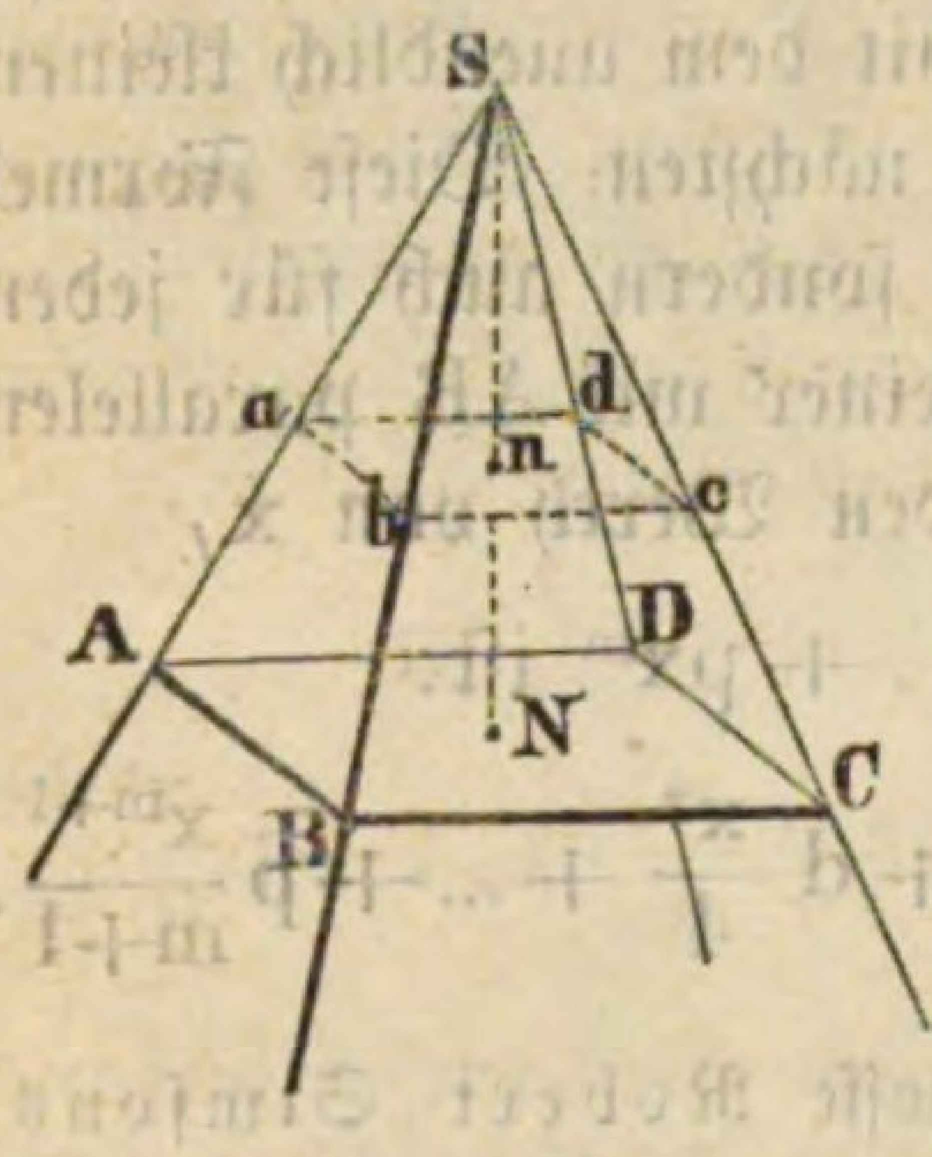
Anmerk. Thomas Simpson, ein Zeitgenosse Robert Simsons, bestimmte zuerst (1743) die Inhalte krummliniger ebener Figuren, indem er sie durch parallele Ordinaten in recht viele Theile zerlegte und diese als Paralleltrapeze berechnete (vergl. §. 58. Nr. 2.). Aus dieser Näherungsmethode der Berechnung einer krummlinigen ebenen Figur hat sich die Simpsonsche Regel entwickelt; aber erst in neuerer Zeit ist erkannt worden, daß diese Regel bei ihrer Anwendung auf bestimmte Gattungen von Körpern und Ebenen genaue Resultate giebt. Eytelwein bedient sich noch in seiner Statik des von Thomas Simpson angegebenen Verfahrens nur zur annähernden Berechnung des Inhaltes und Schwerpunktes der Ebenen und Körper; hingegen findet sich in Brix Elementar-Lehrbuch der dynamischen Wissenschaften (1831) schon der Hinweis darauf, daß die angegebene Methode bei Umdrehungskörpern in vielen Fällen genaue Resultate giebt, wenn man den Körper nur einmal in seiner Mitte durchschneidet. Steiner zeigte (1842) die Richtigkeit der Simpsonschen Regel für alle Körper, welche zwischen parallelen Ebenen liegen und zu Seitenflächen Ebenen oder windschiefe Flächen haben; Brix dann (1843) ihre Richtigkeit für Umdrehungskörper solcher Kurven, bei welchen die Durchschnittsfläche die Form $y = a + bx + cx^2$ hat, während Ligowsky in einem besonderen kleinen Werke (1847) ihre Richtigkeit für alle Körper mit der Durchschnittsfläche $y = a + bx + cx^2$ nachwies. August endlich hat (1849) in seiner Abhandlung über die Ausmessung der Körperstumpfe oder Trapezoidalkörper die Simpsonsche Regel für Durchschnittsflächen, die den dritten Grad nicht übersteigen, begründet, zugleich auch nachgewiesen, daß für Durchschnittsflächen höherer Grade die Formel nicht mehr genaue Resultate giebt. Zu demselben Resultat gelangte gleichzeitig Brix, wie in der erwähnten Abhandlung von August angeführt ist.

Die Pyramide.

§. 316.

Erklärung.

Durch eine Ebene (ABCD), welche alle Kanten einer körperlichen Ecke (S) schneidet, wird von der Ecke ein völlig begrenzter Raum (SABCD) abgeschnitten. Man nennt diesen Körper eine Pyramide; die Durchschnittsebene ABCD heißt die Grundfläche, die Spitze S der körperlichen Ecke die Spitze und die Entfernung SN der Spitze von der Grundfläche die Höhe der Pyramide. Eine Pyramide heißt dreiseitig, vierseitig, fünfseitig u. s. w., je nachdem die Grundfläche ein Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w. ist; die anderen begrenzenden Ebenen heißen die Seitenflächen (z. B. SAB), und diese sind sämmtlich Dreiecke. Die Seiten der Grundfläche heißen die Grundkanten der Pyramide (z. B. AB), die andern Kanten (AS, BS u. s. w.) heißen die Seitenkanten.



Eine Pyramide heißt senkrecht, wenn ihre Grundfläche eine Figur im Kreise ist und die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte (Höhe) den Mittelpunkt dieses Kreises trifft; sonst heißt die Pyramide schief. Bei der senkrechten Pyramide sind alle Seitenkanten einander gleich. — Ist die Grundfläche einer senkrechten Pyramide eine reguläre Figur, so heißt die Pyramide eine reguläre Pyramide. In diesem Falle sind alle Seitenflächen congruente gleichschenklige Dreiecke.

Durchschneidet man eine Pyramide durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene (abcd), so heißt von den beiden Theilen der Pyramide derjenige, welcher der Grundfläche anliegt (ABCDabcd), eine abgestumpfte oder abgekürzte Pyramide, der andere Theil die zugehörige Ergänzungs-Pyramide. Die Ebenen ABCD und abcd heißen die Grundflächen der abgestumpften Pyramide, ihre Entfernung Nn von einander ihre Höhe.

§. 317.

Lehrsatz.

Jede mit der Grundfläche parallele Durchschnittsfläche einer Pyramide ist der Grundfläche ähnlich, und beide Figuren verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Bew. (Figur zu §. 316.) Da $ab \parallel AB$ ist, so verhält sich

$$ab : AB = Sa : SA; \text{ daher auch}$$
$$ab : AB = Sn : SN \text{ (§. 270. Nr. 1.)}.$$

Eben so beweist man $bc : BC = Sn : SN$, $cd : CD = Sn : SN$, u. s. w.; folglich haben abcd und ABCD proportionale Seiten, und weil auch die Winkel gleich sind (parallele Schenkel): so ist $abcd \backsim ABCD$. Hieraus folgt aber:

$$abcd : ABCD = ab^2 : AB^2 = Sa^2 : SA^2 = Sn^2 : SN^2.$$

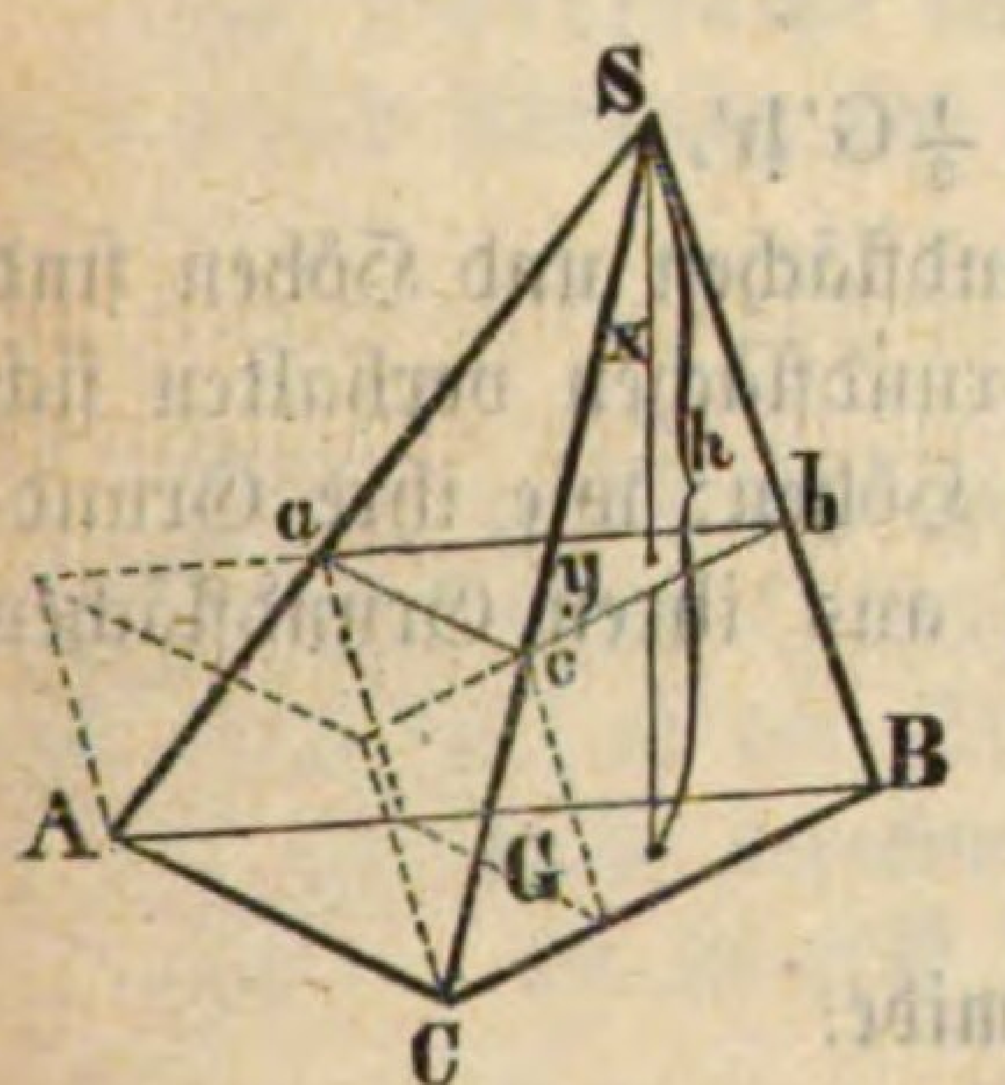
§. 318.

Lehrsatz.

Die Pyramide ist ein Simpsonscher Körper.

Bew. Bezeichnet G die Grundfläche und h die Höhe der Pyramide, und ist y die mit G parallele Durchschnittsfläche in der Entfernung x von der Spitze, so folgt aus §. 317.: $y : G = x^2 : h^2$, daher

$$y = \frac{G}{h^2} x^2.$$



Die Durchschnittsfläche ist also eine Function des zweiten Grades in Bezug auf ihren Abstand x von der Spitze und nimmt bei steigenden Werthen von x (von der Spitze zur Grundfläche hin) fortwährend zu. — Daß jeder Theil der Pyramide, welcher zwischen zwei den Grundflächen parallelen Ebenen liegt, auch zwischen den beiden Prismen liegt, welche resp. die eine und die andere Grundfläche zur Grundfläche und die Entfernung beider Ebenen zur Höhe haben, erkennt man leicht aus dem Theile ABCabc der Pyramide und den diesem Theil zugehörigen, in der Figur angegebenen prismatischen Körpern. Zieht man also durch a und c Parallelen mit SB und legt durch sie eine Ebene, so entsteht das Prisma mit der Grundfläche abc, welches ein Theil des Stückes ABCabc ist, und zieht man durch A und C Parallelen mit SB, so entsteht auf gleiche Weise das Prisma über der Grundfläche ABC, von welchem das Stück ABCabc ein Theil ist. — Ist die Pyramide keine dreiseitige, so kann man den Beweis entweder ganz ähnlich führen, oder er folgt aus §. 314. Nr. 2., wenn man die Pyramide dadurch in dreiseitige Pyramiden zerlegt, daß man ihre Grundfläche durch Diagonalen in Dreiecke theilt und durch jede Diagonale und die Spitze der Pyramide eine Ebene legt.

§. 319.

Der Inhalt der Pyramide.

Bezeichnet G die Grundfläche und h die Höhe der Pyramide, so ist nach §. 317. (oder auch aus y in §. 318.) die Mittelfläche $= \frac{1}{4}$ G, daher der Inhalt K nach der Simpsonschen Regel:

$$K = \frac{0 + 4 \cdot \frac{1}{4} G + G}{6} \cdot h;$$ daher:

der Inhalt der Pyramide $= \frac{1}{3} Gh$,

d. h. der Inhalt der Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Products aus Grundfläche und Höhe, oder gleich dem dritten Theil eines Prismas, welches mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Man kann K auch unmittelbar aus der Durchschnittsfläche $y = \frac{G}{h^2} x^2$ nach §. 309. II. finden:

$$K = \frac{1}{3} \cdot \frac{G}{h^2} \cdot h^3 = \frac{1}{3} Gh.$$

§. 320.

Zusatz.

Bezeichnen K und K′ zwei Pyramiden, G und G′ ihre Grundflächen, h und h′ ihre Höhen, so ist

$$K = \frac{1}{3} Gh \quad \text{und} \quad K' = \frac{1}{3} G'h'.$$

Hieraus folgt: Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich; Pyramiden von gleichen Grundflächen verhalten sich zu einander, wie ihre Höhen; von gleichen Höhen: wie ihre Grundflächen; im Allgemeinen: wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen.

§. 321.

Die abgestumpfte Pyramide.

Bezeichnet A die größere, B die kleinere Grundfläche einer abgestumpften Pyramide und h ihre Höhe, bezeichnen wir die Höhe der Ergänzungspyramide mit x und die Mittelfläche (in der Entfernung $x + \frac{h}{2}$ von der Spitze) mit M: so verhält sich nach §. 317.

$$A : B : M = (x + h)^2 : x^2 : \left(x + \frac{h}{2}\right)^2, \text{ folglich:}$$

$$\sqrt{A} : \sqrt{B} : \sqrt{M} = x + h : x : x + \frac{h}{2}; \text{ daher auch}$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} : \sqrt{M} = 2x + h : x + \frac{h}{2} = 2 : 1.$$

Hieraus folgt $\sqrt{M} = \frac{1}{2}(\sqrt{A} + \sqrt{B})$ oder $4M = A + 2\sqrt{AB} + B$. Nun ist der Inhalt K nach der Simpsonschen Regel $= \frac{A + 4M + B}{6} h$, und substituirt man den vorstehenden Werth von 4M, so folgt:

Inhalt der abgestumpften Pyramide $= \frac{A + \sqrt{AB} + B}{3} h$,

d. h. der Inhalt der abgestumpften Pyramide ist gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Grundflächen und ihrer mittleren geometrischen Proportional-Ebene, multiplicirt mit der Höhe.

Anmerkung. In besonderen Fällen kann die Berechnung des Inhalts der abgestumpften Pyramide bequemer durch Subtraction der Ergänzungs-Pyramide von der vollen geschehen.

Beisp. Wenn eine Pyramide mit der Grundfläche 100□′ und der Höhe 20′ in der Entfernung 9′ von der Spitze parallel der Grundfläche durch eine Ebene geschnitten wird: wie groß ist der Inhalt der abgestumpften Pyramide?

Aufl. Man findet zunächst die Durchschnittsfläche $= 20\frac{1}{4}$□′ und dann den Inhalt der abgestumpften Pyramide $= \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 20 - \frac{1}{3} \cdot \frac{81}{4} \cdot 9 = 605$ C′ 1584 C″.

§. 322.

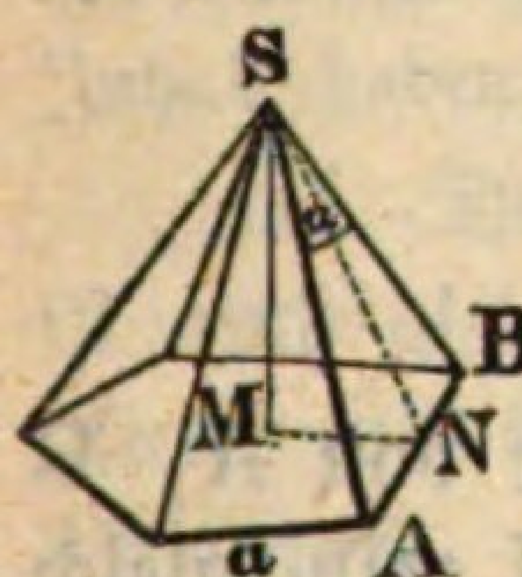
Die Oberfläche einer vollen oder abgekürzten Pyramide findet man durch Addition der begrenzenden Ebenen.

§. 323.

Aufgabe.

Jede Grundkante einer regulären n-seitigen Pyramide sei gleich a und jeder Winkel, den zwei neben einander liegende Seitenkanten mit einander (an der Spitze) bilden, gleich α; man soll den Inhalt K der Pyramide berechnen.

Aufl. Es sei SM die Höhe h der Pyramide, und $MN \perp AB$, so folgt auch $SN \perp AB$. Zunächst ist $SN = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$ und



$$MN = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}$$ (§. 238. V.); folglich:

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{\left(\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}\right)^2},$$

daher der Inhalt der Pyramide:

$$K = \frac{na^3}{24} \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n} \sqrt{\left(\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}\right)^2}.$$

Die Quadratwurzel darf nicht imaginär sein; folglich muß $\frac{\alpha}{2} < \frac{180^\circ}{n}$ oder $n\alpha < 360^\circ$ sein (vergl. §. 279. Nr. 1.)

§. 324.

Aehnliche Pyramiden.

Durchschneidet man eine Pyramide SABCD (Figur zu §. 316.) durch eine der Grundfläche parallele Ebene abcd, so haben die beiden

Pyramiden SABCD und Sabcd nicht nur ähnliche Grundflächen, sondern es sind auch ihre gleichliegenden Seitenflächen einander ähnlich; ferner sind nicht nur die Ecken an der Spitze (bei S), sondern alle gleichliegenden Ecken congruent; überhaupt sind alle gleichliegenden Linien- und Neigungswinkel einander gleich. Solche Pyramiden nennt man ähnliche, und es ist leicht nachzuweisen, daß zwei ähnliche Pyramiden sich immer in die Lage der Pyramiden SABCD und Sabcd bringen lassen.

Aehnliche Pyramiden P und p verhalten sich zu einander, wie die Kuben ihrer Höhen oder homologer Kanten. Denn sind G und g die Grundflächen, H und h die Höhen, so hat man (§. 320.):

$$P:p = GH:gh = \frac{G}{g}:\frac{h}{H}$$
$$= \frac{H^2}{h^2}:\frac{h}{H} = H^3:h^3.$$

§. 325.

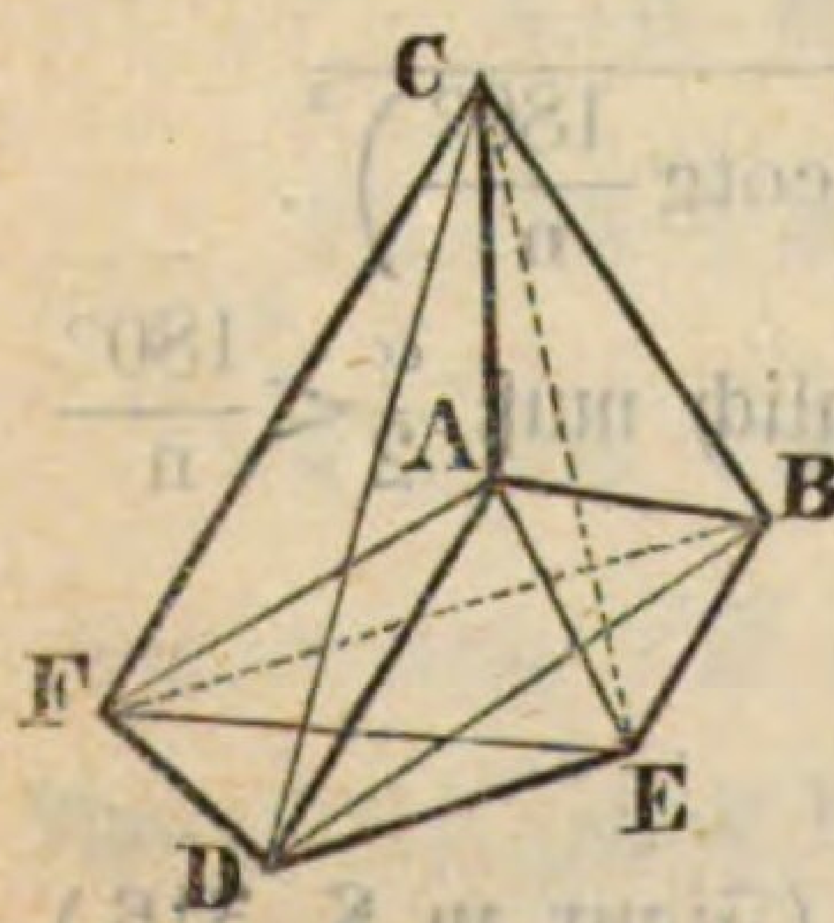
Das schief abgeschnittene Prisma.

I. Durchschneidet man ein Prisma durch eine Ebene, welche der Grundfläche nicht parallel ist, so heißt der zwischen dieser Ebene und der einen Grundfläche liegende Theil des Prismas ein schief abgeschnittenes Prisma.

II. Der Inhalt K eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas ist gleich der Grundfläche G, multiplicirt mit dem arithmetischen Mittel der Entfernungen a, b, c der drei der Grundfläche gegenüberliegenden Ecken von dieser Grundfläche, oder

$$K = \frac{a+b+c}{3}\cdot G.$$

Beweis. Es sei die Grundfläche DEF = G, die von A, B und C auf G gefällten Perpendikel resp. gleich a, b und c; in jeder Seitenfläche sind die beiden Diagonalen gezogen. Es läßt sich nun nachweisen, daß der Körper der Summe dreier Pyramiden gleich ist, von denen jede DEF zur Grundfläche, aber resp. A, B und C zur Spitze hat. Denkt man sich durch A, F und E eine Ebene gelegt, so wird durch sie das Prisma in die dreiseitige Pyramide DEFA und in die vierseitige BCFEA, deren Spitze A ist, zerlegt. Letztere wird wieder



durch die Ebene ABF in zwei dreiseitige Pyramiden zerlegt, und es ist so nach:

$$K = \text{Pyr. } DEFA + \text{Pyr. } BEFA + \text{Pyr. } BCFA.$$

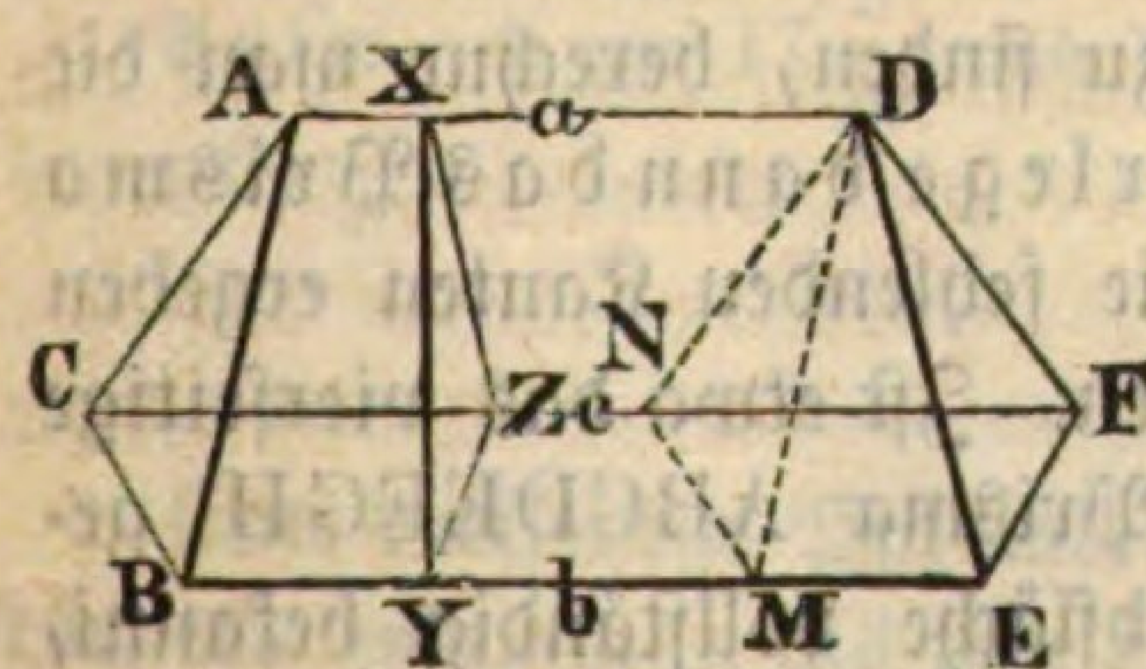
Nun kann bei einer dreiseitigen Pyramide jede Seitenfläche als Grundfläche betrachtet werden; die gegenüberliegende Ecke ist dann die Spitze. Ferner sind zwei Pyramiden einander gleich, wenn sie dieselbe Grundfläche haben und ihre Spitzen in einer mit der Grundfläche parallelen Linie liegen; sie haben dann auch gleiche Höhen. Durch Anwendung des Gesagten entsteht nun die folgende Umformung, welche dem Leser dadurch leichter verständlich sein wird, daß bei jeder Pyramide der letzte Buchstabe immer die Ecke bezeichnet, welche als Spitze angesehen werden soll; die drei ersten Buchstaben bedeuten also immer die Grundfläche.

$$\begin{aligned} K &= \text{P. } DEFA + \text{P. } BEFA + \text{P. } BCFA \\ &= \text{P. } DEFA + \text{P. } BEFD + \text{P. } BCFD \\ &= \text{P. } DEFA + \text{P. } DEFB + \text{P. } CDFB \\ &= \text{P. } DEFA + \text{P. } DEFB + \text{P. } CDFE \\ &= \text{P. } DEFA + \text{P. } DEFB + \text{P. } DEFC \\ &= \tfrac{1}{3} G \cdot a + \tfrac{1}{3} G \cdot b + \tfrac{1}{3} G \cdot c \\ &= \frac{a+b+c}{3} \cdot G. \end{aligned}$$

Anmerkung. Diese Zerlegung ist auch richtig, wenn der Körper kein schief abgekürztes, sondern ein vollständiges dreiseitiges Prisma ist. Es sind aber dann die 3 Pyramiden, in welche das Prisma zerlegt ist, einander gleich, also jede der dritte Theil des Prismas. Auf diesem Wege gelangt man zum Inhalt der Pyramide ohne Anwendung der Simpsonschen Regel; nur muß vorher bewiesen sein, daß Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen gleichen Inhalt haben.

III. Der Inhalt K eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas ist auch gleich dem arithmetischen Mittel der drei Seitenkanten multiplicirt mit der auf diesen Kanten senkrechten Durchschnittsebene des Prismas. — Sind a, b, c die drei Kanten und ist ΔXYZ die auf den Kanten senkrechte Durchschnittsebene, so heißt die

Behaupt. $K = \frac{a+b+c}{3} \cdot \Delta XYZ.$



Bew. Das schief abgeschnittene Prisma ABCDEF wird durch das ΔXYZ in zwei senkrechte schief abgeschnittene dreiseitige Prisma zerlegt. Die beiden Theile sind nach II. zu berechnen, und man erhält:

$$K = \frac{AX + BY + CZ}{3} \cdot \Delta XYZ + \frac{XD + YE + ZF}{3} \cdot \Delta XYZ.$$

Sondert man $\frac{1}{3} \cdot \Delta XYZ$ ab, so erhält man die Behauptung.

IV. Die Formel in III. erhält man auch leicht nach der Simpsonschen Regel. Zuerst beweise man, daß jedes dreiseitige Prisma ein Simpsonscher Körper ist, wenn man eine Seitenfläche als Grundfläche und die Entfernung der gegenüberliegenden Kante von dieser Grundfläche als Höhe ansieht. Der Beweis ist einfach und folgt in §. 326. Anmerk. Ist nun in der Figur zu III. die Kante AD die kürzeste der drei Kanten und legt man durch D eine Durchschnittsebene DMN parallel ABC durch das schief abgeschnittene Prisma, so wird dasselbe in ein dreiseitiges Prisma ABCDMN und in eine vierseitige Pyramide EFNMD zerlegt. Beide Körper sind Simpsonsche, folglich auch nach §. 314. Nr. 2. der ganze Körper, wenn man BCFE als Grundfläche betrachtet. Die Höhe sei h, so ist h auch die Höhe des ΔXYZ zu YZ als Grundlinie. Die Mittelfläche ist ein Paralleltrapez mit den parallelen Seiten $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a+c}{2}$, die Höhe ist gleich $\frac{1}{2} YZ$; folglich ist nach der Simpsonschen Regel:

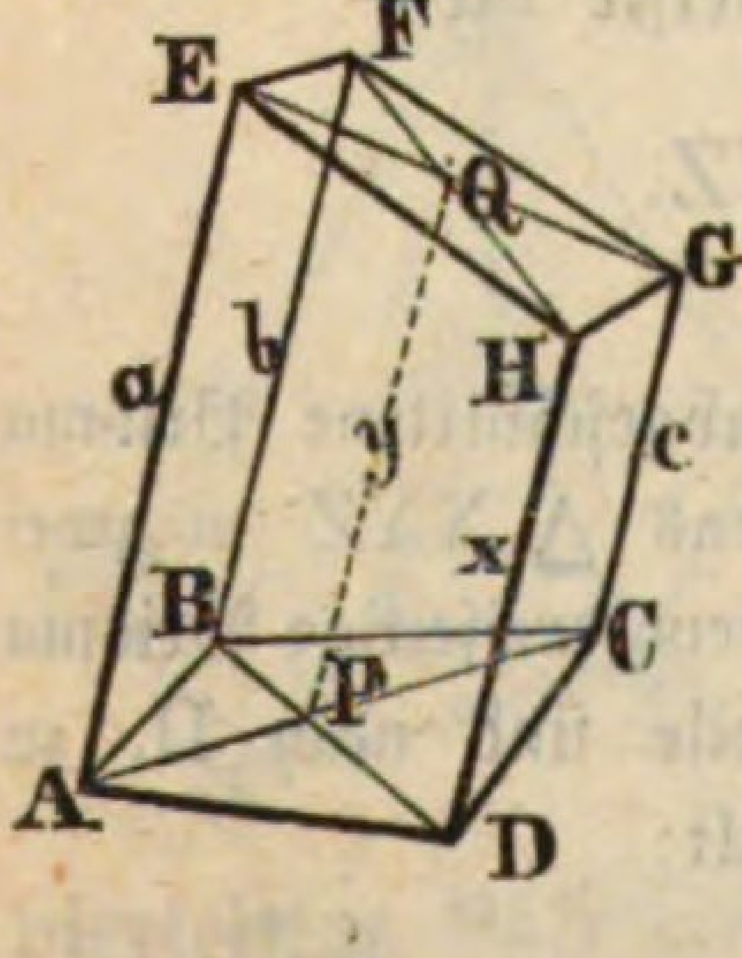
$$K = \frac{\frac{b+c}{2} \cdot YZ + 4 \cdot \frac{a+b+a+c}{4} \cdot \frac{1}{2} YZ + 0}{6} \cdot h$$

$$K = \tfrac{1}{12} YZ . h(b + c + a + b + a + c)$$

$$K = \tfrac{1}{2} YZ \cdot h \cdot \frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c}{3} \cdot \Delta XYZ.$$

Beisp. Die Seitenkanten und der Inhalt der Seitenflächen eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas ABCDEF sind gegeben; nämlich die Kanten: AD = 10′, BE = 15′, CF = 6′ und die Seitenflächen: ABED = 50□′, BCFE = 63□′ und ACFD = 64□′; wie groß ist der Inhalt des Körpers?

Antw. 120,0625 C′ (ΔXYZ berechnet man aus seinen drei Seiten 4′, 6′ und 8′).



V. Ist ein mehrseitiges Prisma schief durchschnitten, so ist durch die Länge dreier Seitenkanten die Lage der Durchschnittsebene bestimmt. Um den Inhalt des Körpers zu finden, berechne man die andern Kanten und zerlege dann das Prisma in dreiseitige. Die fehlenden Kanten ergeben sich durch Proportionen. Ist etwa das vierseitige schief abgeschnittene Prisma ABCDEFGH gegeben, ist die Grundfläche vollständig bekannt,

und sind die Kanten AE = a, BF = b, CG = c gegeben: so ist zunächst die Kante DH = x zu berechnen. Legt man aber eine Ebene durch a und c, eine zweite durch b und x, so ist jede Seitenkante mit der Durchschnittslinie beider Ebenen (PQ = y) parallel (§. 257. Nr. 1. und 2.); hieraus folgt, wenn man durch Q und G Parallelen mit CA legt:

$$a - y : a - c = AP : AC.$$

Auf dieselbe Weise erhält man aber auch:

$$b - y : b - x = BP : BD.$$

Aus der ersten Proportion ist y, aus der zweiten dann x zu finden; man kann also jetzt das Prisma mit den Kanten a, b und c berechnen (wobei man den Winkel kennen muß, den die Kanten mit ABCD bilden), dann das andere mit den Kanten a, x und c und beide addiren.

Ist ABCD ein Parallelogramm, so wird EFGH auch ein solches, und dann ist y in den Paralleltrapezen ACGE und BDHF die Verbindungslinie der Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten, folglich sowohl $= \frac{a+c}{2}$, als auch $= \frac{b+x}{2}$, woraus das Gesetz folgt: Im schief abgeschnittenen Parallelepipedon sind die Summen gegenüberliegender Seitenkanten einander gleich. Bezeichnet in diesem Falle β den Neigungswinkel der Seitenkanten gegen die Grundfläche, sind p und q die Seiten des # ABCD und ist α der eingeschlossene Winkel: so findet man den Inhalt des Körpers $= pq \cdot \sin\alpha \times y \cdot \sin\beta$. Ist das Prisma senkrecht, so ist sein Inhalt gleich der Grundfläche multiplicirt mit y.

Beisp. 1. Es sei (obige Figur) ABCD ein Rechteck, das Prisma senkrecht; AB = 6′ und BC = 8′; AE = 20′, BF = 24′ und CG = 21′; wie groß ist der Inhalt des Körpers? (BF kann beliebig geändert werden.)

Antw. 984 C′.

Beisp. 2. Das Prisma sei senkrecht, seine Grundfläche ABCD ein Viereck, in welchem AD = 5′ und ∡ BAD = 90° ist. Die Diagonalen schneiden sich in P senkrecht und es sei AP = 4′, PC = 10′. Ferner sei AE = 16′, BF = 20′ und CG = 24′; wie groß ist die vierte Seitenkante und der Inhalt des Körpers?

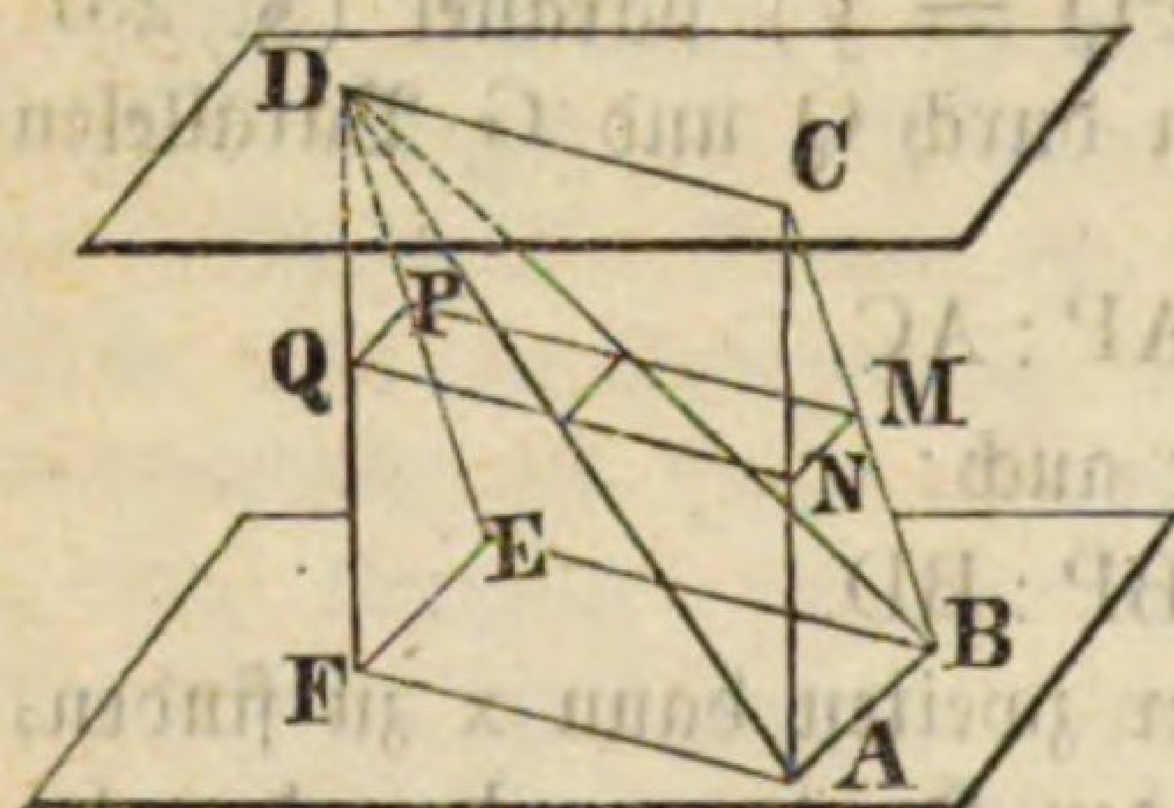
Antw. $x = 17\frac{9'}{28}$ und der Inhalt $= 1147\frac{11}{12}$ C′.

§. 326.

Lehrsatz.

Eine dreiseitige Pyramide ABCD ist auch dann ein Simpsonscher Körper, wenn man als ihre Höhe die Entfernung der beiden parallelen

Ebenen von einander ansieht, welche sich durch zwei gegenüberliegende Kanten AB und CD legen lassen (§. 271. Nr. 1.), wenn man also alle Durchschnittsflächen diesen Ebenen parallel legt.



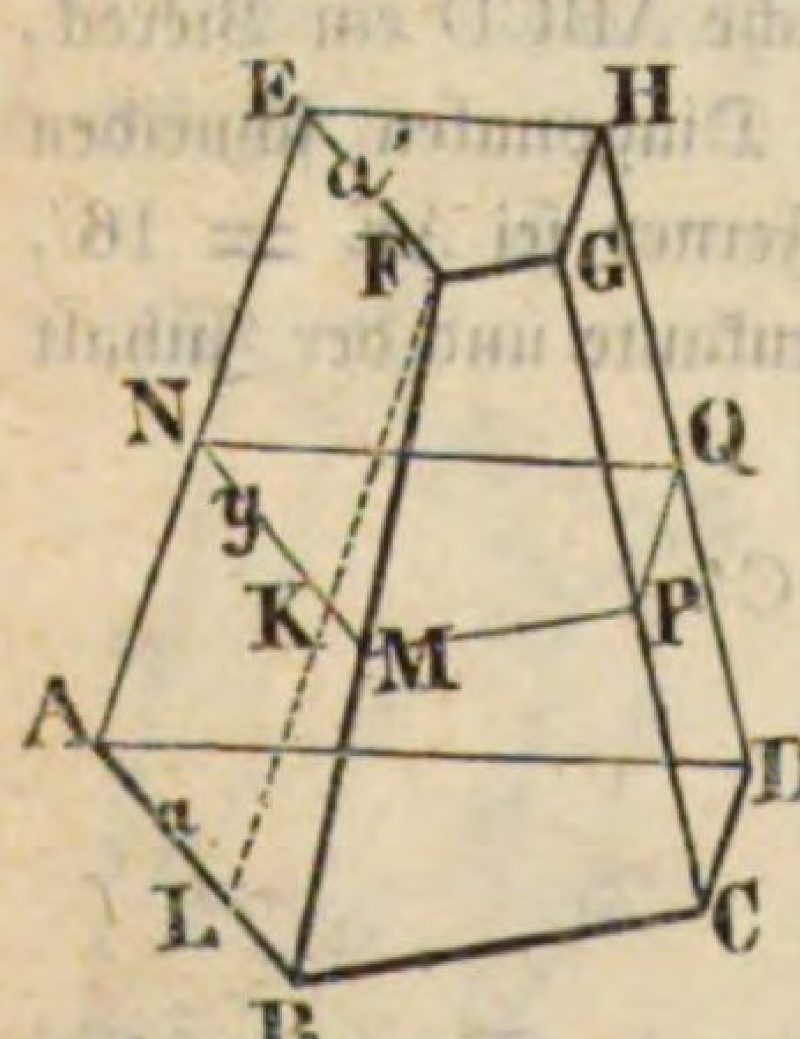
Beweis. In der durch AB gehenden Ebene mache man AF und BE gleich und parallel CD und ziehe FE, FD und ED. Denkt man sich noch die nöthigen Ebenen gelegt, so erscheint die Pyramide ABCD jetzt als Differenz eines dreiseitigen Prismas ABCFED und einer vierseitigen Pyramide ABEFD; beide Körper sind Simpsonsche, folglich ist nach §. 314. Nr. 2. auch die Pyramide ABCD ein Simpsonscher Körper.

Anmerkung. Um zu beweisen, daß das dreiseitige Prisma ein Simpsonscher Körper ist, wenn man ABEF als seine Grundfläche und die Entfernung h der Kante CD von ABEF als seine Höhe ansieht, sei NMPQ eine mit ABEF parallele Durchschnittsfläche in der Entfernung x von CD. Im ⧺ ABEF sei AF = a und die Höhe auf AF = b. Legt man durch den Körper eine die Kanten CD, AF und BE senkrecht schneidende Ebene, und bezeichnet y die Durchschnittslinie derselben mit dem ⧺NMPQ: so ist ⧺NMPQ = ay, und es verhält sich x : y = h : b; hieraus folgt: ⧺ NMPQ $= \frac{ab}{h} x$. Legt man ferner durch NQ und AF parallele Ebenen mit BCDE, so überzeugt man sich leicht, daß der Körper auch die in §. 308. angegebene Eigenschaft hat; er ist also ein Simpsonscher. Aus der Durchschnittsfläche $\frac{ab}{h} x$ folgt sein Inhalt $= \frac{1}{2} \frac{ab}{h} \cdot h^2 = \frac{1}{2} abh$ $= \frac{1}{2}$ ⧺ABEF $\times h$ (vergl. §. 289.).

§. 327.

Der Obelisk.

I. Der Obelisk ist ein Körper, welcher von zwei parallelen Grundflächen (ABCD und EFGH) begrenzt wird, die gleich viele und



paarweise parallele Seiten haben (z. B. AB ⫲ EF), die aber nicht einander ähnlich sind — deren Seiten also nicht proportional sind — und deren Seitenflächen sämmtlich Ebenen, also im Allgemeinen Paralleltrapeze sind, während einzelne auch Parallelogramme sein können. Die Grundflächen haben ringsherum gleiche Winkel (wegen der parallelen Schenkel); wären also die Seiten proportional, so würden die Grundflächen ähnlich sein, und der Körper wäre dann kein Obelisk, sondern eine abgekürzte Pyramide. Es läßt sich in diesem

Falle leicht nachweisen, daß jede Seitenkante von den beiden benachbarten in demselben Punkt geschnitten wird, woraus folgt, daß sich alle in einem Punkt schneiden. — Sind die Grundflächen n-Ecke, so heißt der Körper ein n-seitiger Obelisk. — Einen dreiseitigen Obelisk giebt es nach dieser Erklärung nicht.

II. Jede den Grundflächen parallele Durchschnittsfläche des Obelisk ist eine Function des zweiten Grades in Bezug auf ihren Abstand von einer Grundfläche. Es habe NMPQ von oben den Abstand x, die ganze Höhe sei h, AB = a, EF = a', NM = y; ferner sei FL $\perp$ AB. Nach §. 189. I. ist

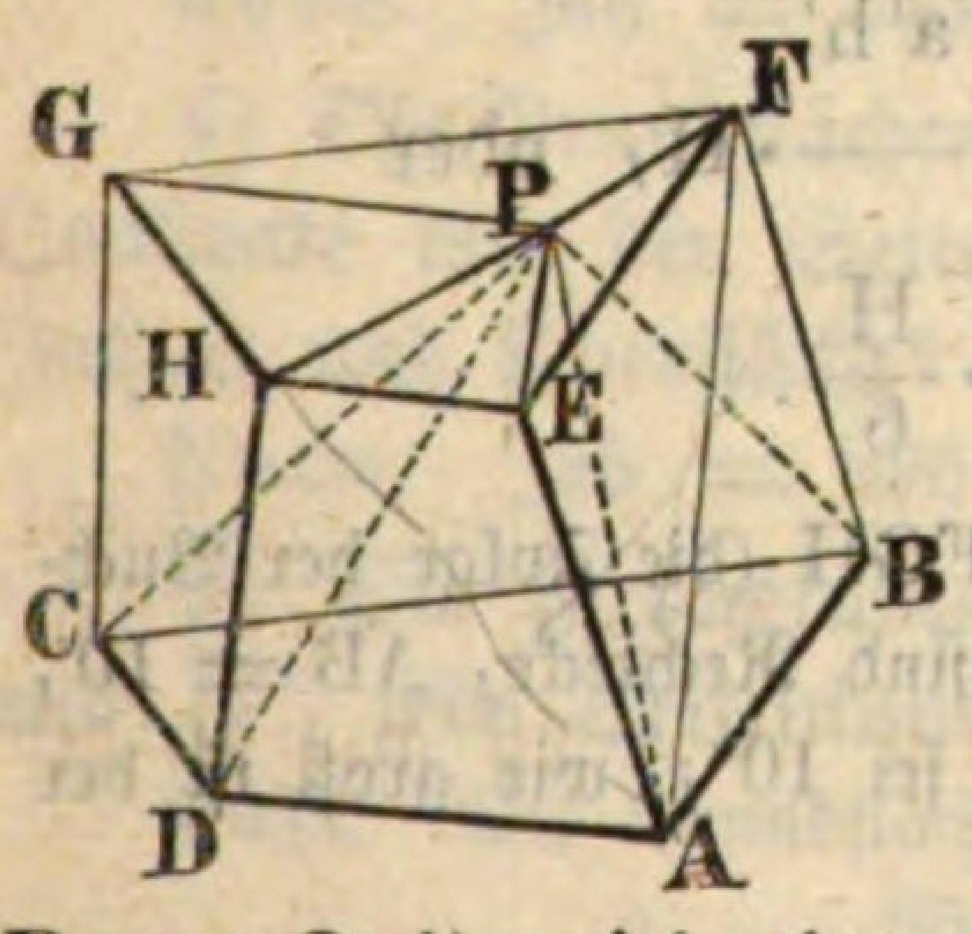
$$y = a' + (a - a') \cdot \frac{FK}{FL},$$

folglich nach §. 270. Nr. 2.:

$$y = a' + \frac{a - a'}{h} \cdot x.$$

Es ist sonach jede Seite der Durchschnittsfläche eine Function des ersten Grades von x, und weil die Winkel constant sind, so ist der Inhalt nach §. 244. VI. eine Function des zweiten Grades. Hingegen läßt sich bei dem Obelisk nicht unmittelbar nachweisen, daß er die Eigenschaft in §. 308., oder die in §. 311. hat, auch liegt sein Inhalt nicht immer zwischen den Prismen, welche seine Höhe und eine seiner Grundflächen zur Grundfläche haben. Das Beispiel 1. weiter unten giebt hierzu einen Beleg, der für die Kenntniß des Obelisk von Wichtigkeit ist. Dabei ist der Obelisk allerdings ein Simpsonscher Körper; der Beweis muß aber auf einem andern Wege erfolgen.

III. Der Obelisk ist ein Simpsonscher Körper.



Beweis. Man wähle in der einen Grundfläche EFGH einen beliebigen Punkt P und verbinde ihn mit allen Ecken des Obelisk. Wenn man sich dann noch die nöthigen Ebenen gelegt denkt, so erscheint der Obelisk in lauter Pyramiden zerlegt. Die eine hat die Grundfläche ABCD, in welcher P nicht liegt, zur Grundfläche und P zur Spitze; jede der übrigen hat eine Seitenfläche des Obelisk zur Grundfläche und P zur Spitze, z. B. ABFEP. Jede dieser letzteren Pyramiden kann man in zwei dreiseitige zerlegen, von denen die eine zur Grundfläche eines der Dreiecke hat, in welche die obere Grundfläche durch die Verbindungslinien des Punktes P mit ihren Ecken zerlegt wird, während die Spitze eine Ecke der unteren Grundfläche ist; die andere hat in den beiden Grundflächen des Obelisk zwei gegen-

überliegende (also windschiefe) Kanten. Nehmen wir z. B. die vierseitige Pyramide ABFEP, so wird sie durch die Ebene PFA in die Pyramide PFEA, in welcher PFE als Grundfläche betrachtet werden kann, und in die Pyramide ABFP, welche die Kanten AB und FP in den beiden Grundflächen des Obelisk hat, zerlegt. Der Obelisk ist sonach in drei Arten von Pyramiden zerlegt:

1) eine einzelne Pyramide ABCDP steht auf der untern Grundfläche und hat ihre Spitze in der oberen; sie ist ein Simpsonscher Körper.

2) n Pyramiden (den Obelisk n-seitig vorausgesetzt) hängen an der obern Grundfläche, haben eines der Dreiecke, in welche diese Grundfläche zerlegt ist, zur Grundfläche und ihre Spitze in einer Ecke der unteren Grundfläche, z. B. die Pyramide PFEA. Alle diese Pyramiden sind Simpsonsche Körper.

3) n Pyramiden schweben zwischen beiden Grundflächen, in welchen sie zwei gegenüberliegende Kanten haben, z. B. die Pyramide ABFP. Auch alle diese Pyramiden sind nach §. 326. Simpsonsche Körper.

Nach §. 314. Nr. 2. ist daher der Obelisk ein Simpsonscher Körper.

IV. Sind die Grundflächen eines Obelisk Parallelogramme mit den Grundlinien a und a′ und den zugehörigen Höhen h und h′, und ist die Höhe des Obelisk = H: so ist die Mittelfläche ein Parallelogramm mit der Grundlinie $\frac{a+a'}{2}$ und der Höhe $\frac{h+h'}{2}$; daher der Inhalt des Obelisk:

$$K = \frac{ah + 4\cdot\frac{a+a'}{2}\cdot\frac{h+h'}{2} + a'h'}{6}\cdot H, \text{ oder}$$

$$K = (2ah + 2a'h' + ah' + a'h)\cdot\frac{H}{6}.$$

Beispiel 1. Die Grundflächen ABCD und EFGH (die Folge der Buchstaben wie in der vorstehenden Figur) eines Obelisk sind Rechtecke, AB = 10′, AD = 6′, EF = 4′ und EH = 14′; die Höhe sei 10′; wie groß ist der Inhalt des Obelisk?

Antw. 660 C′. — Die Prisma auf den resp. Grundflächen und mit der Höhe 10′ haben die Inhalte 600 C′ und 560 C′. Der Obelisk liegt also nicht zwischen diesen Prismen, sondern ist größer als beide.

Beisp. 2. An welcher Stelle ist bei dem vorstehenden Obelisk die Durchschnittsfläche ein Maximum oder Minimum, und wie groß ist dann ihr Inhalt?

Aufl. Die Durchschnittsfläche in der Entfernung x von der Ebene EFGH ist:

$$\varphi x = 56 + \frac{26}{5} x - \frac{12}{25} x^2; \text{ folglich}$$

$$\varphi' x = \frac{26}{5} - \frac{24}{25} x$$

$$\varphi'' x = -\frac{24}{25}.$$

In der Entfernung $5\frac{5}{12}'$ von der Grundfläche EFGH ist die Durchschnittsfläche ein Maximum und hat $70\frac{1}{12}$ □′ Inhalt; sie ist also größer als jede Grundfläche.

Beisp. 3. Der horizontale Boden eines Grabens von 10′ Tiefe, dessen Seitenwände Ebenen sind, ist ein Rechteck von 480′ Länge und 10′ Breite. Die horizontalen Kanten oben bilden ein Rechteck von 500′ Länge und 15′ Breite; mit wie viel Kubikfuß Wasser ist der Graben zu füllen?

Antw. Mit $61333\frac{1}{3}$ C′.

§. 328.
Uebungs-Aufgaben.

1) Die Grundfläche einer regulären Pyramide ist ein Quadrat zur Seite 10′; die Höhe ist 12′; wie groß ist die Oberfläche?

Antw. 360 □′.

2) Die Grundfläche einer Pyramide ABCD sei das Δ ABC, in welchem $\measuredangle$ B = 90°, AB = 8′ und BC = 3′ ist. Es sei ferner die Kante BD $\perp$ ABC, und die Kante AD = 17′; wie groß ist der Inhalt der Pyramide?

Antw. 60 C′.

3) Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Quadrat zur Seite 12′; jede Seitenkante ist = 10′; wie groß Inhalt und Oberfläche?

Antw. Inh. = 253,9921 C′; Oberfl. = 336 □′.

4) Die Grundflächen einer senkrechten abgekürzten Pyramide sind Quadrate mit den Seiten 16′ und 4′, die Höhe ist 8′; wie groß Inhalt und Oberfläche?

Antw. Inh. = 896 C′; Oberfl. = 672 □′.

5) Die Grundkanten einer dreiseitigen Pyramide sind 9′, 10′ und 17′, jede Seitenkante 20′; wie groß der Inhalt?

Aufl. Die Grundfläche ist 36 □′, der Radius des um die Grundfläche beschriebenen Kreises $= \frac{85'}{8}$, daher die Höhe der Pyramide $= \frac{1}{8}\sqrt{18375}'$ und ihr Inhalt $= 1{,}5 . \sqrt{18375} = 203{,}331$ C′.

6) Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide ist ein gleichschenkliges Dreieck mit den Seiten 10′, 10′ und 16′, jede Seitenkante ist 20′; wie groß ist der Inhalt?

Antw. 290,899 C′.

7) Die Grundfläche einer Pyramide ABCD sei das rechtwinklige Δ ABC, dessen Katheten AB = 4′ und BC = 10′ sind. Die Seitenkante BD stehe auf der Grundfläche senkrecht und habe die Länge 20′; welchen Neigungswinkel bildet die Seitenfläche DAC mit der Grundfläche ABC?

Aufl. Fällt man BF $\perp$ AC und verbindet F mit D, so ist $\measuredangle$ BFD der gesuchte Neigungswinkel. Es ist aber $\operatorname{tg} BFD = \sqrt{29}$ (§. 88. Anm. 1.) und $\measuredangle$ BFD = 79° 28′ 49″.

8) Dieselbe Aufgabe, es sei aber AB = 6′, BC = 8′ und BD = 12′; wie groß ist der Neigungswinkel?

Antw. 68° 11′ 55″.

9) Ein schief abgeschnittenes Prisma ABCDEFGH hat zur Grundfläche das Rechteck ABCD mit den Seiten AB = 5′ und BC = 8′. Die Seitenkanten stehen auf der Grundfläche senkrecht, und drei derselben sind gegeben: AE = 16′, BF = 20′ und CG = 18′; welchen Neigungswinkel bildet die Diagonale BH mit der Ebene BCGF?

Antw. 17° 13′ 40,7″.

10) Die Grundfläche einer regulären Pyramide sei ein reguläres Neuneck von 72 □′ Inhalt, und jede Seitenfläche bilde mit der Grundfläche einen Winkel von 40°; wie groß ist der Inhalt der Pyramide?

Antw. $\operatorname{tg} 40° \cdot \sqrt{\frac{4608}{\operatorname{tg} 20°}} = 94{,}414$ C′.

11) Jede Kante einer dreiseitigen Pyramide sei = a; wie groß Inhalt und Oberfläche?

Antw. Oberfl. $a^2\sqrt{3}$; Inh. $= \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$.

12) Dieselbe Aufgabe für die vierseitige Pyramide.

Aufl. Oberfl. $= a^2(1+\sqrt{3})$; Inh. $= \frac{1}{6}a^3\sqrt{2}$.

13) Dieselbe Aufgabe für die fünfseitige Pyramide.

Aufl. Oberfl. $= \frac{5}{4}a^2\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}+\sqrt{3}\right)$;

Inh. $= \frac{1}{24}a^3(5+\sqrt{5})$.

14) Jede Grundkante einer dreiseitigen Pyramide sei = a, jede Seitenkante = b. Die Pyramide ist schief durchschnitten, und zwar sind c, d und e die Seitenkanten der Ergänzungs-Pyramide; wie groß ist der Inhalt K der schief abgeschnittenen Pyramide?

Aufl. Bezeichnet P die ganze und p die Ergänzungs-Pyramide, so ist K = P — p. Zunächst ist $P = \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2}$, und betrachtet man eine

Seitenfläche als Grundfläche, so ist die zugehörige Höhe $h = a\sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{4b^2 - a^2}}$. Betrachtet man ferner die Seitenfläche der Ergänzungs-Pyramide zwischen den Kanten d und e als deren Grundfläche, so findet man diese Grundfläche nach §. 69., die zugehörige Höhe z aber aus der Proportion $z : h = c : b$. Schließlich ist

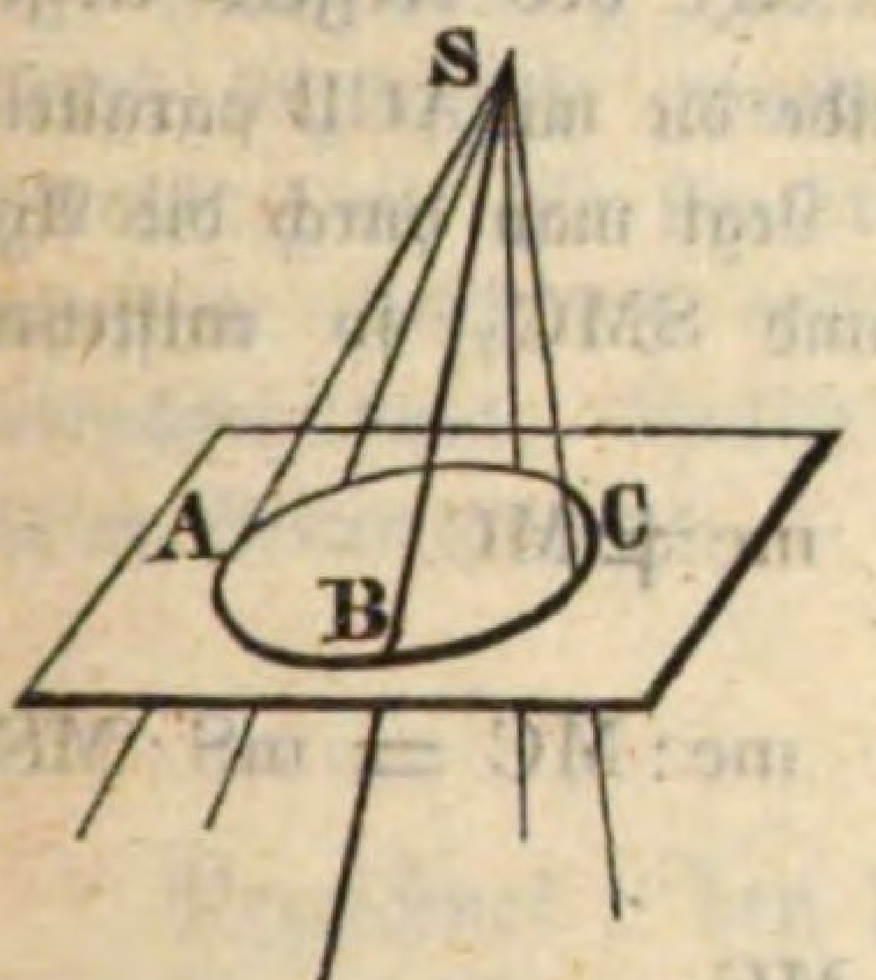
$$K = \frac{a^2}{12} \cdot \frac{b^3 - cde}{b^3} \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

Der Kegel.

§. 329.

Erklärung.

Wenn eine von einem Punkte S im Raume ausgehende unendlich lange Linie so bewegt wird, daß sie immer in S endet und alle stetig auf einander folgenden Punkte des krummen Umfanges einer ebenen Figur ABC durchläuft, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage zurückgekehrt ist: so heißt die krumme Fläche, welche sie beschreibt, eine konische oder Kegel-Fläche. Denkt man sich die Linie über S verlängert, so beschreibt die Verlängerung bei der Bewegung eine zweite konische Fläche, welche die Scheitel-Kegel-Fläche der ersten heißt. Durchschneidet man eine konische Fläche durch eine Ebene ABC, so daß ein durch diese Ebene und einen Theil der konischen Fläche völlig begrenzter Raum ABCS entsteht, so heißt dieser Körper ein Kegel, die Ebene ABC seine Grundfläche, der Punkt S seine Spitze, die Entfernung der Spitze von der Grundfläche seine Höhe, der krumme Theil seiner Oberfläche (ein Theil der konischen Fläche) sein Mantel und jeder Theil der die konische Fläche erzeugenden Linie zwischen der Spitze und der Grundfläche (z. B. SA oder SB) eine Seite des Kegels. — Durchschneidet man einen Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene, so heißt der der Grundfläche anliegende Theil des Kegels ein abgekürzter oder abgestumpfter Kegel, der andere der zugehörige Ergänzungs-Kegel.



Ist die Grundfläche eines Kegels ein Kreis, so heißt der Kegel ein gemeiner Kegel; die Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundfläche heißt seine Axe, und der Kegel selbst wird ein senkrechter (auch gerader), oder schiefer

Kegel genannt, je nachdem die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht, oder nicht.

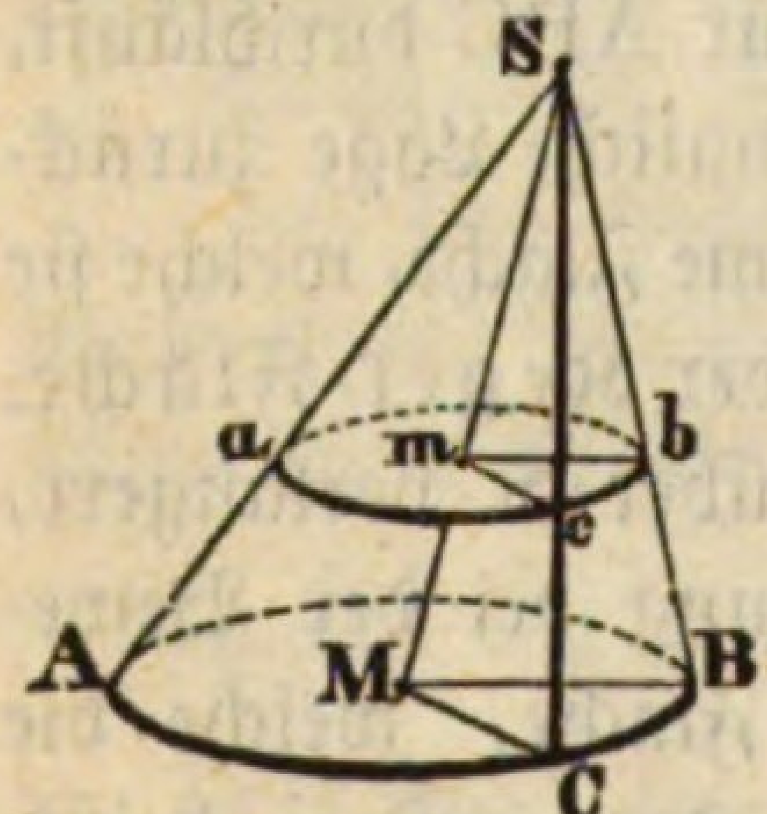
Im senkrechten gemeinen Kegel sind alle Seiten einander gleich; daher wird ein solcher Kegel zuweilen auch ein gleichseitiger Kegel genannt. Legt man durch die Axe eines solchen Kegels eine Ebene, so schneidet sie die Oberfläche des Kegels in einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Basis der Durchmesser der Grundfläche ist, und dessen Schenkel Seiten des Kegels sind.

Unter einem Kegel soll fortan immer der gemeine Kegel verstanden werden, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt wird.

§. 330.

Lehrsätze.

I. Jede mit der Grundfläche parallele Durchschnittsfläche eines Kegels ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der Axe des Kegels liegt.



Bew. Die Axe SM schneide die mit ACB parallele Durchschnittsebene acb in m. Legt man durch die Axe zwei beliebige Ebenen SMB und SMC, so entstehen parallele Durchschnittslinien:

$$mb \mathrel{⋕} MB \quad \text{und} \quad mc \mathrel{⋕} MC.$$

Es verhält sich daher:

$$mb : MB = mS : MS \quad \text{und} \quad mc : MC = mS : MS.$$

Hieraus folgt aber

$$mb : MB = mc : MC,$$

und weil MB = MC ist, so muß auch mb = mc sein. Weil aber die Lage der Durchschnittsebenen SMB und SMC hierbei jede beliebige sein kann, so folgt, daß m von allen Punkten des Umfanges der Durchschnittsfläche acb gleich weit absteht; diese Durchschnittsfläche ist sonach ein Kreis und m sein Mittelpunkt.

Anmerkung. Ist der Kegel senkrecht, so sind die Dreiecke SMB und SMC congruent (eben so auch $\triangle$ Smb $\cong$ $\triangle$ Smc); man kann daher den senkrechten Kegel dadurch erzeugen, daß man ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten eine volle Umdrehung machen läßt.

II. Der Kegel ist ein Simpsonscher Körper.

Beweis. Bezeichnet r den Radius und h die Höhe des Kegels, z den Radius der mit der Grundfläche parallelen Durchschnittsfläche in der Entfernung x von der Spitze, so verhält sich (vorige Figur):

$$z : r = Sm : SM, \text{ folglich}$$
$$z : r = x : h \text{ (§. 270. Nr. 1.), also:}$$
$$z^2 : r^2 = x^2 : h^2, \text{ und auch}$$
$$(1.) \quad z^2\pi : r^2\pi = x^2 : h^2.$$

Hieraus folgt aber die Durchschnittsfläche:

$$(2.)\qquad z^2\pi = \frac{r^2\pi}{h^2}\cdot x^2.$$

Sie ist also eine Function des zweiten Grades in Bezug auf x und wächst stetig mit x, d. h. die Durchschnitts-Kreise werden von der Spitze zur Grundfläche hin nach und nach immer größer. Denkt man sich also den Kreis um m parallel nach unten bis in die Grundfläche bewegt, so daß sein Mittelpunkt immer in der Axe bleibt, so durchläuft dieser Kreis einen Cylinder, der kleiner als der abgekürzte Kegel ABba ist; denkt man sich aber eben so den Kreis um M parallel nach oben bewegt, bis M in m fällt, so beschreibt er einen Cylinder, der größer als ABba ist. Da das Gesagte auch für jeden Theil des Kegels zwischen zwei der Grundfläche parallelen Ebenen zutrifft, so hat der Kegel die in §. 308. angeführte Eigenschaft und ist ein Simpsonscher Körper.

Anmerkung. Aus (1.) folgt, daß der Kegel mit der Pyramide die Haupt-Eigenschaft gemein hat: parallele Durchschnittsflächen verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze. Hieraus und aus dem nächsten §. erklärt es sich, daß man einen Kegel als eine Pyramide betrachten kann, ähnlich wie man einen Kreis als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten ansieht.

§. 331.
Der Inhalt des Kegels.

Bezeichnet r den Radius der Grundfläche, h die Höhe, so ist die eine Grundfläche $r^2\pi$, die andere Null; die Mittelfläche hat den Radius $\frac{1}{2}r$, folglich ist der Inhalt K nach der Simpsonschen Regel:

$$K = \frac{r^2\pi + 4\cdot\frac{1}{4}r^2\pi + 0}{6}h;\ \text{oder}$$

$$\text{der Inhalt des Kegels} = \tfrac{1}{3}r^2\pi h,$$

d. h. gleich dem dritten Theil des Products aus Grundfläche und Höhe.

Anmerkung. Dies Gesetz gilt für jeden Kegel; ist aber die Grundfläche kein Kreis, so kann man sich (besondere Fälle ausgenommen) elementar hiervon nur dadurch annähernd überzeugen, daß man dem Kegel Pyramiden einschreibt und umschreibt, welche sich dem Kegel immer mehr und mehr nähern, ähnlich wie bei dem allgemeinen Cylinder.

§. 332.
Der Mantel des senkrechten Kegels.

I. A sei ein Punkt in der Peripherie der Grundfläche eines senkrechten Kegels; S sei die Spitze. Legt man in A an den Kreis um M, welcher die Grundfläche ist, eine Tangente PQ und durch PQ

und die Seite AS des Kegels eine Ebene E, so hat E mit dem Kegelmantel nur die Punkte der Seite AS gemein, d. h. E berührt den Kegelmantel in AS.

Bew. Es sei N ein beliebiger Punkt in E, der nicht in AS liegt; man lege durch N eine mit der Grundfläche des Kegels parallele Ebene F. Diese Ebene F schneidet den Kegel in einem Kreise, dessen Mittelpunkt m sein mag, und sie schneidet die Ebene E in einer mit PQ parallelen Linie pq, welche AS in a schneiden mag. Weil nun aber ma ‡ MA und pq ‡ PQ ist, so folgt $\measuredangle$ map = $\measuredangle$ MAP = R; daher ist pq Tangente des Kreises um m, folglich mN > ma, d. h. der Punkt N liegt außerhalb des Kegels.

II. Construirt man in die Grundfläche eines senkrechten Kegels ein reguläres n-Eck und verbindet alle Ecken mit der Spitze des Kegels, so entsteht eine in den Kegel eingeschriebene reguläre n-seitige Pyramide, deren Mantel (Summe der Seitenflächen) kleiner als der Kegelmantel ist. Denn geht man zur eingeschriebenen regulären 2n-seitigen, 4n-seitigen u. s. w. Pyramide über, so wird der Mantel der Pyramide immer größer, weil der Umfang der Grundfläche größer wird, und auch die Höhe jeder Seitenfläche (§. 261.); diese Pyramidenmäntel nähern sich aber immer mehr und mehr dem Kegelmantel.

Construirt man um die Grundfläche ein reguläres n-Eck und verbindet alle Ecken mit der Spitze des Kegels, so entsteht eine dem Kegel umschriebene reguläre Pyramide, deren Mantel größer als der Kegelmantel ist. Denn geht man zur 2n-seitigen, 4n-seitigen u. s. w. Pyramide über, so werden die Mäntel immer kleiner, weil die Umfänge der Grundflächen kleiner werden, die Höhe jeder Seitenfläche aber unverändert die Seite des Kegels bleibt; diese Pyramidenmäntel nähern sich aber immer mehr und mehr dem Kegelmantel.

Der Kegelmantel ist die Grenze des Mantels der eingeschriebenen und der umschriebenen regulären n-seitigen Pyramide für $n = \infty$.

III. Der Mantel jeder regulären Pyramide ist gleich dem Product aus dem halben Umfange der Grundfläche und der Höhe einer Seitenfläche. Hierdurch ergiebt sich schon aus II., daß der Kegelmantel auch dem Product aus der halben Peripherie der Grundfläche und der Seite des Kegels gleich ist; die Rechnung weist dies bestimmter nach.

Es sei r der Radius, h die Höhe und s die Seite des Kegels; M sei der Mantel der eingeschriebenen regulären n-seitigen Pyramide, und M' der Mantel der umschriebenen, so ist, wenn man die Winkel durch ihre arc. ausdrückt:

$$M = n . r \sin\frac{\pi}{n} . \sqrt{s^2 - \left(r \sin\frac{\pi}{n}\right)^2}$$

$$M' = n . r \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} . s.$$

Führt man die Reihen ein, so folgt (vergl. §. 302.)

$$M = r\sqrt{s^2 - r\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2} \cdot \left[\pi - \frac{\pi^3}{3!\,n^2} + \frac{\pi^5}{5!\,n^4} - + \dots\right]$$

$$M' = rs \cdot \frac{\pi - \frac{\pi^3}{3!\,n^2} + \frac{\pi^5}{5!\,n^4} - + \dots}{1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^4 - + \dots}.$$

Setzt man $n = \infty$, so wird

$$M = M' = r\pi s;$$

folglich ist

der Kegelmantel $= r\pi s = r\pi . \sqrt{r^2 + h^2}$.

(Vergl. die Anmerk. 1. in §. 333.)

Anmerkung. Der Mantel des schiefen Kegels läßt sich elementar nicht berechnen.

§. 333.

Der abgekürzte Kegel.

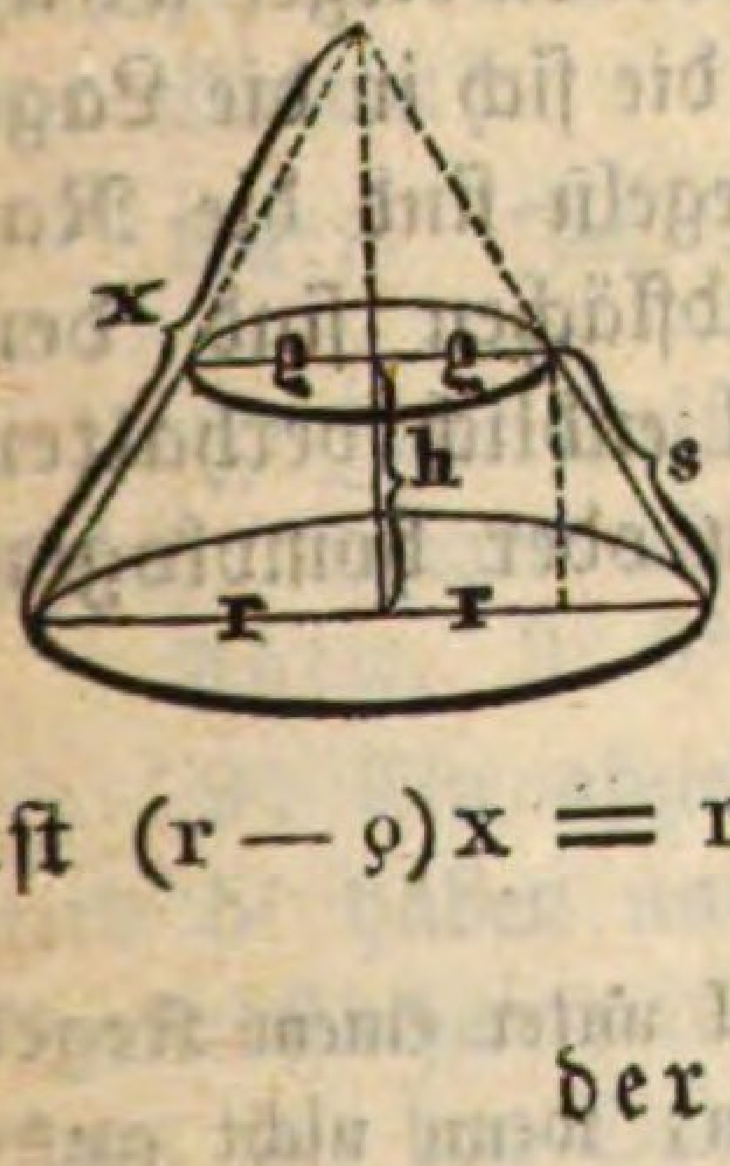
I. Bezeichnen r und ϱ die Radien der Grundflächen und h die Höhe des abgekürzten Kegels, so ist der Radius der Mittelfläche $= \frac{r + \varrho}{2}$, folglich der Inhalt K nach der Simpsonschen Regel:

$$K = \left[r^2\pi + 4 \cdot \left(\frac{r+\varrho}{2}\right)^2 \pi + \varrho^2\pi\right] \cdot \frac{h}{6}, \text{ oder:}$$

der Inhalt des abgekürzten Kegels $= \frac{r^2 + r\varrho + \varrho^2}{3}\pi h$.

Diese Formel stimmt mit der für die abgekürzte Pyramide überein.

II. Nur vom senkrechten abgekürzten Kegel läßt sich der Mantel elementar berechnen; man zieht vom Mantel des ganzen Kegels den Mantel des Ergänzungskegels ab.



Bezeichnet x die Seite des ganzen Kegels, s die Seite und h die Höhe des abgekürzten Kegels, so ist dessen Mantel M:

$$M = r\pi x - \varrho\pi(x - s) \text{ oder}$$
$$M = \pi[(r - \varrho)x + \varrho s].$$

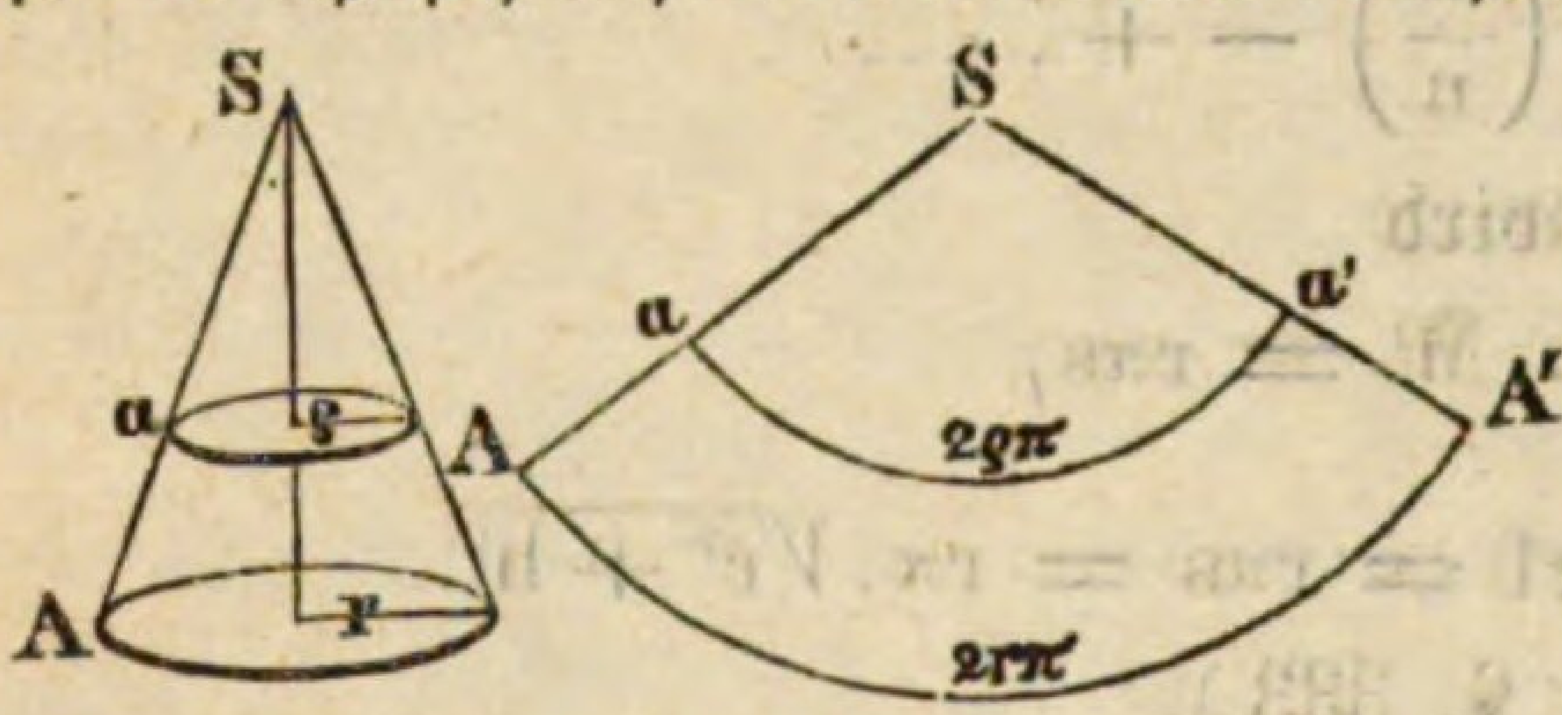
Nun verhält sich aber $x : s = r : r - \varrho$; folglich ist $(r - \varrho)x = rs$, daher

$$M = \pi[rs + \varrho s] \text{ oder:}$$

der Mantel des abgekürzten Kegels

$$= (r + \varrho)\pi . s = (r + \varrho)\pi . \sqrt{(r - \varrho)^2 + h^2}.$$

Anmerkung 1. Die Formeln für den Mantel des vollen und des abgekürzten senkrechten Kegels lassen sich leicht auf folgende Weise herleiten und dem Gedächtniß einprägen: Denkt man sich den Mantel in einer Seite SA durchschnitten, vom Kegel abgewickelt und in eine Ebene ausgebreitet, so bildet der volle Kegelmantel einen Kreisausschnitt (wegen der Gleichheit der Seiten) mit dem Bogen $AA' = 2r\pi$ und dem Radius SA, welcher die Seite s des ganzen Kegels ist. Er läßt sich daher wie ein Dreieck berechnen, dessen Grundlinie $2r\pi$ und dessen



Höhe SA ist; folglich ist der Mantel $= \frac{1}{2} . 2r\pi . SA = r\pi s$. — Der Mantel des abgekürzten Kegels wird ein durch zwei concentrische Bogen $AA' = 2r\pi$ und $aa' = 2\varrho\pi$ begrenztes Ringstück von der Breite aA und läßt sich wie ein Paralleltrapez berechnen, ist also gleich

$$\frac{2r\pi + 2\varrho\pi}{2} . aA = (r + \varrho)\pi . s,$$

wenn jetzt s die Seite des abgekürzten Kegels bedeutet.

Durch Abwickelung des Kegelmantels läßt sich auch die kürzeste krumme Linie im Mantel finden, durch welche zwei Punkte desselben mit einander verbunden werden können. Nachdem der Mantel abgewickelt ist, verbindet man die Punkte durch eine gerade Linie und denkt sich nun den Mantel wieder um den Kegel herumgelegt.

Anmerkung 2. Bezeichnet bei dem senkrechten abgekürzten Kegel z den Radius der Mittelfläche, so ist $z = \frac{r + \varrho}{2}$, folglich $r + \varrho = 2z$, daher der Mantel des abgekürzten Kegels $= 2z\pi . s$, d. h. gleich der Peripherie der Mittelfläche multiplicirt mit der Seite des abgekürzten Kegels.

§. 334.
Aehnliche Kegel.

Durchschneidet man einen Kegel durch eine der Grundfläche parallele Ebene, so nennt man den abgeschnittenen und den vollen Kegel ähnliche Kegel; und eben so heißen zwei Kegel ähnlich, die sich in die Lage solcher zwei Kegel bringen lassen. In ähnlichen Kegeln sind die Radien, Höhen und Seiten proportional; die Grundflächen sind den Mänteln proportional; die Inhalte ähnlicher Kegel endlich verhalten sich zu einander wie die Kuben ihrer Radien, Höhen oder homologen Seiten. (Die Beweise sind einfach.)

§. 335.
Uebungs-Aufgaben.

Vorbemerkung. In diesem §. und in der Folge soll unter einem Kegel immer der gemeine senkrechte Kegel verstanden werden, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt wird.

1) Der Radius eines Kegels (d. h. seiner Grundfläche) sei 5′, die Höhe 12′; wie groß sein Inhalt und sein Mantel?

Antw. Inh. = 314,159 C′; Mant. = 204,2035 □′.

2) Der Inhalt eines Kegels sei = a, seine Grundfläche sei dem halben Mantel gleich; wie groß die Höhe und der Radius?

Aufl. Radius = x, Höhe = y, so ist

1) $\frac{1}{3}x^2\pi y = a$ und 2) $2x^2\pi = x\pi\sqrt{x^2+y^2}$.

Die zweite Gleichung giebt reducirt: $y^2 = 3x^2$. Man erhält

$$\text{die Höhe} = \sqrt[3]{\frac{9a}{\pi}},\ \text{Radius} = \sqrt[3]{\frac{a\sqrt{3}}{\pi}}.$$

3) Der Radius eines Kegels sei = r, die Höhe = h. Der Kegel ist parallel der Grundfläche durchschnitten, und die Durchschnittsfläche ist = a^2; wie groß ist der Inhalt des abgekürzten Kegels?

Antw. $\frac{h}{3}\left(r^2\pi - \frac{a^3}{r\sqrt{\pi}}\right)$.

4) Der Radius eines Kegels verhält sich zur Höhe = n : m; wie verhält sich die Grundfläche zum Mantel?

Antw. Wie $n : \sqrt{n^2+m^2}$.

5) Der Mantel eines Kegels sei = a^2, die Grundfläche = b^2; wie groß ist der Inhalt?

Antw. $\frac{b}{3}\cdot\sqrt{\frac{a^4-b^4}{\pi}}$.

6) Jede Seite eines Kegels sei 20′ und bilde mit der Axe einen Winkel von 60°; wie groß ist der Inhalt des Kegels?

Antw. 3141,59 C′.

7) Jede Seite eines Kegels bilde mit der Axe den Winkel α, die Peripherie der Grundfläche sei = a; wie groß ist der Inhalt und der Mantel?

Antw. Inh. = $\frac{a^3}{24\pi^2 \operatorname{tg}\alpha}$; Mant. = $\frac{a^2}{4\pi\sin\alpha}$.

8) Jede Seite eines Kegels sei der Peripherie der Grundfläche gleich; welchen Winkel bildet jede Seite mit der Axe?

Antw. 9° 9′ 28″.

9) Ein abgekürzter Kegel, dessen Grundflächen die Radien 10′ und 5′ haben und dessen Höhe = 12′ ist, soll durch eine mit den Grundflächen parallele Ebene halbirt werden. Wie groß ist der Radius (x) der Durchschnittsfläche, und wie weit (y) steht dieselbe von der kleineren Grundfläche ab?

Aufl. 1) $2 \cdot \frac{x^2 + 5x + 5^2}{3} y\pi = \frac{10^2 + 10.5 + 5^2}{3} \cdot 12\pi.$

2) $y : x - 5 = 12 : 5.$

Setzt man y aus 2) in 1) ein, so folgt:

$$2(x^2 + 5x + 25)(x - 5) = (10^2 + 10.5 + 5^2)(10 - 5),$$

oder: $2(x^3 - 5^3) = 10^3 - 5^3$ (Arithm. §. 89. IV.),

$$2x^3 = 10^3 + 5^3 = 1125.$$

$x = 8{,}254817'$ und $y = 7{,}81156'$.

10) Derselbe abgekürzte Kegel soll so durchschnitten werden, daß die ganze Oberfläche des der kleineren Grundfläche anliegenden Theiles dem Mantel des abgekürzten Kegels gleich wird.

Aufl. Bezeichnet x den Radius der Durchschnittsfläche und y die Seite des der kleineren Grundfläche anliegenden Theils, so ist $x = 8{,}079467'$ und $y = 8{,}006614'$.

11) Eine Erderhöhung in Form eines Cylinders von 24′ Durchmesser und 8′ Höhe soll rings herum geböscht werden, und die Böschung soll $\frac{3}{4}$ sein; wie viel Kubikfuß Erde gehören dazu, und mit wie viel Quadratfuß Rasen ist die Böschung zu decken?

Aufl. Der Cylinder soll zu einem abgekürzten Kegel ergänzt werden. »Die Böschung soll $\frac{3}{4}$ sein« heißt: jeder Radius der unteren Grundfläche soll um $\frac{3}{4}$ der Höhe, also um 6′, verlängert werden, und der diesem verlängerten Radius zugehörige Kreis soll die eine Grundfläche des abgekürzten Kegels werden. Man erhält 2111,15 C′ Erde und 942,47778 □′ Rasen.

12) Eine Erderhöhung hat die Form eines abgekürzten Kegels mit den Radien 10′ und 8′ und der Höhe 2′. Wie hoch muß oben noch Erde aufgeschüttet werden, wenn der ganze Körper ein abgekürzter Kegel von doppeltem Inhalte werden soll?

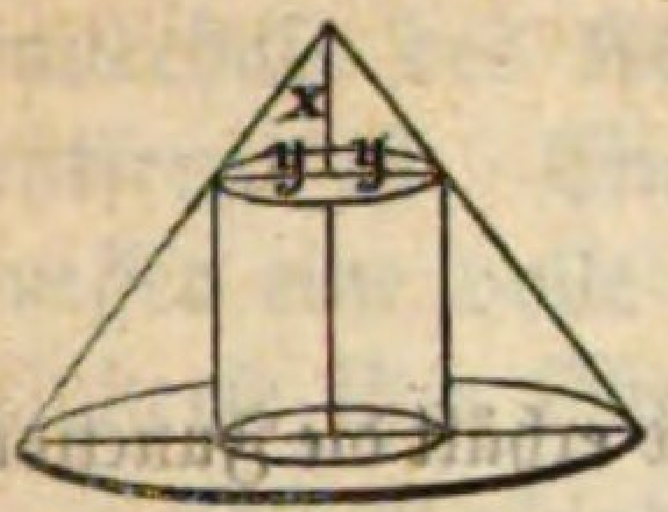
Antw. 5,1155′ hoch. — Nennt man die Höhe des aufgeschütteten Körpers x, den Radius seiner obern Grundfläche y, und setzt zwei Gleichungen an, so kommt man, wenn man x eliminirt, durch dasselbe Verfahren wie in Nr. 9. auf eine reine kubische Gleichung ($8^3 - y^3 = 10^3 - 8^3$).

13) Ein metallener abgekürzter Kegel von 12″ Höhe und den Radien 10″ und 5″ soll in einen Cylinder umgegossen werden, dessen Mantel dem des abgekürzten Kegels gleich ist; wie groß sind Radius und Höhe des Cylinders?

Antw. $7\frac{7}{39}$ Zoll und $13\frac{65}{112}$ Zoll.

14) Wie groß ist der Inhalt und wie groß die ganze Oberfläche eines in einen Kegel von 6′ Radius und 8′ Höhe eingeschriebenen Cylinders, wenn dessen Mantel sich zum Mantel des Kegels wie 3 : 10 verhält?

Aufl. Ein Cylinder heißt in einen Kegel eingeschrieben, wenn die



eine Grundfläche desselben concentrisch in der des Kegels liegt, die Peripherie der andern Grundfläche aber im Kegelmantel. Bezeichnet y den Radius des Cylinders und x den Abstand seiner obern Grundfläche von der Spitze des Kegels, so ist

1) $2y\pi(8-x):6\pi.10 = 3:10$ und 2) $x:y = 4:3$.

Man erhält zwei Cylinder der verlangten Art; entweder ist der Inhalt 127,2345 C′ und die Oberfläche 183,78317 □′, oder der Inhalt ist 42,4115 C′ und die Oberfläche 70,6858347 □′. $\left(x = 6' \text{ oder } 2' \text{ und } y = \frac{9'}{2} \text{ oder } \frac{3'}{2}.\right)$

15) Ein Kegel, dessen Mantel sich zur Grundfläche wie 5 : 4 verhält, hat gleichen Inhalt mit einem Cylinder, dessen Radius r ist und dessen Mantel 4mal so groß ist, als eine seiner Grundflächen; man soll Radius und Höhe des Kegels berechnen.

Aufl. Radius $= 2r$, Höhe $= \frac{3}{2}r$.

16) Der Radius eines Kegels sei 8′, die Höhe 15′. In welcher Entfernung von der Spitze muß man den Kegel parallel der Grundfläche durch eine Ebene schneiden, wenn der Körper, welcher entsteht, wenn man den abgekürzten Kegel durch den Ergänzungs-Kegel aushöhlt, so daß die Grundfläche des letzteren an ihrer Stelle bleibt, $\frac{3}{4}$ vom Inhalte des ganzen Kegels sein soll. Wie groß ist ferner der Inhalt und die ganze Oberfläche des ausgehöhlten abgekürzten Kegels?

Antw. Die Durchschnittsebene muß durch den Mittelpunkt der Axe gehen; der Inhalt des Körpers ist $240\pi = 753{,}9822$ C′, seine Oberfläche $= 200\pi = 628{,}3185$ □′.

17) Wie weit sind die mit der Grundfläche eines Kegels von der Höhe h parallelen Ebenen von einander entfernt, von denen die eine den Kegel, die andere seinen Mantel halbirt?

Antw. $h\left(\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$.

18) Aus einem Baumstamm (abgekürztem Kegel) von 20′ Länge, der unten einen Durchmesser von 2,4′ und oben von 1,8′ hat, soll der größte prismatische Balken mit quadratischen Grundflächen geschnitten werden; wie groß ist der Inhalt des Balkens, und wie viel Holz geht beim Schlagen des Balkens verloren?

Antw. Inhalt des Balkens = 32,4 C′, und 37,343357 C′ Holz geht verloren.

19) Welcher von allen Cylindern, die man in einen Kegel vom Radius r und der Höhe h einschreiben kann, hat den größten Mantel?

Aufl. Bei derselben Bezeichnung, wie in der Figur zu Nr. 14., hat man:

1) $2y\pi(h-x) = $ Max.

2) $x:y = h:r$.

Setzt man y aus 2) in 1) ein, so folgt

$$\frac{2r\pi}{h}(hx - x^2) = Max.$$

Man kann den constanten Factor $\frac{2r\pi}{h}$ außer Acht lassen und erhält die Function von x, welche ein Maximum werden soll:

$$\varphi x = hx - x^2; \text{ daher}$$
$$\varphi' x = h - 2x \quad \text{und} \quad \varphi'' x = -2.$$

Aus $\varphi' x = 0$ folgt $x = \frac{h}{2}$, und weil die zweite Ableitung negativ ist, so hat also der Cylinder, welcher die halbe Höhe des Kegels zur Höhe und den halben Radius zum Radius hat, den größten Mantel. Der Inhalt dieses Mantels ist $= \frac{1}{2}r\pi h$.

20) Welcher von den Cylindern in der vorigen Aufgabe hat den größten Inhalt?

Antw. Dessen Höhe $\frac{1}{3}h$ und dessen Radius $\frac{2}{3}r$ ist; der Inhalt ist $= \frac{4}{27}r^2\pi h$, also $\frac{4}{9}$ vom Inhalte des Kegels.

21) Die Höhe eines Kegels sei 12′, der Radius der Grundfläche 4′. Wie groß ist der Inhalt desjenigen in den Kegel eingeschriebenen Cylinders, welcher die größte Oberfläche hat?

Antw. 84,823 C′.

22) Ein gußeiserner Kegel von 2 Fuß Radius und 7 Zoll Höhe (ddc.-M.) soll in einen Cylinder umgegossen werden, dessen ganze Oberfläche dem Mantel des Kegels gleich ist. Wie groß ist der Radius und die Höhe des Cylinders?

Antw. Rad. = 14,36886 Zoll und die Höhe 6,50962 Zoll, oder der Radius 4,86346 Zoll und die Höhe 56,82104 Zoll. — Die Auflösung führt zu einer unreinen kubischen Gleichung.

23) In einen Kegel von 6′ Höhe und 3′ Radius soll ein Cylinder eingeschrieben werden, dessen Inhalt gleich dem 9ten Theile vom Inhalte des Kegels ist; wie groß Radius und Höhe des Cylinders?

Antw. Der Radius = 2,87938′ und die Höhe = 0,24123′, oder der Radius = 0,6527037′ und die Höhe 4,6945926′. — Die Auflösung führt zu einer unreinen kubischen Gleichung.

Die Kugel.

§. 336.

Erklärung.

Die **Kugel** ist ein Körper, der so von einer einzigen krummen Fläche begrenzt wird, daß jeder Punkt dieser Fläche von einem Punkte

innerhalb des Körpers (dem **Mittelpunkte** der Kugel) gleich weit entfernt ist. Ein Halbkreis, welcher um seinen begrenzenden Durchmesser eine volle Umdrehung macht, beschreibt eine Kugel, seine Peripherie ihre Oberfläche.

Die Verbindungslinie des Mittelpunktes einer Kugel mit einem Punkte der Oberfläche heißt der **Radius** oder **Halbmesser** der Kugel; **alle Radien sind einander gleich.** Jede Verbindungslinie zweier Punkte der Oberfläche ist eine **Sehne** der Kugel; geht sie durch den Mittelpunkt, so heißt sie der **Durchmesser** der Kugel. **Der Durchmesser ist die größte Sehne**; denn verbindet man die Endpunkte einer Sehne mit dem Mittelpunkt der Kugel, so entsteht ein Dreieck, in welchem die Sehne eine Seite, die Summe der beiden andern Seiten aber dem Durchmesser gleich ist.

§. 337.

Folgerungen. Erklärungen.

I. Durchschneidet man eine Kugel durch eine Ebene, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis und wird ein **Kugelkreis** genannt. Die Senkrechte, vom Mittelpunkt der Kugel auf diesen Kreis gefällt, trifft seinen Mittelpunkt, und umgekehrt geht die Senkrechte, welche im Mittelpunkt eines Kugelkreises auf denselben errichtet wird, durch den Mittelpunkt der Kugel.

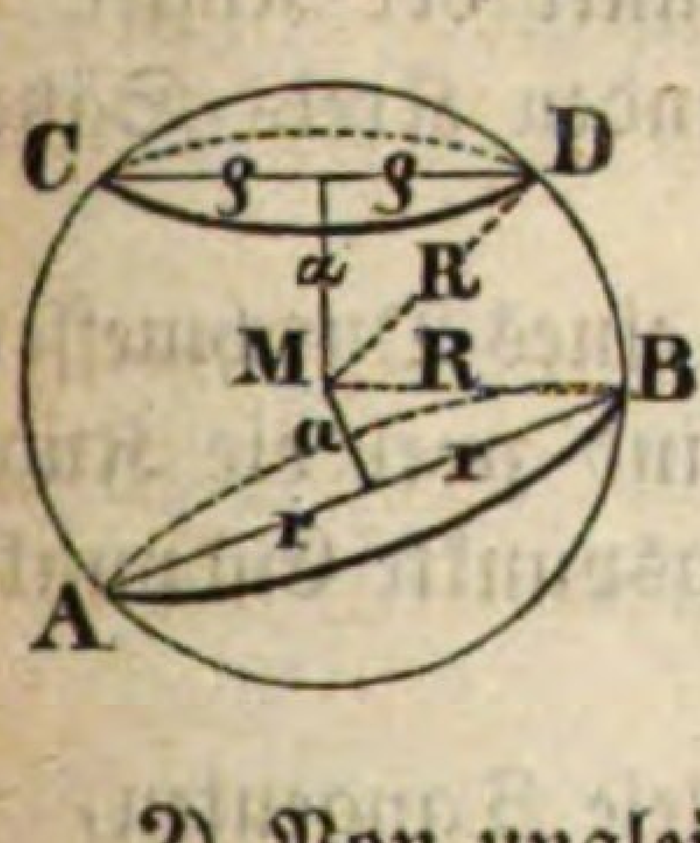
Beweis unmittelbar aus der Gleichheit der Radien einer Kugel und §. 261.

II. Von allen Kugelkreisen ist der durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte der größte (weil er den größten Durchmesser hat) und wird ein **größter Kugelkreis** genannt.

III. Haben zwei Kugelkreise AB und CD die Radien r und ϱ und die Abstände a und α vom Mittelpunkt M der Kugel, und bezeichnet R den Radius der Kugel: so ist

$$r^2 + a^2 = R^2 \text{ und } \varrho^2 + \alpha^2 = R^2; \text{ daher ist auch:}$$

$$r^2 + a^2 = \varrho^2 + \alpha^2.$$

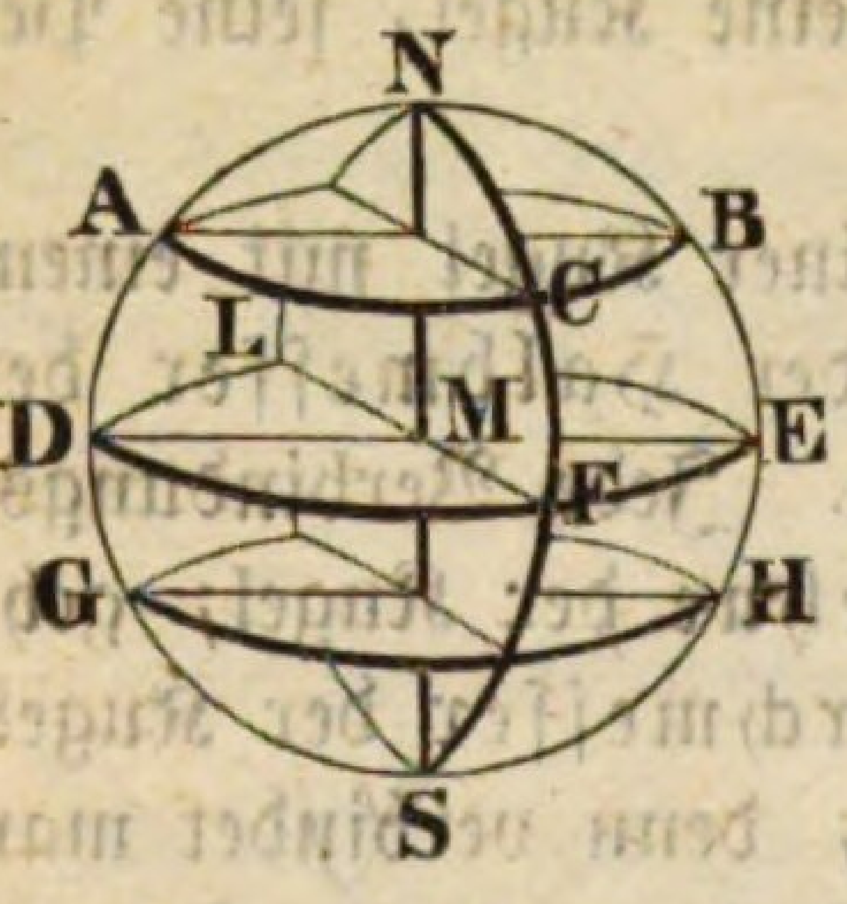


Hieraus folgt:

1) Gleiche Kugelkreise sind gleich weit vom Mittelpunkt der Kugel entfernt, und Kugelkreise sind einander gleich, wenn sie gleiche Entfernung vom Mittelpunkt haben.

2) Von ungleichen Kugelkreisen liegt der größere dem Mittelpunkte näher als der andere, und umgekehrt ist derjenige der größere, welcher näher am Mittelpunkte liegt.

IV. Der Durchmesser einer Kugel, welcher auf einem Kugelkreise senkrecht steht, heißt die dem Kugelkreise zugehörige Axe der Kugel; die Endpunkte der Axe heißen die zugehörigen Pole. — Parallele Kugelkreise (z. B. AB, DE, GH) heißen Parallelkreise; sie haben eine gemeinschaftliche Axe (NS). Der Parallelkreis (DE), welcher durch den Mittelpunkt (M) der Kugel geht, heißt der Aequator; er theilt die Kugel in zwei congruente Theile (Halbkugeln) und auch ihre Oberfläche. (Der Beweis einfach durch Decken.) Jeder größte Kugelkreis, welcher durch die Axe geht, z. B. NBSD und NESL, heißt ein Meridian. Jeder Meridian steht auf den Parallelkreisen senkrecht (§. 265.), und die Bogen aller Meridiane sind einander gleich, welche von demselben Pole bis zu demselben Parallelkreise reichen (folgt aus Gleichheit der Sehnen in congruenten Kreisen, die Gleichheit der Sehnen aber, z. B. NB = NC, aus §. 261.).



V. Errichtet man im Endpunkte A eines Radius MA der Kugel, deren Mittelpunkt M ist, beliebig viele Linien senkrecht auf MA, so ist jede eine Tangente der Kugel, d. h. jede hat mit der Kugeloberfläche nur den einen Punkt A gemein. Ebenso berührt die Ebene, in welcher alle diese Linien liegen, die Kugel in A und steht auf MA senkrecht; sie hat mit der Kugeloberfläche auch nur einen Punkt (A) gemein und heißt eine die Kugel berührende Ebene. Umgekehrt steht jede Linie oder Ebene, welche mit der Kugeloberfläche nur einen Punkt A gemein hat, also die Kugel berührt, auf dem Radius MA senkrecht; auch berührt jede Linie die Kugel, wenn sie in einer berührenden Ebene liegt und durch den Berührungspunkt geht. — Die Senkrechte, vom Mittelpunkt auf eine die Kugel berührende Linie oder Ebene gefällt, trifft den Berührungspunkt, und jede Linie, welche auf einer die Kugel berührenden Ebene im Berührungspunkt senkrecht steht, geht, gehörig verlängert, durch den Mittelpunkt der Kugel.

Die Beweise sind leicht und den entsprechenden Kreis-Sätzen analog.

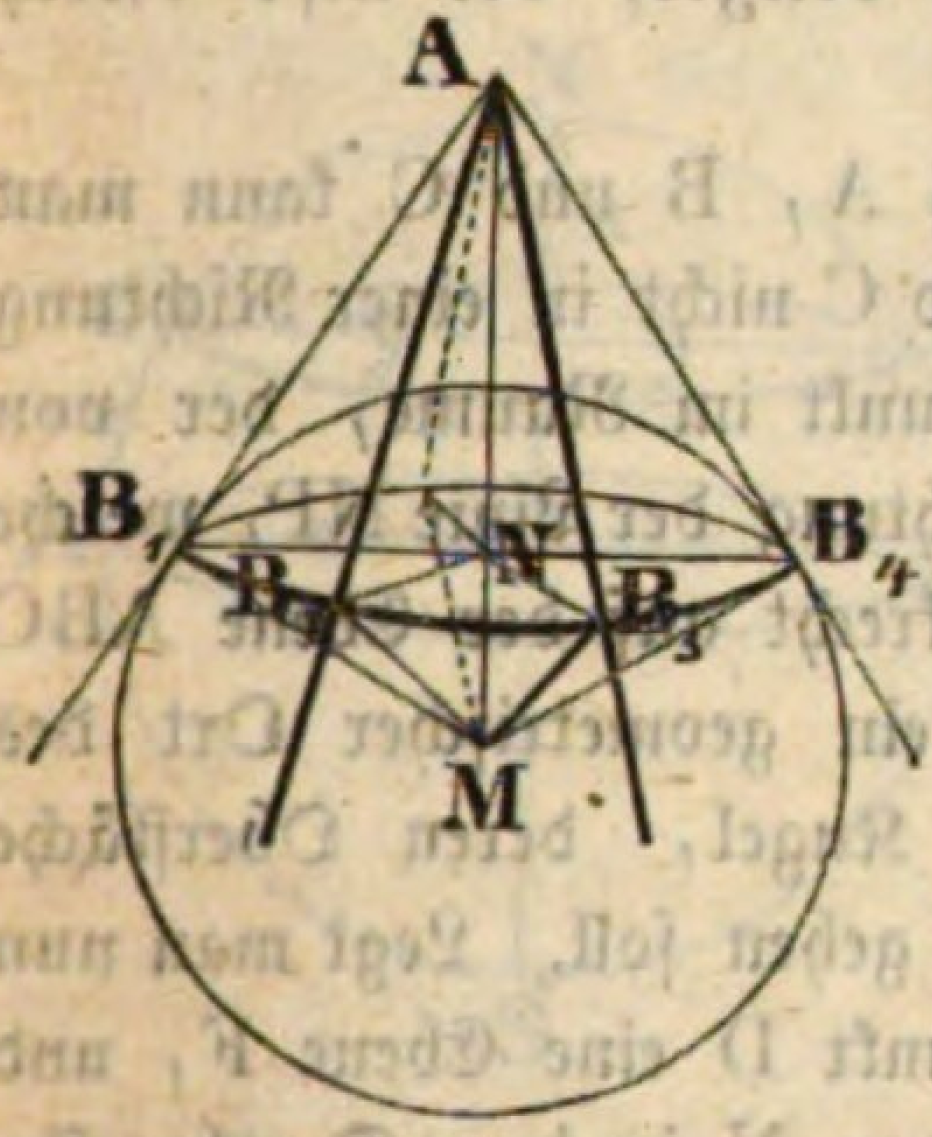
VI. Berührende Ebenen durch die Endpunkte eines Durchmessers der Kugel sind parallel (§. 268. Nr. 1.), und sind zwei die Kugel berührende Ebenen parallel, so sind die Berührungspunkte Endpunkte eines Durchmessers (indirect aus §. 268. Nr. 2.).

VII. Legt man an eine Kugel lauter parallele Tangenten, so liegen alle Berührungspunkte in der Peripherie eines größten Kugelkreises, auf welchem dann diese Tangenten senkrecht stehen. Denkt

man sich die Tangenten als Seiten eines Cylinders, so berührt dessen Mantel die Kugel in der Peripherie jenes größten Kugelkreises.

Bew. Denkt man sich den mit den Tangenten parallelen Durchmesser der Kugel, so steht jeder Radius nach einem Berührungspunkt auf diesem Durchmesser senkrecht; der Satz folgt nun aus §. 253. II. und §. 260. Nr. 1.

VIII. Legt man von einem Punkte A außerhalb einer Kugel beliebig viele Tangenten AB_1, AB_2, AB_3..... an die Kugel, so sind die Theile aller dieser Tangenten zwischen A und den Berührungspunkten einander gleich. Die Berührungspunkte liegen in der Peripherie eines Kugelkreises, und die



Verbindungslinie des Punktes A mit dem Mittelpunkt M der Kugel schneidet diesen Kreis senkrecht und geht durch seinen Mittelpunkt. — Alle diese Tangenten kann man sich als Seiten eines Kegels denken, dessen Spitze A, dessen Axe die Richtung AM ist, und dessen Seiten alle mit der Axe gleiche Winkel bilden; die Kugel wird durch den Mantel dieses Kegels in einem (aber nicht größten) Kugelkreise berührt. Denkt man sich als Grundfläche dieses Kegels eine die Kugel unterhalb M berührende Ebene, so heißt die Kugel in den Kegel eingeschrieben. Ist die Grundfläche senkrecht zur Axe dieses Kegels, ist der Kegel also der gemeine senkrechte, so wird die Grundfläche in ihrem Mittelpunkt von der Kugel berührt.

Bew. Zieht man die Radien der Kugel nach den Berührungspunkten B_1 B_2 B_3... der Tangenten, so sind die rechtwinkligen $\triangle\triangle$ AB_1M, AB_2M, AB_3M, ... einander congruent, und fällt man in jedem von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse die Höhe, so müssen die Fußpunkte aller dieser gleichen Höhen in denselben Punkt (N) der Hypotenuse AM fallen, woraus alles Gesagte sich ergiebt.

IX. Wenn sich zwei Kugeln schneiden, so ist die Durchschnittslinie ihrer Oberflächen eine Kreis-Peripherie; die Centrale beider Kugeln steht auf dem Kreise senkrecht und geht durch seinen Mittelpunkt.

Der Beweis ist ganz wie der zu VIII. zu führen. Man kann annehmen, daß A der Mittelpunkt der zweiten Kugel ist, und daß B_1A, B_2A, B_3A, u. s. w. Radien dieser Kugel sind. Diese Linien sind dann natürlich nicht Tangenten der Kugel um M (obwohl sie es sein können); aber die $\triangle\triangle$ MB_1A, MB_2A, MB_3A u. s. w. sind wieder einander congruent aus Gleichheit ihrer Seiten.

XI. Wenn sich zwei Kugeln berühren, d. h. nur einen Punkt A ihrer Oberflächen gemein haben, so geht die Centrale durch den Be-

rührungspunkt und die Kugeln haben in diesem Punkte eine gemeinschaftliche berührende Ebene. Umgekehrt: geht die Centrale durch einen gemeinschaftlichen Punkt A beider Oberflächen, oder haben die Kugeln in einem gemeinschaftlichen Punkt A ihrer Oberflächen eine gemeinschaftliche berührende Ebene, so berühren sie sich in diesem Punkte.

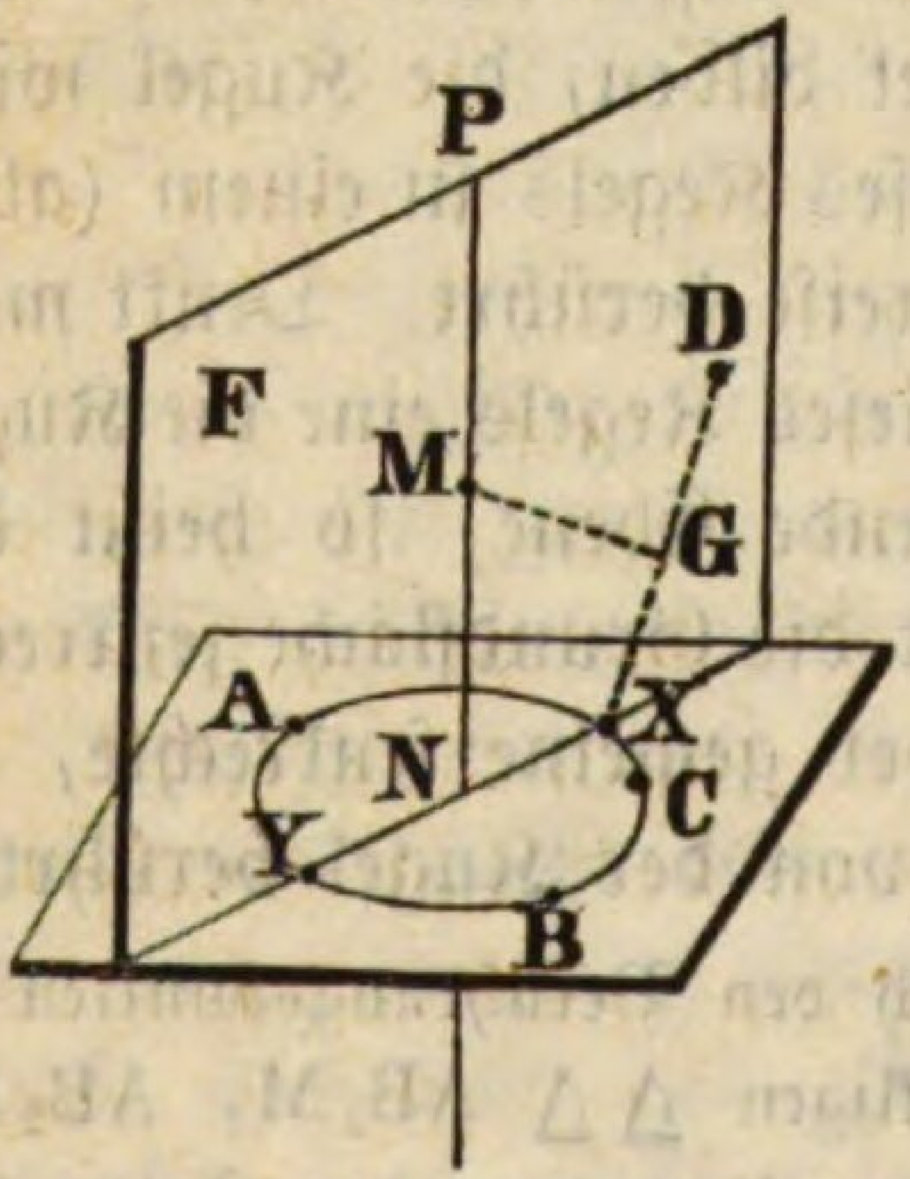
Bew. Durch die entsprechenden Kreissätze, wenn man durch A und die Mittelpunkte der Kugeln eine Ebene legt.

§. 338.

Gesetze.

I. Vier Punkte A, B, C und D, die nicht in einer Ebene liegen, liegen immer in der Oberfläche einer einzigen Kugel, die also durch vier solche Punkte bestimmt ist.

Bew. Durch drei dieser Punkte, z. B. durch A, B und C kann man einen Kreis legen (nach der Voraussf. können A, B und C nicht in einer Richtung liegen); N sei der Mittelpunkt desselben. Jeder Punkt im Raume, der von A, B und C gleich weit entfernt ist, liegt in der Richtung der Linie NP, welche



durch N geht und senkrecht auf der Ebene ABC steht; daher ist NP ein geometrischer Ort des Mittelpunktes M der Kugel, deren Oberfläche durch A, B, C und D gehen soll. Legt man nun durch NP und den Punkt D eine Ebene F, und schneidet sie den Kreis um N in dem Durchmesser XY, so sind auch X und Y Punkte der Oberfläche der gesuchten Kugel; daher muß ihr Mittelpunkt M von X, Y und D gleichweit entfernt sein. Weil aber M in der Ebene F liegt (denn NP liegt in F), so muß M der Mittelpunkt des Kreises sein, der durch X, Y und D geht, und weil es nur einen solchen Kreis giebt, so giebt es auch nur einen Mittelpunkt M, also auch nur eine Kugel. Man findet M, wenn man XD zieht und in ihrer Mitte G eine Senkrechte GM auf XD errichtet und bis zu ihrem Durchschnittspunkt mit NP verlängert; der Durchschnittspunkt ist M.

II. Durch drei Punkte der Kugeloberfläche ist ein Kugelkreis völlig bestimmt (§. 245. Nr. 1.).

III. Durch zwei Punkte A und B der Kugeloberfläche, die nicht Endpunkte desselben Durchmessers sind, kann man unendlich viele Kugelkreise legen, aber nur einen größten; letzterer ist also durch solche zwei Punkte bestimmt. — Von allen Kreisbogen auf der Kugeloberfläche, welche A und B verbinden, ist derjenige der kleinste, welcher dem größten Kugelkreise angehört und dessen Centriwinkel kleiner als 180° ist.

Bew. Der Beweis folgt unmittelbar aus §. 133. Nr. 2., wenn man sich alle Kugelkreise so um ihre gemeinschaftliche Sehne AB herum gedreht denkt, daß sie in eine Ebene und ihre Mittelpunkte auf dieselbe Seite der Sehne fallen.

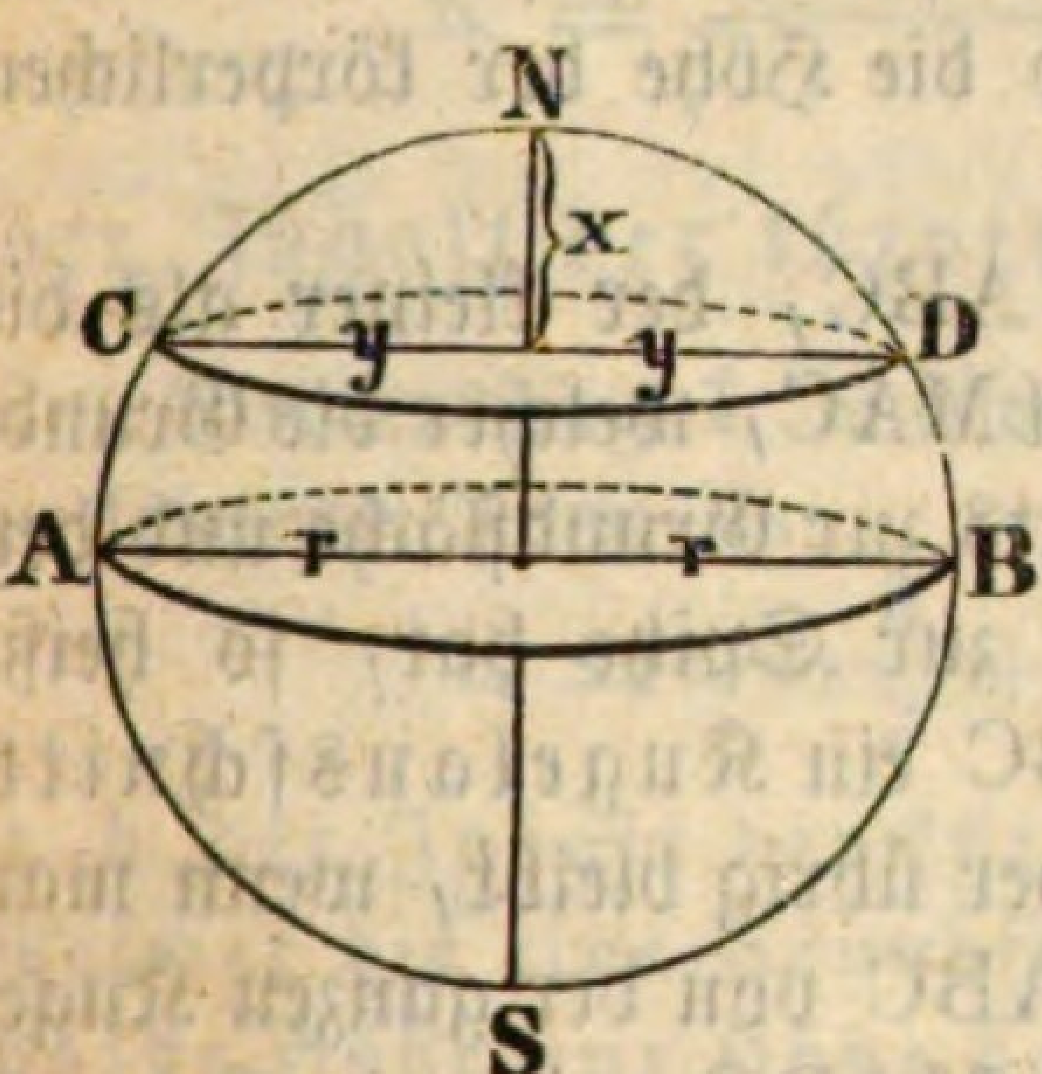
IV. Durch einen Punkt A der Kugeloberfläche kann man nicht nur unendlich viele Kugelkreise, sondern auch unendlich viele größte Kugelkreise legen; die letzteren sind aber Meridiane derselben Axe, und A ist ein Pol dieser Axe.

§. 339.

Lehrsatz.

Die Kugel ist ein Simpsonscher Körper. Die Lage der parallelen Durchschnittsflächen ist hierbei beliebig; die zugehörige Axe ist als Höhe der Kugel zu betrachten; die Grundflächen sind beide Null.

Beweis. Der Radius der Kugel sei $= r$; ferner sei NS eine Axe, AB der Aequator, CD ein Parallelkreis in der Entfernung x von N, sein Radius sei y, also sein Inhalt $= y^2\pi$. Aus §. 337. III. folgt zunächst, daß $y^2\pi$ mit steigenden Werthen von x, von $x = 0$ bis $x = r$ wächst, von $x = r$ bis $x = 2r$ fällt. Denkt man sich ferner in derselben Halbkugel zwei Parallelkreise und bewegt den obern parallel nach unten, den unteren parallel nach oben, so daß der Mittelpunkt jedes Kreises in der Axe bleibt, so erkennt man, daß jede Halbkugel die in §. 308. angegebene Eigenschaft hat. Ferner ist y in einem beliebigen Meridian zur Axe NS ein Loth im Halbkreise; daher verhält sich (§. 129. I.)



$$x : y = y : 2r - x; \text{ folglich ist}$$
$$y^2 = 2rx - x^2, \text{ daher}$$
$$\text{die Durchschnittsfläche} = 2r\pi x - \pi x^2,$$

also eine Function des zweiten Grades von x. Die Kugel hat sonach die in §. 311. angegebene Eigenschaft und ist nach §. 313. ein Simpsonscher Körper.

Anmerkung. Bezeichnet x den Abstand des Parallelkreises CD vom Mittelpunkt der Kugel, so ist $y^2 = r^2 - x^2$, woraus man sehr einfach das Wachsen und Fallen der Durchschnittsflächen erkennt.

§. 340.

Der Inhalt der Kugel.

Der Radius der Kugel sei $= r$, der Durchmesser $= d$. Eine Axe $(2r)$ ist die Höhe, die Grundflächen sind Null, die Mittelfläche $= r^2\pi$, folglich der Inhalt $= \dfrac{0 + 4r^2\pi + 0}{6} \cdot 2r$, oder

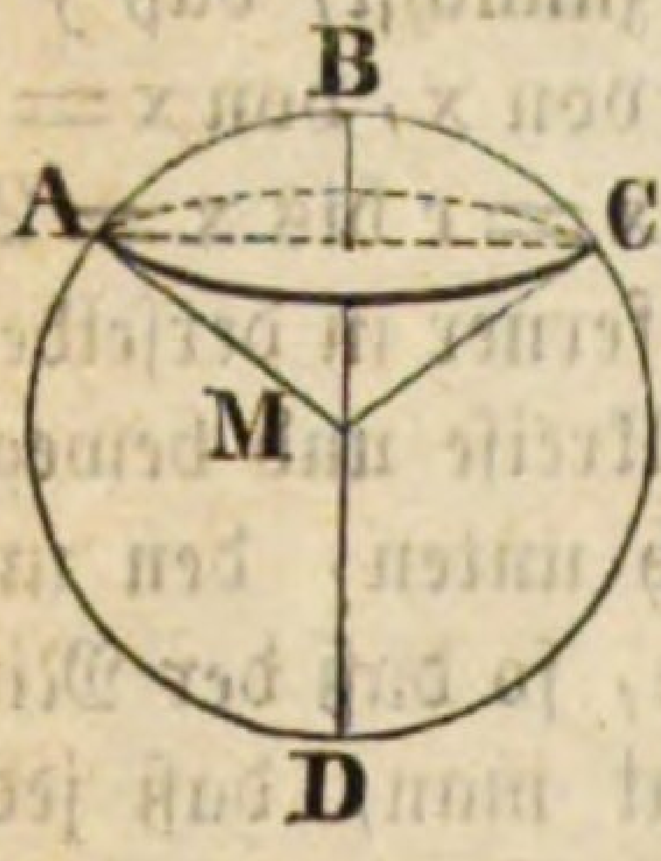
$$\text{der Inhalt der Kugel} = \tfrac{4}{3} r^3\pi = \tfrac{1}{6} d^3\pi.$$

§. 341.
Erklärung.

Jeder Kugelkreis zerlegt die Kugel in zwei **Kugelabschnitte**, der Kugelkreis ist die **Grundfläche** jedes Kugelabschnittes, und der Theil der zugehörigen Axe, welcher in jedem Kugelabschnitt liegt, ist seine **Höhe**; der krumme Theil seiner Oberfläche heißt eine **Kalotte**; die Höhe des Kugelabschnittes heißt auch die **Höhe** der Kalotte.

Der zwischen zwei Parallelkreisen liegende Theil einer Kugel heißt eine **körperliche Zone**, die Parallelkreise sind ihre **Grundflächen**, die Entfernung beider von einander heißt ihre **Höhe**; der krumme Theil ihrer Oberfläche heißt eine **Zone**, und die Höhe der körperlichen Zone ist auch die **Höhe** der Zone.

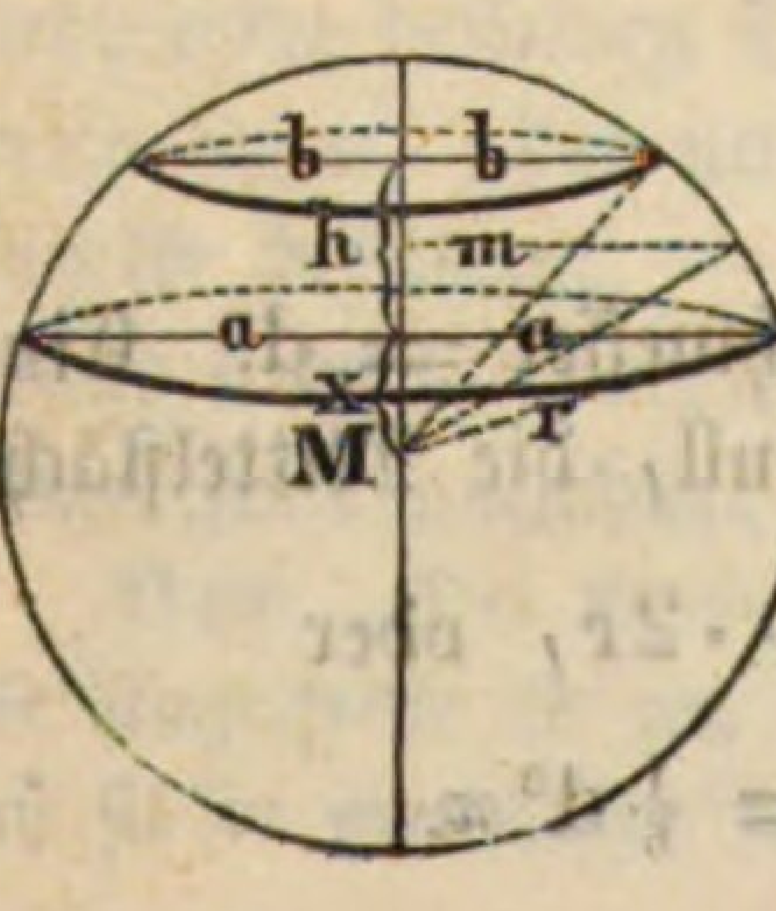
Addirt man zu einem Kugelabschnitt ABC, der kleiner als die Halbkugel ist, den Kegel MAC, welcher die Grundfläche des Kugelabschnitts zur Grundfläche und den Mittelpunkt der Kugel zur Spitze hat, so heißt der ganze Körper MABC ein **Kugelausschnitt**. Auch der Körper, welcher übrig bleibt, wenn man den Kugelausschnitt MABC von der ganzen Kugel abzieht, also der Körper MADC, wird ein **Kugelausschnitt** genannt; er ist die Differenz eines Kugelabschnittes, der größer als die Halbkugel ist, und eines Kegels. Beide Kugelausschnitte gehören demselben Kugelkreise AC an, beide entstehen, wenn ein Kreisausschnitt (CMB oder CMD) um einen der begrenzenden Radien eine volle Umdrehung macht.



§. 342.
Der Inhalt der körperlichen Zone.

Bezeichnen a und b die Radien der Grundflächen und h die Höhe einer körperlichen Zone, und hat die Mittelfläche den Radius m, so ist nach der Simpsonschen Regel der Inhalt:

$$K = \frac{a^2\pi + 4m^2\pi + b^2\pi}{6} h.$$



Bezeichnet x die Entfernung der Grundfläche $a^2\pi$ vom Mittelpunkte M der Kugel, so hat $b^2\pi$ die Entfernung $x + h$ und $m^2\pi$ die Entfernung $x + \frac{h}{2}$ von M; ist ferner r der Radius der Kugel, so folgt aus dem Pythagoreischen Lehrsatz:

$$1)\quad a^2 + x^2 = r^2$$
$$2)\quad b^2 + (x+h)^2 = r^2$$
$$3)\quad m^2 + \left(x+\frac{h}{2}\right)^2 = r^2.$$

Multiplicirt man die dritte Gleichung mit 2 und zieht sie dann von der Summe der ersten beiden Gleichungen ab, so folgt

$$a^2 + b^2 - 2m^2 + \tfrac{1}{2}h^2 = 0, \text{ oder}$$
$$4m^2 = 2a^2 + 2b^2 + h^2.$$

Diesen Werth oben eingesetzt, giebt:

$$K = \frac{a^2 + 2a^2 + 2b^2 + h^2 + b^2}{6}\pi h, \text{ oder}$$

der Inhalt der körperlichen Zone $= \frac{h\pi}{6}(3a^2 + 3b^2 + h^2)$.

Anmerkung 1. Die vorstehende Formel prägt sich dem Gedächtniß besser in folgender Form ein:

$$K = a^2\pi \cdot \frac{h}{2} + b^2\pi \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{6}h^3\pi,$$

d. h. der Inhalt der körperlichen Zone ist gleich einem Cylinder, welcher die eine Grundfläche der Zone zur Grundfläche und ihre halbe Höhe zur Höhe hat, plus einem Cylinder, welcher die andere Grundfläche zur Grundfläche und die halbe Höhe zur Höhe hat, plus einer Kugel, welche die Höhe zum Durchmesser hat.

Anmerkung 2. Liegt der Mittelpunkt der Kugel zwischen $a^2\pi$ und $b^2\pi$, so hat man nur in obige Gleichungen überall $-x$ statt x zu setzen. Die neuen Gleichungen entsprechen dann der veränderten Figur, und die Entwickelung giebt dieselbe Formel.

Anmerkung 3. Zieht man von der körperlichen Zone den abgekürzten Kegel ab, welcher dieselben Grundflächen und dieselbe Höhe hat, so erhält man den Inhalt des Ringes $= \frac{1}{6}h\pi[(a-b)^2 + h^2] = \frac{1}{6}s^2\pi h$, wenn s die Seite des abgekürzten Kegels bedeutet.

§. 343.

Der Inhalt des Kugelabschnittes.

Es bezeichne a den Radius der Grundfläche und h die Höhe des Kugelabschnittes; m sei der Radius der Mittelfläche und x die Entfernung der Grundfläche $a^2\pi$ vom Mittelpunkt der Kugel, so braucht man nur in §. 342. für b überall Null zu setzen, um den Inhalt des Kugelabschnittes zu erhalten. Alle Gleichungen entsprechen dann vollständig der jetzigen Figur, daher auch die Entwickelung und das Resultat. Man erhält den Inhalt des Kugelabschnittes:

$$K = \frac{h\pi}{6}(3a^2 + h^2).$$

Häufig sind aber nicht a und h gegeben, sondern der Radius r der Kugel und h. Für diesen Fall hat man a^2 aus der Gleichung

$$h : a = a : 2r - h$$

zu entwickeln und oben zu substituiren. So erhält man zwei Formeln für den Inhalt, die beide gebraucht werden:

$$\text{Inhalt des Kugelabschnittes} = \frac{h\pi}{6}(3a^2 + h^2) = \frac{h^2\pi}{3}(3r - h).$$

§. 344.

Der Inhalt des Kugelausschnittes.

Der Radius der Kugel sei $= r$, die Höhe des zum Kugelausschnitt MABC (Figur in §. 341.) gehörigen Kugelabschnittes ABC $= h$ und der Radius seiner Grundfläche $= a$, so ist der Inhalt K des Kugelausschnittes:

$$K = \frac{h^2\pi}{3}(3r - h) + \tfrac{1}{3}a^2\pi(h - r).$$

Substituirt man aus der Gleichung $h : a = a : 2r - h$ den Werth von a^2, so folgt:

$$\text{der Inhalt des Kugelausschnittes} = \tfrac{2}{3}r^2\pi h.$$

Anmerkung 1. Diese Formel gilt auch für den Kugelausschnitt, der größer als die Halbkugel ist; denn zieht man $\frac{2}{3}r^2\pi h$ vom Inhalt der Kugel ab, so entsteht $\frac{4}{3}r^3\pi - \frac{2}{3}r^2\pi h = \frac{2}{3}r^2\pi(2r - h)$, und $2r - h$ ist die Höhe des zu jenem Kugelausschnitte gehörigen Kugelabschnittes.

Anmerkung 2. Bezeichnen K und K′ die Inhalte zweier Kugelabschnitte derselben Kugel, h und h′ aber die Höhen der zugehörigen Kalotten, so verhält sich

$$(1.)\quad K : K' = \tfrac{2}{3}r^2\pi h : \tfrac{2}{3}r^2\pi h' = h : h'.$$

Bezeichnet ferner α den Winkel, welchen der Radius der Kugel, der nach einem Punkte der Peripherie des zu K gehörigen Kugelkreises geht, mit der Axe dieses Kugelkreises bildet (in der Figur zu §. 341. ist $\measuredangle$ CMB $= \alpha$), und α' denselben Winkel für den anderen Kugelausschnitt K′: so findet man

$$K = \tfrac{4}{3}r^3\pi\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2;$$

daher verhält sich

$$(2.)\qquad K : K' = \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 : \left(\sin\frac{\alpha'}{2}\right)^2.$$

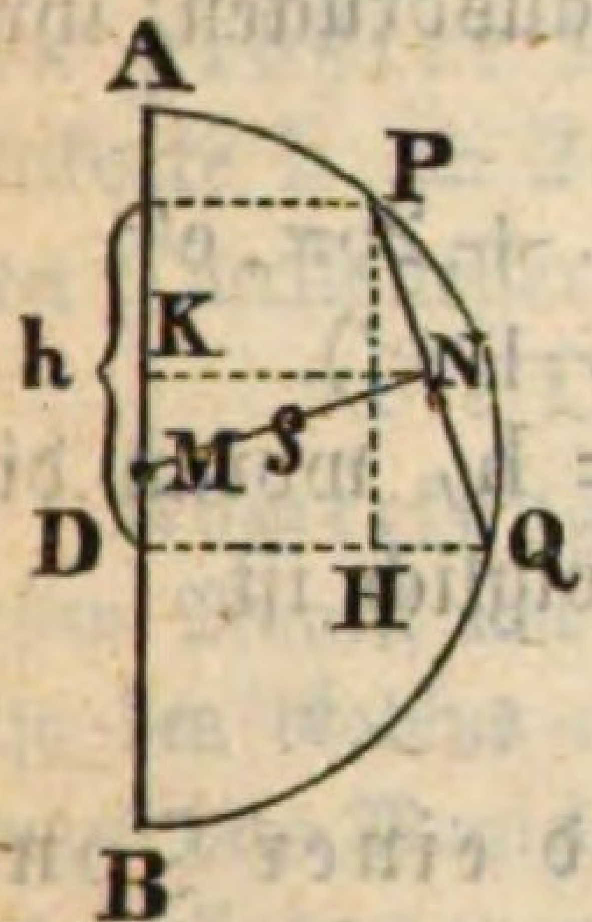
Bezeichnet K′ die ganze Kugel, so folgt aus (1.) und (2.):

$$K : K' = h : 2r = \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 : 1.$$

§. 345.

Flächeninhalt der Kalotte, Zone und Kugeloberfläche.

I. Wenn ein Halbkreis um den begrenzenden Durchmesser AB eine volle Umdrehung macht, so ist der abgekürzte Kegelmantel, den eine beliebige Sehne PQ des Halbkreises bei der Umdrehung beschreibt, einem Cylindermantel gleich, welcher den Abstand MN $= \varrho$ der Sehne vom Mittelpunkt des Kreises zum Radius und die Projection h der Sehne auf den Durchmesser AB zur Höhe hat. Bezeichnet F den Mantel, so ist die Behauptung:



$$F = 2\varrho\pi . h.$$

Beweis. Fällt man vom Mittelpunkt N der Sehne PQ die Linie NK $\perp$ AB, so ist nach §. 333. Anm. 2. (1.) $F = 2 . NK . \pi . PQ.$

Zieht man PH $\#$ AB, so ist Δ PQH $\sim$ Δ NMK (§. 84.); daher verhält sich

PQ : PH = NM : NK oder PQ : h $= \varrho$: NK; folglich ist

(2.) $NK . PQ = \varrho . h.$

Aus (1.) und (2.) folgt aber $F = 2\varrho\pi . h.$

Anmerkung. Der Satz gilt auch, wenn P in A liegt, also die Sehne einen vollen Kegelmantel beschreibt; man setze dann seinen Flächeninhalt

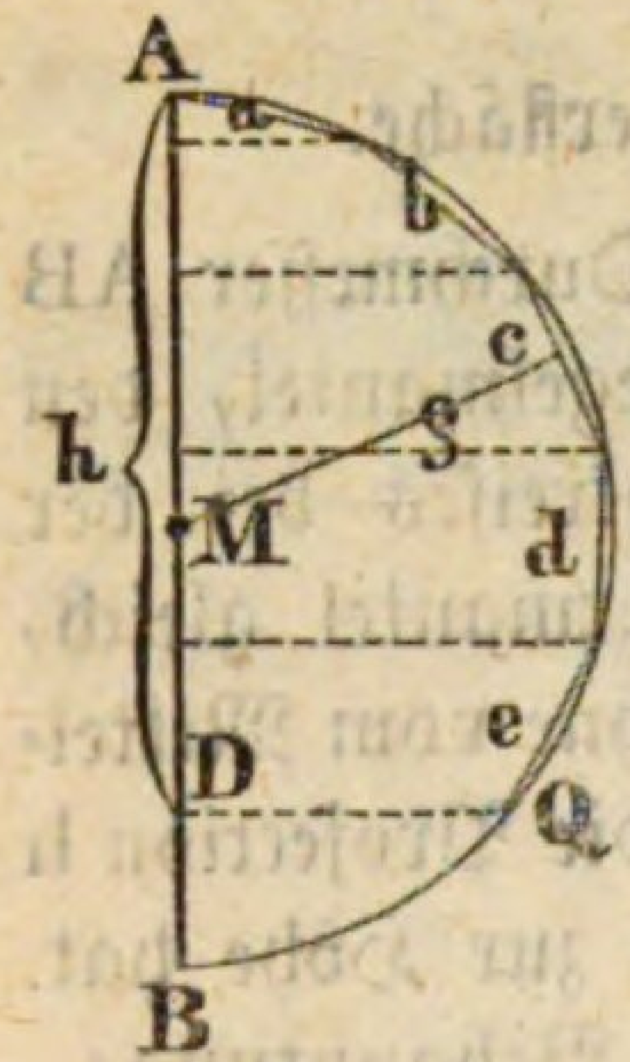
$$DQ . \pi . AQ = 2 . \frac{DQ}{2} . \pi . AQ;$$

$\frac{1}{2}$DQ ist aber der Radius der Mittelfläche, also NK. — Ist PQ $\#$ AB, so beschreibt PQ einen Cylindermantel, und dessen Inhalt ist unmittelbar $= 2\varrho\pi h.$

II. Ist AQ ein beliebig langer Theil des Bogens AB eines Halbkreises, theilt man AQ in n gleiche Theile und zieht zu jedem Theile die zugehörige Sehne: so ist die gebrochene krumme Fläche F, welche die aus den gleichen Sehnen bestehende gebrochene Linie AQ beschreibt, wenn der Halbkreis eine volle Umdrehung um seinen begrenzenden Durchmesser AB macht (Summe eines vollen und n — 1 abgekürzter Kegelmäntel), einem Cylindermantel gleich, welcher den Abstand ϱ des Mittelpunkts des Halbkreises von jeder Sehne zum Radius hat, und dessen Höhe die Summe der Projectionen aller Sehnen auf den Durchmesser AB, also die Projection der Sehne AQ auf AB oder, wenn QD $\perp$ AB steht, die Länge AD = h ist. Die Behauptung heißt also:

$$F = 2\varrho\pi h.$$

Beweis. Bezeichnen wir die gleichen Sehnen von A aus nach der Reihe durch a, b, c, ..., ihre Projectionen auf AB resp. durch a', b', c', ... (die Figur zeigt den Bogen AQ in fünf gleiche Theile getheilt, also auch fünf Sehnen), so können wir die Flächen, welche die einzelnen Sehnen beschreiben, nach I. ausdrücken; ihre Summe ist F.



$$F = 2\varrho\pi . a' + 2\varrho\pi . b' + \ldots\ldots + 2\varrho\pi . e'$$
$$F = 2\varrho\pi(a' + b' + \ldots\ldots\ldots\ldots + e').$$

Es ist aber $a' + b' + \ldots\ldots + e' = h$, woran die Anzahl der Sehnen nichts ändert; folglich ist

$$F = 2\varrho\pi . h.$$

III. **Der Flächeninhalt einer Kalotte und einer Zone ist einem Cylindermantel gleich, der auf dem größten Kugelkreise steht (also den Radius r der Kugel zum Radius hat) und die Höhe h der Kalotte oder Zone zur Höhe hat.** Es ist also:

der Inhalt der Kalotte und Zone $= 2r\pi h$.

Beweis. Der Radius des Halbkreises in der vorstehenden Figur sei $= r$; der Bogen AQ beschreibt bei der Umdrehung um AB die Kalotte von der Höhe h. Die Fläche F, welche die gebrochene Linie AQ erzeugt, war $= 2\varrho\pi h$, und in diesem Product ist nur der Factor ϱ von der Anzahl (n) der gleichen Theile, in welche der Bogen AQ getheilt wurde, abhängig. Denkt man sich nun n immer größer und größer gemacht, so schmiegt sich die gebrochene Linie AQ immer mehr und mehr dem Bogen AQ, die Fläche F immer mehr und mehr der Kalotte an, ϱ aber nähert sich immer mehr dem Radius r; folglich wird $2\varrho\pi h$ nach und nach immer größer. Hieraus folgt aber, daß die Kalotte, welche der Bogen AQ beschreibt, größer sein muß als die Fläche F, welche die gebrochene Linie AQ erzeugt.

Bezeichnen wir nun den Flächeninhalt der Kalotte mit O, die Differenz $O - F$ mit ω, die Differenz $r - \varrho$ mit δ, so ist

$$F = O - \omega \quad \text{und} \quad \varrho = r - \delta.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung

$$F = 2\varrho\pi h$$

ein, so ist $O - \omega = 2(r - \delta)\pi h$ oder

$$O - \omega = 2r\pi h - 2\delta\pi h.$$

Denkt man sich jetzt n immer größer und größer gemacht, so werden ω und δ, also auch $2\delta\pi h$, nach und nach immer kleiner und können der Null beliebig nahe gebracht werden, während die Minuenden O und $2r\pi h$ unverändert bleiben. Nach §. 50. ist daher $O = 2r\pi h$.

Die Zone von der Höhe h (vergl. die Figur in §. 342.) kann man als Differenz zweier Kalotten berechnen. Ist z die Höhe der kleineren Kalotte, also h + z die der größeren, so folgt der Flächeninhalt der Zone $= 2r\pi(h+z) - 2r\pi z = 2r\pi h$.

IV. Die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß, als ein größter Kugelkreis; denn setzt man in die Formel für die Kalotte $h = 2r$, so entsteht $2r\pi . 2r = 4r^2\pi$; folglich ist, wenn d den Durchmesser der Kugel bezeichnet:

$$\text{die Oberfläche der Kugel} = 4r^2\pi = d^2\pi.$$

Anmerkung 1. Denkt man sich einen senkrechten Cylinder construirt, dessen Mantel und dessen Grundflächen die Kugel berühren (§. 337. VII.), der also den Radius r und die Höhe 2r hat, so ist nicht nur die Oberfläche der Kugel dem Mantel des Cylinders gleich, sondern zwei beliebige den Grundflächen des Cylinders parallele Ebenen schneiden auch immer von der Oberfläche der Kugel und von dem Cylindermantel gleiche Theile ab (folgt aus III. und IV.)

Anmerkung 2. Bezeichnet K den Inhalt eines Kugelausschnitts und O den Flächeninhalt der zugehörigen Kalotte, so ist (§. 344.)

$$K = \tfrac{2}{3}r^2\pi h = \tfrac{1}{3}.2r\pi h . r = \tfrac{1}{3}O.h$$

d. h. der Kugelausschnitt kann als ein Kegel betrachtet werden, dessen Grundfläche die Kalotte und dessen Höhe der Radius der Kugel ist. Das Gesetz gilt auch für die ganze Kugel.

§. 346.
Das sphärische Zweieck und Dreieck. Der Kugel-Keil.

I. Zwei größte Kugelkreise zerlegen die Oberfläche der Kugel in vier Theile, von denen jeder ein sphärisches Zweieck heißt; sie zerlegen die Kugel in vier Theile, von denen jeder ein Kugel-Keil heißt.

Den Flächeninhalt des sphärischen Zweiecks und den Kubikinhalt des Kugel-Keils berechnet man aus dem Radius r der Kugel und dem Winkel α, welchen die größten Kugel-Halbkreise mit einander bilden, zwischen welchen das Zweieck und der Keil liegt. Sind in der Figur zu §. 337. IV. NES und NFS die beiden größten Kugel-Halbkreise (halbe Meridiane) und ist EFDL der zugehörige Meridian, so ist $\measuredangle$ EMF $= \alpha$; dieser Winkel wird sonach durch den Bogen EF des Aequators, der zwischen den Halbkreisen liegt, und durch den Radius r bestimmt. (Man nennt EF die Breite des einen Meridians in Bezug auf den andern.) Die Berechnung des Zweiecks und des Keils setzt folgende Sätze voraus:

a) Zu gleichen Neigungswinkeln (α) gehören congruente sphärische Zweiecke und congruente Kugel-Keile.

b) Zwei sphärische Zweiecke, oder zwei Keile verhalten sich zu einander, wie die zugehörigen Neigungswinkel.

Der erste Satz folgt leicht durch Decken, der zweite ist eben so zu beweisen, wie der entsprechende Satz der Kreislehre (§. 131.) — Nach diesem zweiten Satze geschieht die Berechnung, wenn man die Kugel als einen Keil zu dem Neigungswinkel 360° und ihre Oberfläche als ein sphärisches Zweieck betrachtet. Bezeichnet Z den Inhalt des Zweiecks, K das Volumen des Keils, so verhält sich:

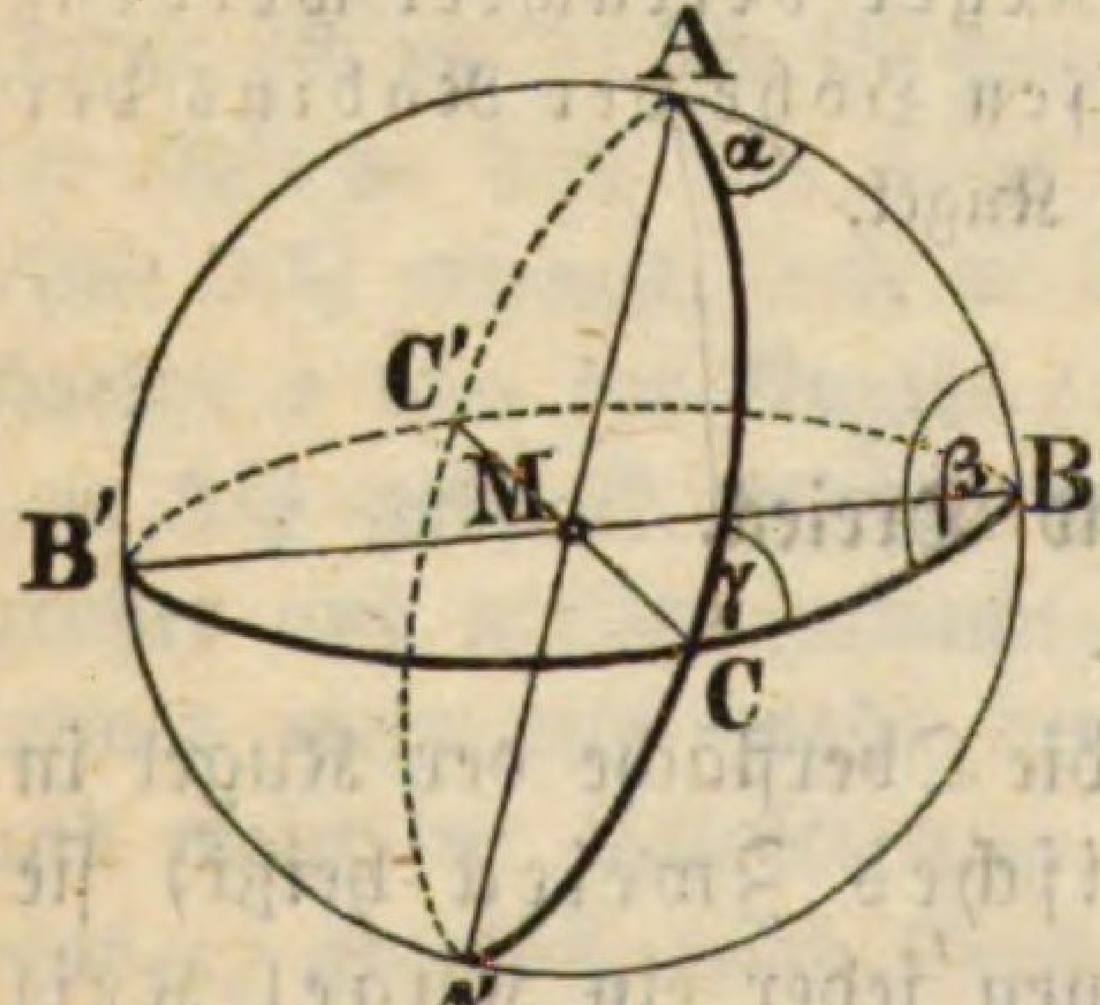
$$Z : 4r^2\pi = \alpha^\circ : 360^\circ$$

$$K : \tfrac{4}{3}r^3\pi = \alpha^\circ : 360^\circ, \text{ daher:}$$

$$\text{der Inhalt des sphärischen Zweiecks} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot 4r^2\pi.$$

$$\text{der Inhalt des Kugel-Keils} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot \tfrac{4}{3}r^3\pi.$$

II. Durch drei größte Kugelkreise, welche sich in drei Durchmessern AA′, BB′ und CC′ schneiden, wird die Oberfläche der Kugel in acht Theile zerlegt, von denen jeder ein sphärisches Dreieck heißt; z. B. △ABC. Die Bogen AB, BC und AC dieses Dreiecks heißen seine Seiten, seine Winkel nennt man die Winkel der körperlichen dreikantigen Ecke, deren Kanten die Radien MA, MB und MC sind. Bezeichnet man sie resp. durch α, β und γ, so kann man α construiren, wenn man in A an die Bogen AB und AC Tangenten legt; diese Tangenten bilden mit einander den Neigungswinkel der Ebenen MAB und MAC, also den Winkel α. Gewöhnlich sagt man, die Seiten (Bogen) AB und AC schließen den Winkel α ein, und markirt den Winkel auch so, wie die Figur ihn zeigt.



Von den acht sphärischen Dreiecken liegen immer zwei einander gegenüber und heißen Scheitel-Dreiecke. Solche Dreiecke haben gleichen Flächeninhalt; sie sind aber nicht congruent, sondern nur symmetrisch gleich, wovon man sich durch die zugehörigen körperlichen Ecken leicht überzeugt.

Um die Gleichheit der Scheiteldreiecke ABC′ und A′B′C zu beweisen, denke man sich durch die Ecken eines jeden den zugehörigen Kugelkreis gelegt; diese Kreise sind einander gleich, weil sie um congruente ebene Dreiecke beschrieben sind, nämlich um die Sehnen-Dreiecke ABC′ und A′B′C. Jedes der beiden sphärischen Dreiecke

erscheint jetzt als Differenz einer Kalotte und dreier mondförmigen Figuren, die man auch sphärische Zweiecke nennen kann, die aber nicht durch zwei halbe Peripherien größter Kugelkreise begrenzt werden. Die beiden Kalotten ABC' und A'B'C sind congruent, und die sphärischen Zweiecke paarweise ebenfalls, z. B. das Zweieck AB $\cong$ B'A', woraus die Gleichheit der Scheitel-Dreiecke folgt. — Zum Beweise lege man die Kalotte ABC' so auf die Kalotte A'B'C, daß ihre Pole und ihre Axen zusammenfallen; dann müssen auch die begrenzenden Kreise ABC' und A'B'C sich decken (indirect z. b.). Denkt man sich nun die Kalotte ABC' um ihre Axe gedreht, bis A in B' fällt, so fällt der Bogen AB entlang B'A' (die Figur zeigt diese Bogen nicht), und B in A', denn die Bogen sind gleich, weil sie in congruenten Kreisen zu gleichen Sehnen gehören. Nach §. 338. III. muß dann aber auch der kleinste Bogen, der A mit B verbindet, den kleinsten Bogen, der B' mit A' verbindet, decken (diese Bogen zeigt die Figur), und die Zweiecke selbst decken sich.

Um den Inhalt F des Dreiecks ABC zu berechnen, addire man dasselbe zu jedem der Dreiecke BCA', ACB' und ABC'; man erhält drei sphärische Zweiecke mit den resp. Winkeln α, β und γ, und setzt man noch Δ A'B'C statt seines Scheiteldreiecks ABC', so folgt aus I.:

$$F + BCA' = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot 2r^2\pi$$

$$F + ACB' = \frac{\beta}{180^\circ} \cdot 2r^2\pi$$

$$F + A'B'C = \frac{\gamma}{180^\circ} \cdot 2r^2\pi.$$

Addirt man diese Gleichungen und setzt statt F+BCA'+ACB'+A'B'C die halbe Kugeloberfläche $2r^2\pi$, so ist

$$2F + 2r^2\pi = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{180^\circ} \cdot 2r^2\pi, \text{ folglich}$$

$$F = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{180^\circ} \cdot r^2\pi - r^2\pi.$$

Hieraus folgt, wenn man noch nach §. 163. (7.) arcα statt $\frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$ setzt:

der Inhalt des sphärischen Dreiecks

$$= \frac{\alpha+\beta+\gamma-180^\circ}{180^\circ} \cdot r^2\pi = r^2 . \operatorname{arc}(\alpha+\beta+\gamma-180^\circ).$$

Anmerkung. Man nennt den Winkel, um welchen 180° von der Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks übertroffen wird, also $\alpha+\beta+\gamma-180^\circ$, den sphärischen Exceß. Bezeichnet

man den Inhalt des sphärischen Dreiecks durch F, den sphärischen Exceß durch ε, so ist

$$F = \frac{\varepsilon}{180^\circ} \cdot r^2\pi,$$

woraus die Proportion folgt:

$$F : 4r^2\pi = \frac{\varepsilon}{2} : 360^\circ,$$

d. h. der Inhalt des sphärischen Dreiecks verhält sich zur Kugeloberfläche, wie der halbe sphärische Exceß zu 360°. — Statt $\frac{\varepsilon}{2} : 360^\circ$ kann auch $\operatorname{arc}\frac{\varepsilon}{2} : 2\pi$ gesetzt werden.

Beisp. Wie groß ist der Inhalt eines sphärischen Dreiecks auf der Erdoberfläche, dessen Winkel $62^\circ\,16'$, $76^\circ\,24'$ und $112^\circ\,40'$ sind, wenn die Erde als eine Kugel zum Radius 859,5 geogr. Meilen betrachtet wird?

Antw. 919733 Quadrat-Meilen.

§. 347.

Uebungs-Aufgaben über die Kugel.

1) Aus dem Inhalt a^3 einer Kugel ihre Oberfläche O zu berechnen.

Aufl. Bezeichnet x den Radius, so ist

1) $\frac{4}{3}x^3\pi = a^3$ und 2) $O = 4x^2\pi$; hieraus folgt $O = a^2\sqrt[3]{36\pi}$.

2) Die ganze Oberfläche einer Halbkugel sei $= a^2$; wie groß ist ihr Inhalt?

Antw. $\frac{2a^3}{9\sqrt{3\pi}}$.

3) Wie groß ist der Inhalt einer körperlichen Zone mit den Grundflächen 100 □′ und 50 □′ und der Höhe 5′?

Antw. $375 + \frac{125}{6}\pi = 440{,}45$ C′.

4) Die Grundflächen einer körperlichen Zone haben die Radien 12′ und 7,8′; ihre Höhe ist 15,4′; wie groß die ganze Oberfläche?

Antw. 1901,417 □′.

5) An einen Cylinder, dessen Radius zur Höhe das Verhältniß 1:3 hat, ist eine Halbkugel angesetzt, deren Grundfläche die eine Grundfläche des Cylinders deckt. Die Oberfläche dieses ganzen Körpers ist $= a^2$; wie groß der Inhalt?

Antw. $\frac{11}{81} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{\pi}}$.

6) Der Durchmesser einer Kugel sei 26′, die Höhe eines Abschnittes dieser Kugel 9′; wie groß das Volumen und die ganze Oberfläche des Kugelabschnittes?

Antw. 2544,69 C′ und 1215,79 □′.

7) Es soll der Flächeninhalt der Erdzonen berechnet werden, wenn die Erde als Kugel zum Radius 860 Meilen betrachtet wird. (Die Wendekreise 23° 30′ vom Aequator und die Polarkreise eben so weit von den Polen.)

Aufl. Es sei $r = 860$ und $\alpha = 23°\ 30'$, so ist
die Höhe der ganzen heißen Zone $= 2r \,.\, \sin\alpha$;
die Höhe jeder kalten Zone $= r - r\cos\alpha = 2r \,.\, \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$;
» » » gem. Zone $= r\cos\alpha - r\sin\alpha$
$= 2r \,.\, \cos 45° \,.\, \sin(45° - \alpha)$.

Hieraus folgt:
Die ganze heiße Zone $= 4r^2\pi \,.\, \sin\alpha = 3706010$ □M.
Jede kalte Zone $= 4r^2\pi \,.\, \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 385425{,}5$ □M.
Jede gem. Zone $= 4r^2\pi \,.\, \cos 45° \,.\, \sin(45° - \alpha) = 2408614$ □M.

8) Wenn ein Kreisausschnitt zum Radius $r = 10'$ und dem Centriwinkel $\alpha = 28°\ 41'\ 10''$ um den einen begrenzenden Radius eine volle Umdrehung macht, wie groß ist der Inhalt des entstandenen Körpers (Kugelausschnittes)?

Antw. $\frac{4}{3} r^3\pi \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 257{,}06$ C′.

9) Der Radius einer Kugel sei 10′; wie groß ist der Inhalt desjenigen Abschnittes dieser Kugel, dessen ganze Oberfläche viermal so groß ist, als seine Grundfläche?

Antw. $\frac{80000}{81}\pi = 3102{,}8$ C′.

10) Durch den Mittelpunkt der Höhe einer Halbkugel ist eine mit der Grundfläche parallele Ebene gelegt; wie verhalten sich die beiden Theile der Halbkugel zu einander?

Antw. Wie 5 zu 11.

11) Eine Kugel zum Radius r soll durch zwei Parallelkreise in 3 Theile mit gleichen Oberflächen zerlegt werden.

Aufl. Jeder Parallelkreis muß vom Mittelpunkte der Kugel den Abstand $r(3 - 2\sqrt{2})$ haben.

12) Zwischen zwei Ebenen, welche sich unter einem Winkel von 60° schneiden, liegt eine Kugel, die beide Ebenen berührt. Der directe Abstand der beiden Berührungspunkte von einander ist 6′; wie groß ist der Inhalt der Kugel?

Antw. $32\pi\sqrt{3} = 174{,}124$ C′. Die Ebene, welche man durch die beiden Radien legen kann, die zu den Berührungspunkten führen, steht auf den gegebenen Ebenen, also auch auf ihrer Durchschnittslinie senkrecht, erzeugt daher den Neigungswinkel der Ebenen.

13) Wie groß ist die Oberfläche derjenigen Kugel, die man durch die 8 Ecken eines rechtwinkligen Parallelopipedons mit den Kanten a, b, c legen kann? (Vergl. §. 297. Nr. 4.)

Antw. $(a^2 + b^2 + c^2)\pi$.

14) Der Inhalt einer Kugel sei a^3; wie groß ist der Inhalt des in die Kugel eingeschriebenen Würfels (dessen Ecken also in der Kugeloberfläche liegen)?

Antw. $\frac{2a^3}{\pi\sqrt{3}}$.

15) Der Mittelpunkt einer Kugel zum Radius b liegt in der Oberfläche einer zweiten Kugel zum Radius a. Es sei $b < 2a$; wie groß ist der Inhalt des gemeinschaftlichen Theiles beider Kugeln?

Aufl. Der Körper, dessen Inhalt gesucht wird, ist die Summe zweier Kugelabschnitte. Bezeichnen x und y resp. die Höhen der Abschnitte in den Kugeln mit den Radien a und b, so ist der gesuchte Inhalt K:

$$K = \frac{x^2\pi}{3}(3a - x) + \frac{y^2\pi}{3}(3b - y).$$

Ferner ist $x + y = b$, und $x = \frac{b^2}{2a}$ (§. 129. II.). Man erhält den gesuchten Inhalt $= \frac{8a - 3b}{12a} \cdot b^3\pi$. — Für $a = b$ ist dieser Inhalt $= \frac{5}{16}$ vom Inhalt jeder Kugel.

16) Welchen Winkel muß jede Seite eines unbegrenzten Kegels mit der Axe bilden, damit in den Kegel eine Kugel vom Radius 10′ eingeschrieben werden kann, welche vom Kegelmantel in einer Kreisperipherie von 50′ Länge berührt wird, und wie weit ist der Mittelpunkt der Kugel von der Spitze des Kegels entfernt?

Antw. 37° 16′ 18″ (aus der Gleichung $\cos x = \frac{5}{2\pi}$) und 16,5127′.

17) Den Radius x der Kugel zu bestimmen, welche sich in einen Kegel mit dem Radius r und der Höhe h einschreiben läßt. (§. 337. VIII.)

Aufl. Jede durch die Axe des Kegels gelegte Ebene schneidet die Oberfläche des Kegels in einem gleichschenkligen Dreieck und die Oberfläche der Kugel in einem Kreise, der die Seiten jenes Dreiecks berührt. Aus ähnlichen Dreiecken folgt $h - x : x = \sqrt{r^2 + h^2} : r$, folglich ist $x = \frac{hr}{r + \sqrt{r^2 + h^2}}$.

18) Der Inhalt eines Kegels sei $= a^3$, und jede Seite habe zum Radius der Grundfläche das Verhältniß 3 : 1. Man soll den Inhalt der in den Kegel eingeschriebenen Kugel und das Verhältniß der Oberflächen beider Körper zu einander finden.

Aufl. Bezeichnen x und y den Radius und die Höhe des Kegels, z den Radius der Kugel, so ist:

1) $\frac{1}{3}x^2\pi y = a^3$.

2) $x^2 + y^2 = (3x)^2$.

3) $y - z : z = 3 : 1$.

Man findet: $y = 2a\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$; $x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ und $z = \frac{a}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$; Inhalt der Kugel $= \frac{1}{2}a^3$. Die Oberfläche der Kugel $(a^2.\sqrt[3]{9\pi})$ ist die Hälfte der Oberfläche des Kegels und verhält sich zum Mantel des Kegels wie 2:3.

19) Ein Kegel vom Radius 7,5′ und der Höhe 18′ wird durch die Oberfläche einer Kugel, welche die Spitze des Kegels zum Mittelpunkt hat, halbirt; wie groß ist der Inhalt der Kugel?

Antw. $78 . 7{,}5^2 . \pi = 13783{,}7$ C′.

20) Die Höhe eines Kugelabschnittes sei $= h$, der Radius der Kugel $= r$. Der Kugelabschnitt ist durch einen Kegel ausgehöhlt, welcher die Grundfläche des Abschnitts zur Grundfläche, seine Spitze aber in der Kalotte hat. Wie groß ist der Inhalt des ausgehöhlten Körpers?

Antw. $\frac{1}{3}h^2\pi r$.

21) Eine Kugel zum Radius r soll durch eine Ebene so in zwei Abschnitte zerlegt werden, daß sich die ganzen Oberflächen dieser Abschnitte zu einander wie 5:8 verhalten; wie groß ist die Höhe des kleineren Kugelabschnitts?

Antw. $\frac{1}{3}r$.

22) Der Radius einer Kugel ist 10′; wie groß ist der Inhalt des Abschnitts dieser Kugel, dessen ganze Oberfläche seiner fünffachen Grundfläche gleich ist?

Antw. 3534,29 C′ $\left(\frac{9000}{8}\pi\right)$.

23) Zwischen zwei Ebenen, welche sich unter einem Winkel von 48° 48′ schneiden, liegt eine beide Ebenen berührende Kugel. Die Berührungspunkte sind 10,35′ von der Durchschnittslinie beider Ebenen entfernt; gesucht wird Oberfläche und Inhalt der Kugel.

Aufl. Oberfl. = 276,997 □′, Inh. = 433,4973 C′.

24) Eine Halbkugel vom Radius 6,5′ ist in der Entfernung 4′ von ihrer Axe durch eine mit der Axe parallele Ebene durchschnitten; gesucht wird der krumme Theil der Oberfläche und der Inhalt jedes Theils der Halbkugel.

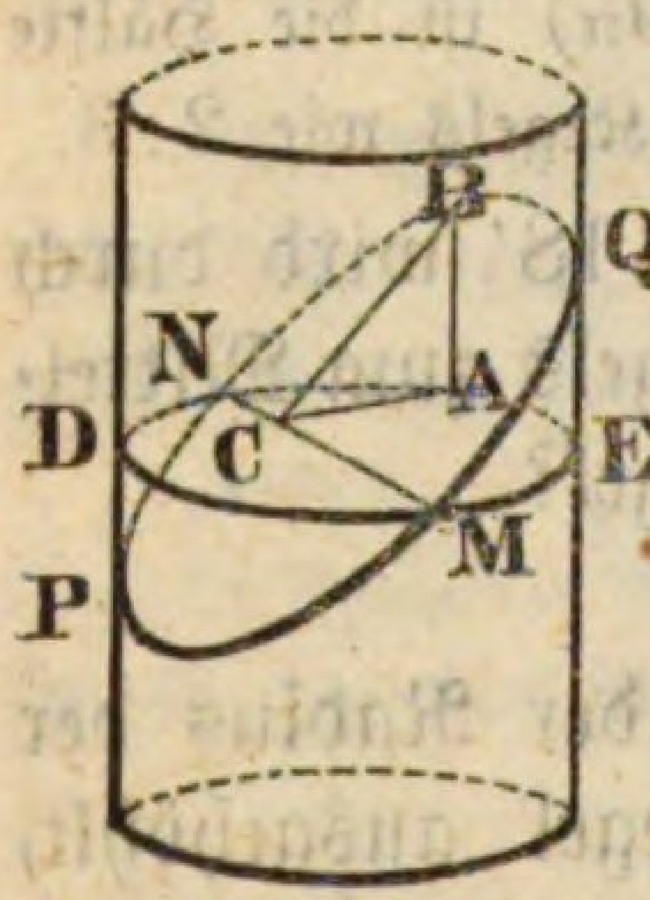
Aufl. 51,0509 □′ und 214,4137 □′; und resp. 55,6323 C′ und 519,541 C′.

§. 348.

Das Kreuzgewölbe.

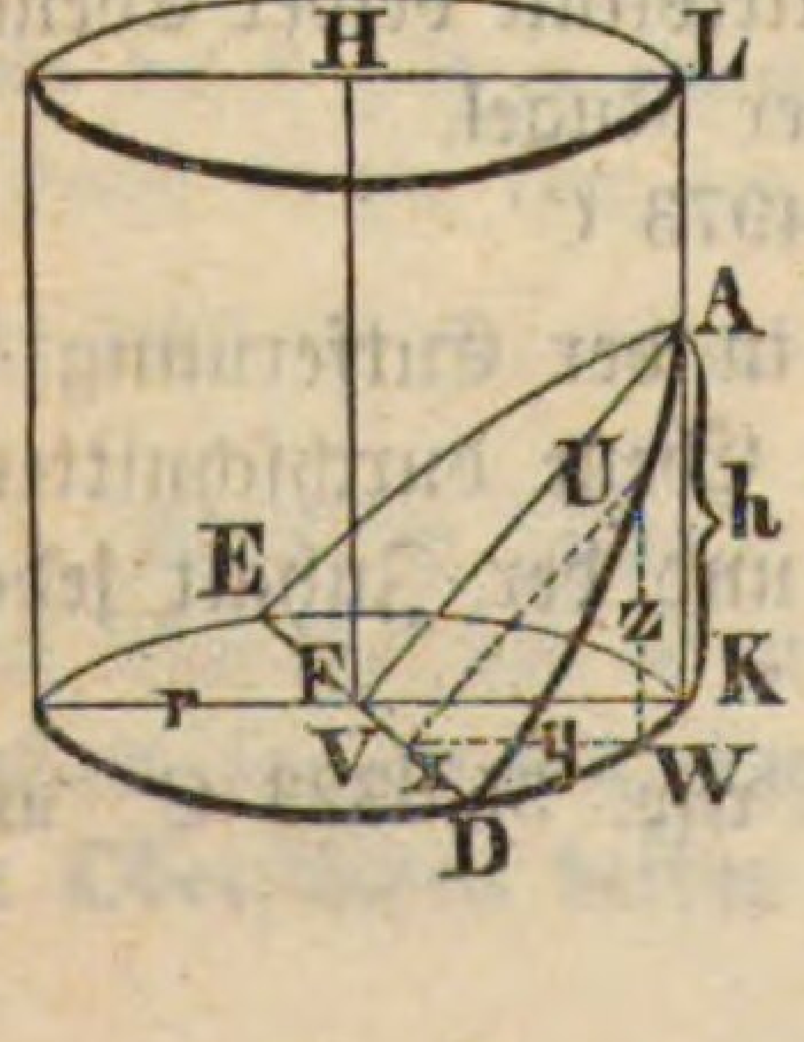
I. Ein Cylinder, den man sich mit verticaler Axe denken mag, ist durch eine Ebene schief zur Axe durchschnitten; man soll den höchsten und tiefsten Punkt der krummen Linie bestimmen, in welcher die Ebene den Mantel des Cylinders schneidet.

Auflösung. PQ sei die den Cylinder schief schneidende Ebene, DE aber eine die Axe senkrecht schneidende Durchschnittsebene, also



ein Kreis; PQ und DE schneiden sich in NM. Es sei A ein beliebiger Punkt in der Peripherie des Kreises DE; man fälle AC ⊥ NM und errichte AB ⊥ DE; B liege in der Durchschnittslinie der Ebene PQ mit dem Cylindermantel. Zieht man BC, so ist ∡ ACB der Neigungswinkel der Ebenen PQ und DE zu einander, also constant, etwa gleich α. Dann ist $AB = AC \cdot tg\,\alpha$, und AB wird um so größer, je größer AC ist. Am größten ist aber AC, wenn C der Mittelpunkt der Sehne NM ist, wenn also AC, nöthigenfalls verlängert, die Axe des Cylinders trifft. In diesem Falle ist also auch AB am größten, und liegt B am höchsten. Weil aber die Ebene ABC als Ebene des Neigungswinkels α auf PQ und DE senkrecht steht, so folgt das Gesetz: Legt man durch die Axe des Cylinders eine Ebene, welche die Ebene PQ senkrecht schneidet, so ist der eine Durchschnittspunkt dieses Axenschnittes mit der krummen Linie PQ der höchste Punkt dieser Linie; der andere ist der tiefste, was eben so zu beweisen ist. — Auf beiden Seiten des höchsten Punktes liegen immer zwei und zwei Punkte der Linie PQ gleich hoch, was daraus folgt, daß es zu jedem ΔABC auf der einen Seite des höchsten Punktes ein ihm congruentes Dreieck auf der anderen Seite giebt.

II. Durch einen Cylinder ist eine Ebene ADE gelegt, welche die eine Grundfläche des Cylinders in dem Durchmesser DE und den Mantel des Cylinders in der krummen Linie EAD schneidet und mit



der Axe FH einen beliebigen spitzen Winkel bildet; man soll den hufförmigen Körper ADEK (Cylinder-Huf) berechnen, welchen die Ebene ADE von dem Cylinder abschneidet.

Auflösung. Legt man durch die Axe FH des Cylinders eine Ebene FHLK, welche die Ebene ADE senkrecht schneidet, und ist FA die Durchschnittslinie dieses Axenschnitts mit der Ebene ADE, FK aber seine Durchschnitts-

linie mit der Grundfläche des Cylinders, so steht $\Delta AFK \perp DE$, und A ist der höchste Punkt der krummen Linie EAD. Es sei der Radius des Cylinders $= r$, und $KA = h$. Betrachtet man DE als die Höhe des Körpers ADEK, so sind seine beiden Grundflächen Null, und ΔAFK ist seine Mittelfläche. Schneidet man ferner den Körper an beliebiger Stelle durch eine auf DE senkrechte Ebene VWU, so ist die Durchschnittsebene ein rechtwinkliges ΔVWU, und setzt man $DV = x$, $VW = y$ und $WU = z$: so folgt

(1.) $\Delta VWU = \frac{1}{2}yz$.

Aus der Proportion $x : y = y : 2r - x$ folgt aber

(2.) $y^2 = 2rx - x^2$,

und weil $\Delta VWU \sim \Delta FKA$ ist, so folgt ferner $y : z = r : h$; daher ist

(3.) $z = \frac{h}{r} y$.

Setzt man zuerst den Werth von z aus (3.) in (1.) ein, dann aber in die entstandene Gleichung den Werth von y^2 aus (2.): so ergiebt sich

(4.) $\Delta VWU = \frac{h}{2r} y^2 = \frac{h}{2r}(2rx - x^2)$.

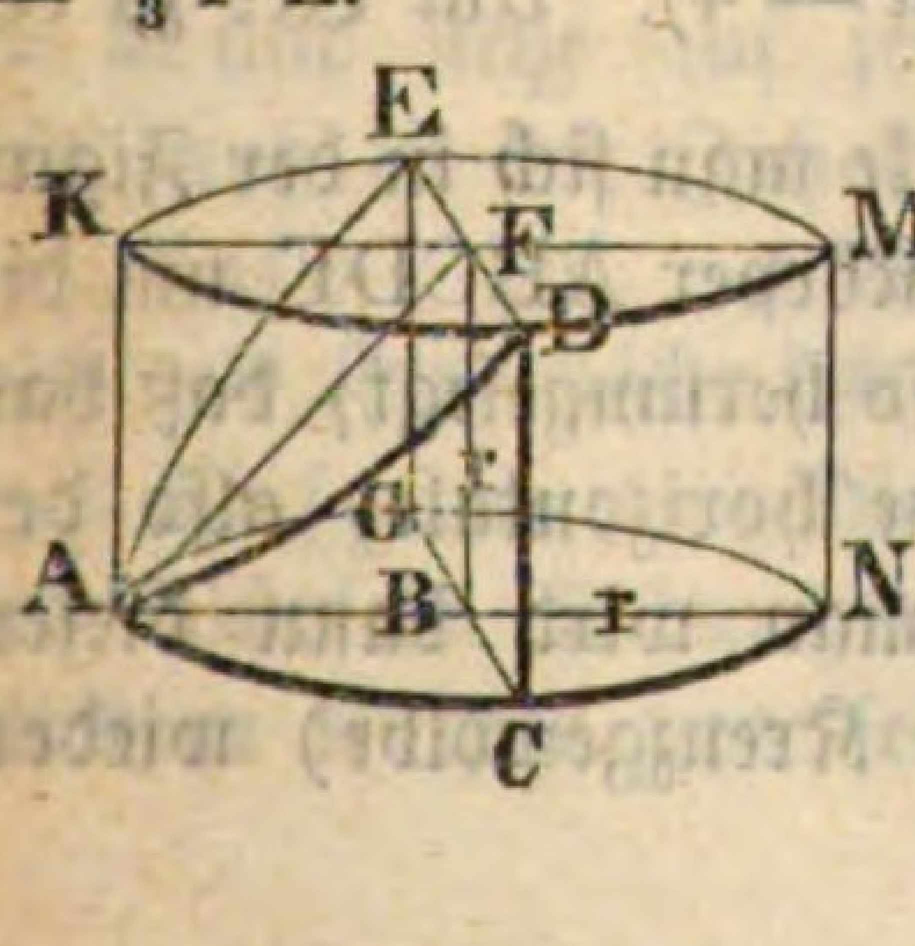
Diese Gleichung gilt für jeden Werth von x, von $x = 0$ bis $x = 2r$. Denkt man sich ΔVWU parallel fortbewegt, so läßt sich leicht zeigen, daß der Körper ADEK die in §. 311. angegebene Eigenschaft hat; er ist daher ein Simpsonscher Körper und sein Inhalt

$$= \frac{0 + 4 \cdot \frac{1}{2}rh + 0}{6} \cdot 2r = \frac{2}{3}r^2h,$$

also unabhängig von π.

Der Inhalt des Cylinder-Hufes $= \frac{2}{3}r^2h$.

Anmerk. Der Cylinderhuf ADEK wird durch das ΔAFK halbirt; denn berechnet man den Theil AFDK nach der Simpsonschen Regel, so ist die Mittelfläche $= \frac{h}{2r}\left[2r \cdot \frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right] = \frac{3}{8}rh$, folglich der Inhalt des Körpers AFDK $= [0 + 4 \cdot \frac{3}{8}rh + \frac{1}{2}rh] \cdot \frac{r}{6}$ $= \frac{1}{3}r^2h$.



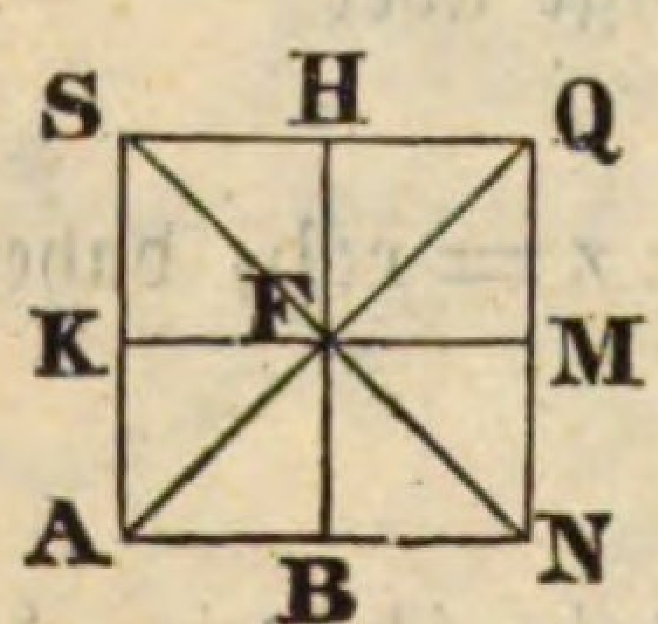
III. In dem Cylinder ANMK zum Radius $BA = r$ sei auch die Höhe $BF = r$; ANMK und GCDE sind zwei auf einander senkrechte Axenschnitte, und durch den Punkt A und den Durchmesser ED ist eine Ebene ADE gelegt; man soll den Inhalt des Körpers ABCDF

berechnen, welcher von dem Quadranten ABC, dem Rechteck BCDF, dem ΔABF, der Ebene ADF und der Fläche ACD begrenzt wird.

Aufl. Man zieht den halben Cylinderhuf ADFK von dem cylindrischen Körper ab, der zwischen den parallelen Quadranten ABC und KFD liegt und der vierte Theil des ganzen Cylinders ist. So entsteht:

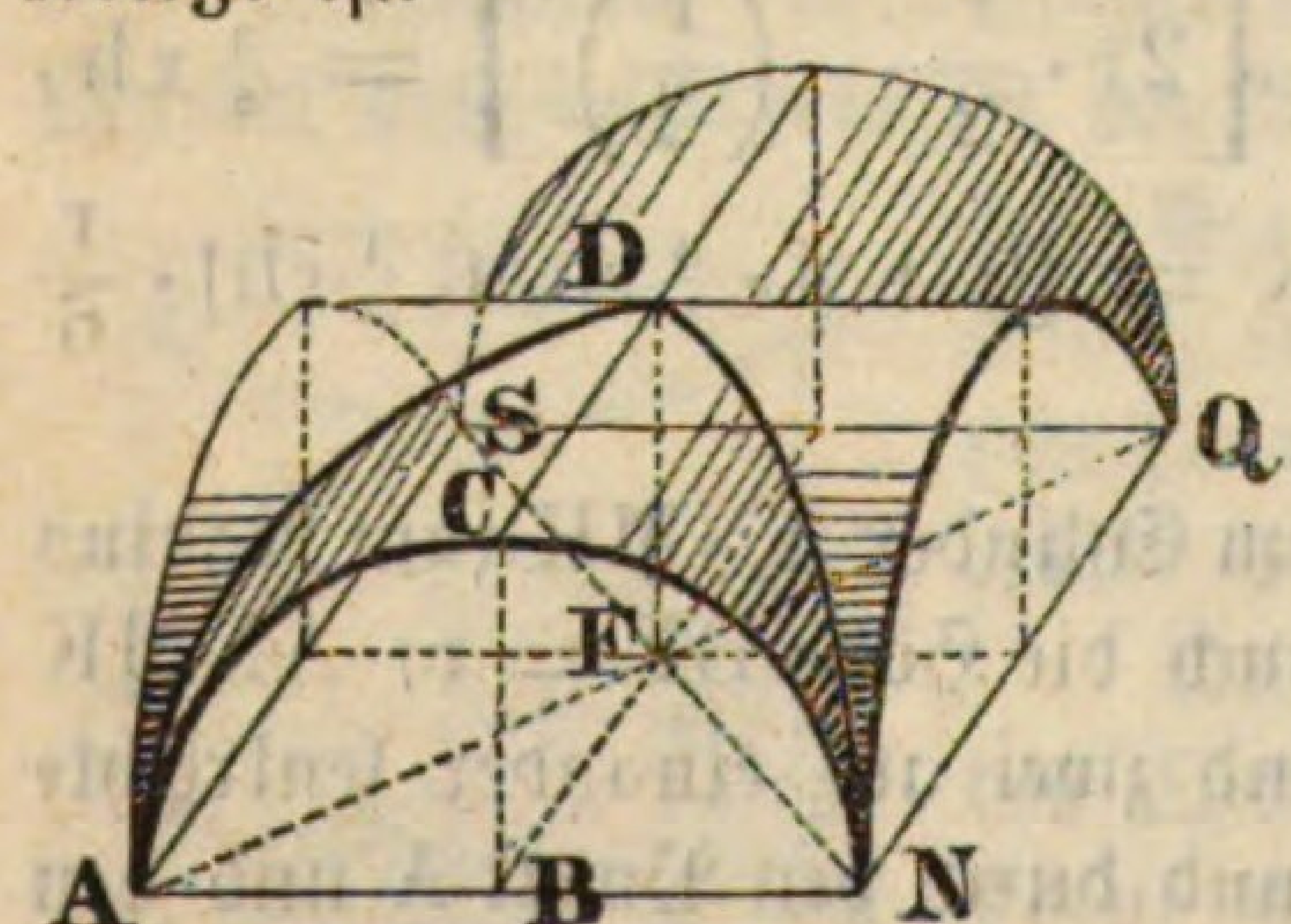
$$ABCDF = \tfrac{1}{4}r^2\pi \,.\, r - \tfrac{1}{3}r^2 \,.\, r = \frac{r^3}{12} \cdot (3\pi - 4).$$

IV. Construction des Kreuzgewölbes. Im Quadrate ANQS



sind die Diagonalen gezogen und durch ihren Durchschnittspunkt F die mit den Seiten parallelen Linien BH und KM; das Quadrat ist so in 8 congruente Dreiecke zerlegt. Man denke sich über das Quadrat ANQS einen halben Cylinder construirt, dessen Axe BH und dessen Radius BA = BN = r ist, und lege dann durch AQ und NS zwei auf ANQS senkrechte Ebenen. Diese zerlegen den halben Cylinder in 4 Theile, von denen man sich die beiden, welche über AFS und NFQ stehen, fortgenommen denken muß. Dann denke man sich über ANQS einen zweiten halben Cylinder construirt, dessen Axe KM und dessen Radius KA = KS = r ist. Legt man jetzt wieder durch AQ und NS zwei auf ANQS senkrechte Ebenen, so wird durch sie auch der zweite halbe Cylinder in 4 Theile zerlegt, von denen man die beiden sich fortdenken muß, welche über AFN und SFQ stehen. Die vorhin und die jetzt stehen gebliebenen Cylinder-Theile bilden das Kreuzgewölbe.

V. Inhalt des Kreuzgewölbes. Das Kreuzgewölbe über dem Quadrate ANQS besteht aus 8 gleichen Theilen, von denen jeder über einem der 8 congruenten Dreiecke liegt, in welche das Quadrat zerlegt ist.



Jeder Theil ist aber der in III. berechnete Körper, hat also der Inhalt $\frac{r^3}{12}(3\pi - 4)$. Um dies zu erkennen, denke man sich in der Figur zu III. den Körper ABCDF um die Kante AB so herumgelegt, daß das Δ ABF eine horizontale, also der Quadrant ABC eine vertikale Lage erhält; man wird dann diesen Körper leicht in der nebenstehenden Figur (im Kreuzgewölbe) wieder

erkennen, wo er durch dieselben Buchstaben bezeichnet ist. Es ist sonach der Inhalt des Kreuzgewölbes $= 8 \cdot \frac{r^3}{12}(3\pi - 4) = \frac{2}{3} r^3 (3\pi - 4)$.

Hieraus ergiebt sich eine Näherungs-Formel. Es ist

$$\frac{2}{3} r^3 (3\pi - 4) = 3{,}6165 . r^3 = 0{,}9041 . (2r)^2 . r.$$

Nun ist aber $(2r)^2$ die Grundfläche ANQS und r die Höhe FD des Gewölbes; folglich ist der Inhalt des Kreuzgewölbes annähernd $= \frac{9}{10}$ ANQS × FD, d. h. $\frac{9}{10}$ des Productes aus Grundfläche und Höhe.

§. 349.

Vermischte Uebungs-Aufgaben.

Vorbemerkung. Das Verhältniß des (absoluten) Gewichts eines physischen Körpers von beliebiger Materie und beliebigem Volumen zu dem Gewichte, welches ein eben so großes Volumen reinen Wassers hat, heißt das specifische Gewicht jener Materie oder auch jenes Körpers. Nun wiegt ein Kubikfuß ddc. Wasser im Mittel $61\frac{3}{4}$ Pfund, welche Zahl mit γ bezeichnet werden soll; folglich wiegen a Kubikfuß Wasser $a\gamma$ Pfund. Hat also der Körper von anderer Materie den Inhalt a Kubikfuß ddc. und das specifische Gewicht δ, und bezeichnet G sein absolutes Gewicht, so ist

$$\frac{G}{a\gamma} = \delta, \text{ folglich } G = a\gamma\delta \text{ Pfund,}$$

d. h. man findet das (absolute) Gewicht eines Körpers, wenn man seinen Inhalt in Kubikfuß ddc. ausdrückt, die erhaltene unbenannte Zahl mit dem Gewichte eines Kubikfußes reinen Wassers ($\gamma = 61\frac{3}{4}$) multiplicirt, das Product aber noch mit dem specifischen Gewicht des Körpers. ($\log\gamma = 1{,}7906370$.)

Aufgabe 1. Wie viel wiegt eine gußeiserne cylindrische Röhre von 10 Fuß Länge, welche durchweg $\frac{1}{4}$ Zoll Dicke hat, und deren innerer Radius = 6 Zoll ist. Das specifische Gewicht des Gußeisens ist = 7,5.

Antw. 309,4296 Pfund.

Aufgabe 2. Eine Kugel von Gußeisen wiegt 12 Pfund, wie groß ist ihr Radius?

Antw. 2 Zoll 2,4 Linien.

Aufgabe 3. Jede Seitenkante einer dreiseitigen Pyramide sei = a und stehe auf jeder der beiden andern Seitenkanten senkrecht; wie groß ist der Inhalt der Pyramide?

Antw. $\frac{1}{6}a^3$. — Bei der dreiseitigen Pyramide kann man jede Seitenfläche als Grundfläche betrachten.

Aufgabe 4. Die Kante eines Würfels ist = a. Jede Ecke des Würfels ist durch eine Ebene so abgeschnitten, daß der übrig gebliebene Körper von sechs regulären congruenten Achtecken und von

acht gleichseitigen congruenten Dreiecken begrenzt wird; wie groß ist der Inhalt dieses Körpers?

Antw. Der Inhalt ist $= \frac{7}{3}(-1+\sqrt{2})a^3$. — Man vergl. das Beispiel 3. Seite 228 der ebenen Geometrie.

Aufgabe 5. Wenn ein Halbkreis um seinen begrenzenden Durchmesser eine volle Umdrehung macht, wie groß ist dann der ringförmige Körper, den ein Segment dieses Halbkreises bei der Umdrehung beschreibt, dessen Sehne a dem Durchmesser parallel ist?

Aufl. Der Körper ist ein Simpsonscher (§. 314.). Bezeichnet r den Radius des Halbkreises und x den Abstand der Sehne a vom Mittelpunkt, so ist der Inhalt $= \frac{0 + 4(r^2 - x^2)\pi + 0}{6} \cdot a$. Nun ist aber $r^2 - x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$; folglich ist der gesuchte Inhalt $= \frac{1}{6}a^3\pi$. Der Inhalt ist sonach von der Größe des Halbkreises unabhängig, also in allen Halbkreisen derselbe (bei derselben Sehne a). Denkt man sich nun den Halbkreis nach und nach immer größer gemacht, so wird das Segment zur Sehne a nach und nach immer kleiner (vergl. §. 133. Nr. 2.); weil aber der Inhalt des Körpers, den das Segment beschreibt, unverändert bleibt, so erkennt man, daß die Abnahme der Größe des Segments ausgeglichen wird durch die Zunahme seiner Entfernung von der Axe, um welche die Drehung Statt findet.

Aufgabe 6. Wie viel Würfel mit der Kante b Zoll kann man aus a Pfund Blei gießen, wenn dessen specifisches Gewicht $= \delta$ ist?

Antw. $\frac{1728\,a}{b^3\gamma\delta}$.

Aufgabe 7. Die Oberfläche eines Würfels sei $= a^2$; eine Halbkugel hat mit dem Würfel gleiches Volumen; wie groß ist die ganze Oberfläche der Halbkugel?

Antw. $\frac{1}{4}a^2\sqrt[3]{18\pi}$.

Aufgabe 8. Der Mittelpunkt einer Kugel vom Halbmesser 10′ liegt in dem Mittelpunkte der Axe eines Cylinders, welcher 30′ lang ist und den Radius 8′ hat. Wie groß ist der Inhalt des gemeinschaftlichen Theiles beider Körper?

Antw. 3284,012 C′.

Aufgabe 9. Ein Cylinder ist auf der einen Seite durch eine Halbkugel, auf der andern durch einen Kegel ausgehöhlt, und die Grundflächen des Cylinders sind auch die Grundflächen dieser Körper. Die Spitze des Kegels liegt in der Oberfläche der Halbkugel. Wenn nun der Inhalt dieses ausgehöhlten Körpers $\frac{5}{12}$ vom Inhalte des vollen Cylinders, und dieser wieder einer Kugel vom Radius r gleich ist: wie groß sind Radius und Höhe des Cylinders?

Antw. r und $\frac{4}{3}$r.

Aufgabe 10. Ein cylindrisch ausgehöhltes Gefäß soll genau 2 Pfund Pulver fassen, und die Höhe der Höhlung soll dreimal so groß sein, als ihr Radius. Wie groß sind Höhe und Radius, wenn 1 Kubikfuß Pulver 55 Pfund wiegt?

Antw. Höhe = 5,6463 Zoll, Radius = 1,8821 Zoll.

Aufgabe 11. Man hat 3 Körper von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen: einen Cylinder, eine Halbkugel und einen Kegel. Der Cylinder ist von Holz, die Halbkugel von Sandstein, und der Kegel von Metall. Wie verhalten sich die Gewichte dieser drei Körper zu einander, wenn das specifische Gewicht des Holzes = 0,7; des Sandsteines = 2,1 und des Metalles = 7,35 ist?

Antw. In der angegebenen Ordnung wie 2 : 4 : 7.

Aufgabe 12. In dem Quadrat ABCD (in welchem man sich AB horizontal denken mag) ist die Diagonale AC gezogen, und B und D sind durch einen Kreisbogen verbunden, dessen Mittelpunkt A ist. Wenn nun das Quadrat eine volle Umdrehung um AD macht, so beschreibt es einen Cylinder, der Quadrant ABD beschreibt eine Halbkugel und das Dreieck ADC einen Kegel. Wenn ferner die ganze Figur durch eine mit den Grundflächen dieser Körper parallele Ebene durchschnitten wird, in welchem Verhältniß stehen die Durchschnittsflächen der 3 Körper zu einander, und in welchem Verhältniß dann noch die Körper selbst?

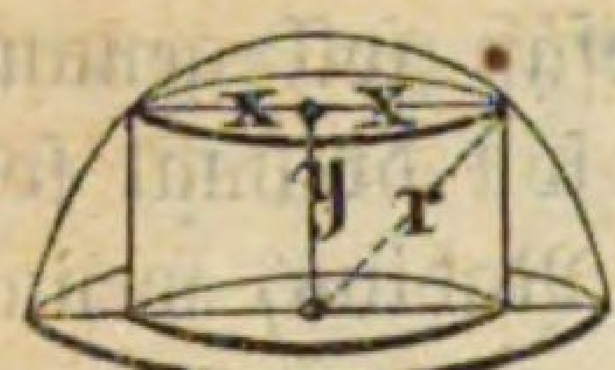
Aufl. Hat die Durchschnittsfläche von der Ebene $AB^2.\pi$ den Abstand x, und wird AB durch r bezeichnet, so verhalten sich die Durchschnittsflächen zu einander, wie $r^2 : r^2 - x^2 : x^2$; folglich ist an jeder Stelle die Durchschnittsfläche des Cylinders gleich der Summe der Durchschnittsflächen der beiden andern Körper. Hieraus folgt aber auch (§. 314. Nr. 3.), daß die Körper zu einander dasselbe Verhältniß haben; d. h. es ist der Cylinder gleich der Summe der Halbkugel und des Kegels.

Aufgabe 13. Man hat die Höhe einer cylindrischen Säule und ihren Umfang (Peripherie der Grundfläche) gemessen und beide Längen gleich groß gefunden, nämlich = 8′ 4″; wie groß ist der Inhalt der Säule?

Antw. 46 Kubikfuß 89,5 Kubikzoll.

Aufgabe 14. Wie verhält sich der Inhalt des größten Cylinders, der sich in eine Halbkugel construiren läßt (dessen eine Grundfläche also in die Grundfläche der Halbkugel und dessen Peripherie der andern Grundfläche in die krumme Oberfläche der Halbkugel fällt) zu dem Inhalt dieser Halbkugel?

Aufl. Aus der Aufgabe geht hervor, daß die eine Grundfläche des Cylinders concentrisch in der Grundfläche der Halbkugel liegen muß. Bezeichnet



man den Radius des Cylinders mit x, seine Höhe mit y und den Radius der Halbkugel mit r, so hat man

1) $x^2 \pi y = $ Max. und 2) $x^2 + y^2 = r^2$.

Setzt man x^2 aus 2) in 1) ein und läßt den constanten Factor π fort, so folgt

$$\varphi y = r^2 y - y^3 = \text{Max.}$$

Es ist aber $\varphi' y = r^2 - 3y^2$ und $\varphi'' y = -6y$.

Aus $\varphi' y = 0$ folgt $y = r\sqrt{\frac{1}{3}}$, also $x = r\sqrt{\frac{2}{3}}$.
Der Inhalt des größten Cylinders in der Halbkugel ist $= \frac{2}{3} r^3 \pi . \sqrt{\frac{1}{3}}$; daher ist sein Verhältniß zum Inhalte der Halbkugel $= 1 : \sqrt{3}$.

Aufgabe 15. In eine Halbkugel zum Radius 10′ ist ein Cylinder eingeschrieben (vorige Figur), dessen Mantel zu dem krummen Theil der Oberfläche der Halbkugel das Verhältniß 12 : 25 hat; wie groß sind der Radius und die Höhe des Cylinders?

Antw. Radius = 8′ oder 6′, und die Höhe resp. = 6′ oder 8′.

Aufgabe 16. Eine Kugel zum Radius r soll durch zwei Parallel-Kreise in 3 gleiche Theile zerlegt werden; wie weit ist jeder Kreis vom Mittelpunkt der Kugel entfernt?

Aufl. Bezeichnet man die gesuchte Entfernung mit x, so entsteht $\left(\frac{x}{r}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{2}{3} = 0$; hieraus folgt $x = 0{,}22607 . r$.

Aufgabe 17. Eine Halbkugel vom Radius 10′ soll durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene halbirt werden; wie weit muß die Ebene von der Grundfläche entfernt sein?

Antw. $20 \cos 80° = 3{,}47296'$.

Aufgabe 18. An einen Cylinder vom Radius r und der Höhe 2r ist auf der einen Seite eine Halbkugel vom Radius r, auf der andern ein Kegel vom Radius r und der Höhe r so angesetzt, daß die Grundflächen der angesetzten Körper die Grundflächen des Cylinders decken. Der ganze Körper soll durch eine die Axe des Cylinders senkrecht schneidende Ebene halbirt werden; wo muß die Ebene liegen?

Antw. In der Entfernung $\frac{5}{6}$r von der Grundfläche der Halbkugel.

Aufgabe 19. Die vorige Aufgabe, nur soll der Kegel nicht an den Cylinder angesetzt, sondern letzterer durch den Kegel ausgehöhlt sein.

Aufl. Der Abstand der Ebene von der Grundfläche der Halbkugel ist gleich $\frac{1}{2}$r.

Aufgabe 20. Wie groß ist der Inhalt einer Kugel, deren Oberfläche dem Mantel eines abgekürzten Kegels gleich ist, welcher die Radien 10′ und 2′ und die Höhe 15′ hat?

Antw. 1525,611 C′.

Aufgabe 21. Eine metallene Kugel von 2 Zoll Radius soll in einen Cylinder umgegossen werden, der auf der einen Seite zu einer Halbkugel abgerundet ist; die ganze Höhe dieses Körpers soll 6 Zoll sein; wie groß ist der Radius des Cylinders?

Antw. 1,38792 Zoll. — Die Auflösung führt auf eine kubische Gleichung.

Aufgabe 22. Ein Körper besteht aus einem Cylinder von 10″ Höhe und 4″ Durchmesser und einer angesetzten Halbkugel, deren Grundfläche die eine Grundfläche des Cylinders deckt. Dieser ganze Körper ist ausgehöhlt, und zwar die Halbkugel durch eine Halbkugel vom Durchmesser 3″; die Grundflächen beider Halbkugeln sind concentrische Kreise. Der Cylinder ist durch einen Kegel ausgehöhlt, welcher die Höhe des Cylinders zur Höhe und die Grundfläche der kleineren Halbkugel zur Grundfläche hat. Dieser ausgehöhlte Körper ist von Blei; wie viel wiegt er, wenn das specifische Gewicht des Bleies gleich 11,852 ist?

Antw. 47,3458 Pfund.

Aufgabe 23. Eine Kugel ist durch eine Ebene in zwei Theile zerlegt, deren krumme Oberflächen sich zu einander wie 4 : 9 verhalten. Die Durchschnittsebene der Kugel habe den Radius a; wie groß ist der Inhalt des kleineren Kugelabschnittes?

Antw. $\frac{31}{81} a^3 \pi$.

Aufgabe 24. Eine cylindrische Kartusche ist 9″ lang und hat einen Durchmesser von 4″. Es soll eine konische Kartusche (abgekürzter Kegel) von demselben Inhalt angefertigt werden, die 11″ lang ist und deren eine Grundfläche auch einen Durchmesser von 4″ hat; wie groß muß der Durchmesser der anderen Grundfläche sein?

Antw. $3\frac{2}{9}$ Zoll.

Aufgabe 25. Auf welche Entfernung läßt sich eine Rakete, welche 1400 Fuß Steighöhe hat, als Signal benutzen, wenn die Erde als Kugel zum Radius 860 Meilen betrachtet wird?



Aufl. Man denke sich den Culminationspunkt A der Rakete mit dem Mittelpunkt M der Erde verbunden und von A eine beliebige Tangente AB an die Erde gelegt. Schneidet AM die Erdoberfläche in C, so ist CA die Steighöhe und der Bogen CB die gesuchte Entfernung. Es sei CA = h, MC = r, $\measuredangle$ CMB = α, so hat man:

$$1)\quad \cos\alpha = \frac{r}{r+h},$$

$$2)\quad CB = r.\mathrm{arc}\,\alpha.$$

Aus 1) ist α und aus 2) CB zu berechnen.

Da in der vorliegenden Aufgabe h im Verhältniß zu r sehr klein ist ($h = 1400'$, $r = 860 . 24000'$), so liegt $\cos\alpha$ nahe an 1; folglich ist α ein sehr kleiner Winkel, so daß mit hinreichender Genauigkeit (vergl. §. 229. Anmerk.)

$$3)\quad \cos\alpha = 1 - \frac{(\operatorname{arc}\alpha)^2}{2!}$$

gesetzt werden kann. Die Gleichungen 1) bis 3) gestatten die Berechnung von CB ohne Logarithmen; denn aus 1) und 3) folgt:

$$\tfrac{1}{2}(\operatorname{arc}\alpha)^2 = 1 - \frac{r}{r+h} = \frac{h}{r+h}, \text{ folglich:}$$

$$\operatorname{arc}\alpha = \sqrt{\frac{2h}{r+h}}.$$

Setzt man diesen Werth in 2) ein, so folgt:

$$\text{Bogen } CB = r \cdot \sqrt{\frac{2h}{r+h}} = \sqrt{\frac{2r^2h}{r+h}} = \sqrt{\frac{2rh}{1+\frac{h}{r}}}.$$

Weil aber $\frac{h}{r}$ im Verhältniß zu 1 sehr klein ist, so kann man mit hinreichender Genauigkeit

$$\text{Bogen } CB = \sqrt{2rh}$$

setzen. Für den vorliegenden Zahlenfall ist, wenn man in Meilen rechnet:

$$CB = \sqrt{2 \cdot 860 \cdot \frac{1400}{24000}} = \sqrt{100{,}3333\ldots} = 10{,}0166 \text{ Meilen.}$$

Es ergiebt sich aus dieser Auflösung, daß der Bogen CB von der Tangente $AB = \sqrt{(r+h)^2 - r^2} = \sqrt{2rh + h^2}$ so wenig abweicht, daß man letztere für den Bogen setzen kann. Es ist $AB = 10{,}0168$ Meilen.

Aufgabe 26. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC sind gegeben: $AB = 26''$ und $BC = 20''$. An dieses Dreieck soll ein Rechteck ABDE angesetzt werden, so daß also AB die eine Seite desselben wird; wie groß muß die andere Seite BD sein, wenn die beiden Körper, welche dadurch entstehen, daß die ganze Figur ACDE zuerst um DC, dann aber um DE eine volle Umdrehung macht, gleichen Inhalt haben sollen, und wie groß ist der Inhalt?

Antw. $BD = 10''$ und der Inhalt $= 20$ C′ 835,27 C″.

Aufgabe 27. Die Grundkanten einer dreiseitigen Pyramide sind 14″, 30″ und 40″, jede Seitenkante ist gleich 65″; wie groß ist der Inhalt der Kugel, welche sich in diese Pyramide einschreiben läßt, so daß also ihre Oberfläche von allen Begrenzungsflächen der Pyramide berührt wird?

Antw. 194,1878 C″. — Man bezeichne den Radius der Kugel durch x und drücke den Inhalt der Pyramide doppelt aus, indem man sich dieselbe in

vier Pyramiden zerlegt denkt, welche die vier Begrenzungsflächen der Pyramide zu Grundflächen und den Mittelpunkt der Kugel zur gemeinschaftlichen Spitze haben. Man erhält:

$$x = \frac{840}{14 + 7\sqrt{29} + 25\sqrt{17} + 25\sqrt{10}} = 3{,}592343''.$$

Daß sich in die dreiseitige Pyramide eine Kugel einschreiben läßt, ist leicht zu beweisen. Zunächst ist jeder Punkt der Ebene, welche den Neigungswinkel zweier Ebenen halbirt, von diesen Ebenen gleich weit entfernt. Denkt man sich also die Neigungswinkel an zwei Seitenkanten der Pyramide durch Ebenen halbirt, so ist jeder Punkt der Durchschnittslinie dieser Ebenen von den drei Seitenflächen gleich weit entfernt. Halbirt man nun noch einen Neigungswinkel an einer Grundkante der Pyramide durch eine Ebene, so ist der Punkt, in welchem diese Ebene jene Durchschnittslinie schneidet, von allen vier Begrenzungsflächen der Pyramide gleich weit entfernt, also der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel. — Während also der Kreis durch drei Punkte der Peripherie oder durch drei berührende Linien bestimmt ist, gehören zur Bestimmung der Kugel vier Punkte im Raume (§. 338. I.) oder vier berührende Ebenen. (Die Determination sei dem Leser überlassen.)

Viertes Kapitel.

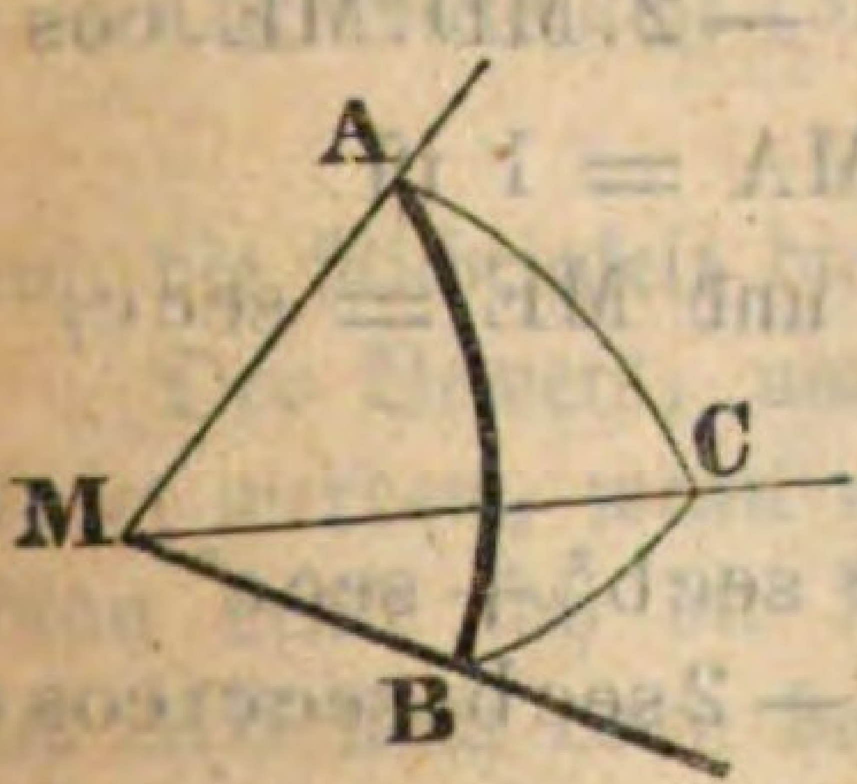
Die sphärische oder körperliche Trigonometrie.

§. 350.

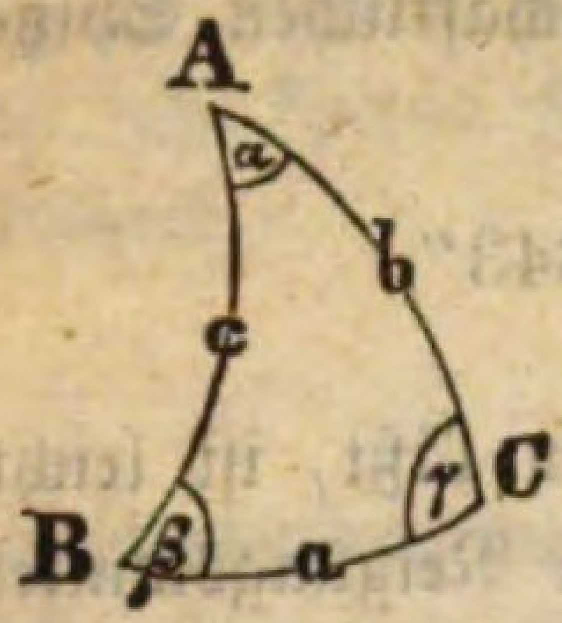
Erklärung.

Die sphärische Trigonometrie hat den Zweck, zwischen den Seiten a, b und c und den ihnen gegenüberliegenden Winkeln α, β und γ einer dreikantigen körperlichen Ecke (§. 273.) die nöthigen Gleichungen zu bilden, um drei dieser sechs Stücke berechnen zu können, wenn die drei andern gegeben sind. Da die mehrkantige körperliche Ecke in dreikantige Ecken zerlegt werden kann, so ist eine Anwendung der sphärischen Trigonometrie auch auf mehrkantige Ecken möglich.

Denkt man sich die Spitze einer dreikantigen körperlichen Ecke in den Mittelpunkt M einer Kugel gelegt, so schneiden die Seitenflächen der Ecke die Kugeloberfläche in drei Bogen größter Kugelkreise, welche einen Theil ABC der Kugeloberfläche begrenzen, also ein sphärisches Dreieck bilden. Nimmt man den Radius MA der Kugel als Einheit, so sind die Bogen AB, BC und AC die Arcus der Seiten des Dreiecks, und denkt man sich in A, B und C Tangenten an diese Bogen gelegt, so erzeugen



diese die Neigungswinkel je zweier Seitenflächen, d. h. die Winkel der körperlichen Ecke. Wenn also, wie in nebenstehender Figur, das sphärische Dreieck ohne seinen Zusammenhang mit der körperlichen Ecke und der Kugel gezeichnet wird, so muß man doch immer seine Stücke a, b, c, α, β und γ in dem oben angegebenen Sinne verstehen. Statt »körperliches Dreieck« oder »dreikantige körperliche Ecke« werden wir künftig auch »sphärisches Dreieck« sagen.

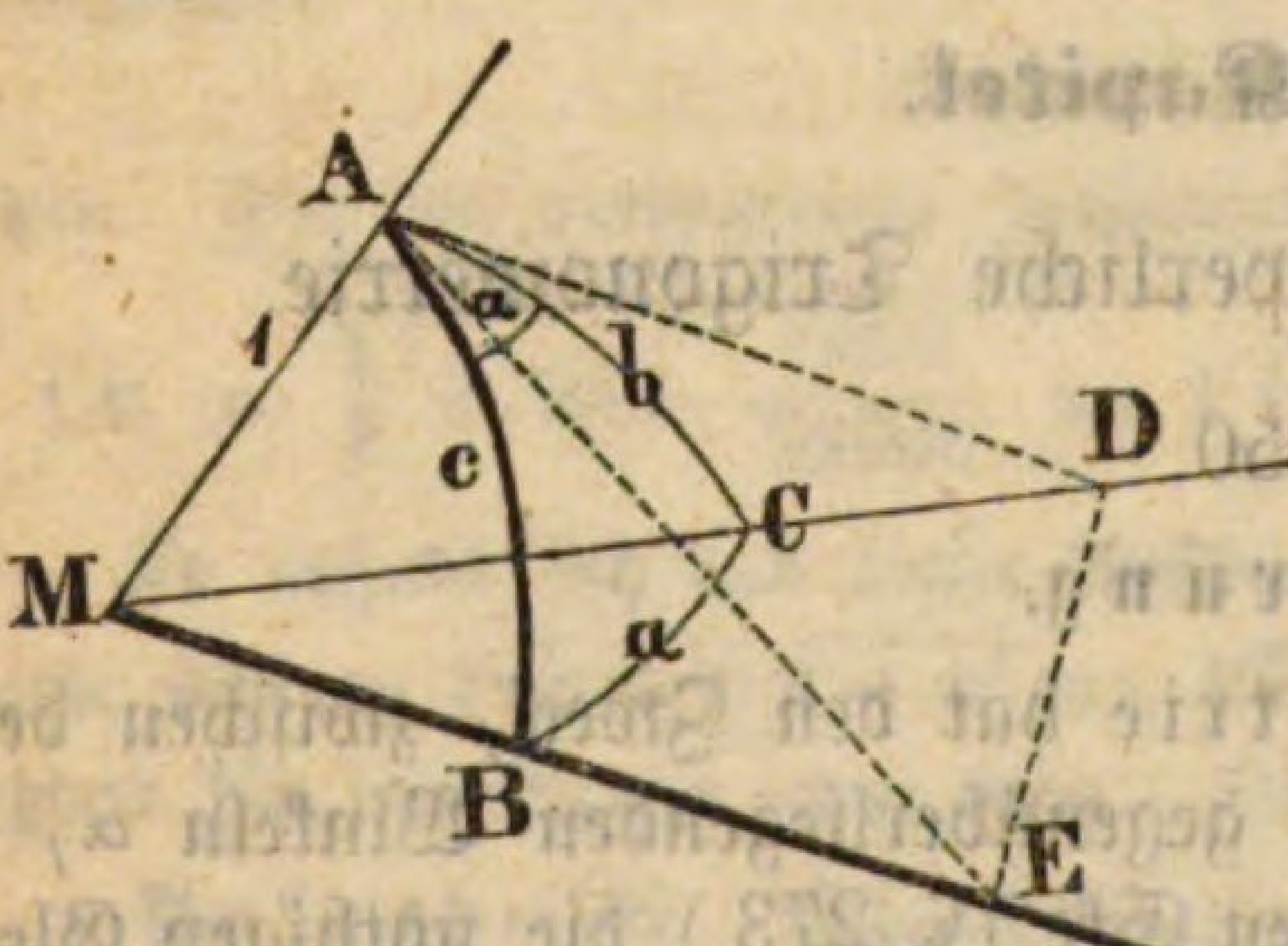


§. 351.

Entwickelung der drei Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie.

Zur Berechnung dreier unbekannten Stücke eines sphärischen Dreiecks aus den drei gegebenen braucht man drei von einander unabhängige Gleichungen. Diese drei Gleichungen sollen jetzt entwickelt werden; auch soll nachgewiesen werden, daß sie für jedes beliebige Dreieck richtig sind.

Es sei M die Spitze des sphärischen Dreiecks; wir nehmen einen beliebigen Theil der Kante, welche der Seite a gegenüber liegt, als Längeneinheit, setzen also etwa MA = 1, errichten auf MA zwei Perpendikel, den einen AD in der Ebene der Seite b, den anderen AE in der Ebene der Seite c, verlängere beide, bis sie die Kanten AC und AB resp. in D und E schneiden, und verbinden endlich D mit E.



Nach dieser Construction ist $\measuredangle$ DAE = α.

Eine Gleichung zwischen a, b, c und α erhält man nun, wenn man das Quadrat der Linie DE doppelt ausdrückt. Diese Linie DE liegt in den beiden Dreiecken DAE und DME, daher ist nach §. 240. III.:

$$(1.)\quad AD^2 + AE^2 - 2.AD.AE.\cos\alpha = MD^2 + ME^2 - 2.MD.ME.\cos a.$$

Ferner ist aus rechtwinkligen Dreiecken, weil MA = 1 ist:

$$AD = \operatorname{tg} b,\ AE = \operatorname{tg} c,\ MD = \sec b \text{ und } ME = \sec c;$$

daher folgt aus (1.):

$$(2.)\quad \operatorname{tg} b^2 + \operatorname{tg} c^2 - 2 \operatorname{tg} b.\operatorname{tg} c.\cos\alpha = \sec b^2 + \sec c^2 - 2 \sec b.\sec c.\cos a.$$

Setzt man nun $\sec b^2 = 1 + \operatorname{tg} b^2$ und $\sec c^2 = 1 + \operatorname{tg} c^2$, so heben

sich $tg b^2$ und $sec c^2$ fort, und es entsteht, wenn man noch alle Glieder auf die entgegengesetzte Seite bringt:

$$2 \sec b . \sec c . \cos a = 2 + 2 tg b . tg c . \cos \alpha .$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit $\frac{1}{2} \cos b . \cos c$, so folgt

$$(3.) \quad \cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos \alpha .$$

Dies ist nun die Grundgleichung der sphärischen Trigonometrie, und aus ihr lassen sich alle übrigen Gleichungen entwickeln. Sie giebt den Zusammenhang zwischen den Seiten und einem Winkel des sphärischen Dreiecks an; durch Vertauschen der Buchstaben (oder durch Wiederholung des Beweises bei veränderter Hülfsconstruction) können wir noch zwei analoge, von jener Formel unabhängige Gleichungen bilden, von denen die eine den Zusammenhang zwischen den Seiten und dem Winkel β, die andere aber den Zusammenhang zwischen den Seiten und dem Winkel γ angiebt. Bevor wir dies aber thun, müssen wir nothwendig beweisen, daß die Gleichung (3.) für alle sphärischen Dreiecke richtig ist; aus dem vorstehenden Beweise geht dies keineswegs hervor. Denn dieser Beweis gilt zwar für jeden Werth von a und α, setzt aber voraus, daß b und c spitze Winkel sind, weil sonst ein Schneiden der Perpendikel AD und AE mit den Kanten MC und MB nicht Statt findet.

Um nun die Richtigkeit der Gleichung (3.)

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos \alpha$$

allgemein zu begründen, unterscheiden wir außer dem Falle, für den der Beweis geführt ist, noch folgende Fälle:

1) Es sei $b = c = 90°$.

Dann geht die Gleichung (3.) in

$$\cos a = \cos \alpha$$

über und ist richtig; denn in diesem Falle steht $MA \perp DME$, und a ist der Neigungswinkel der Ebenen der Seiten b und c, also $a = \alpha$.

2) Es sei $c = 90°$ und b spitz.

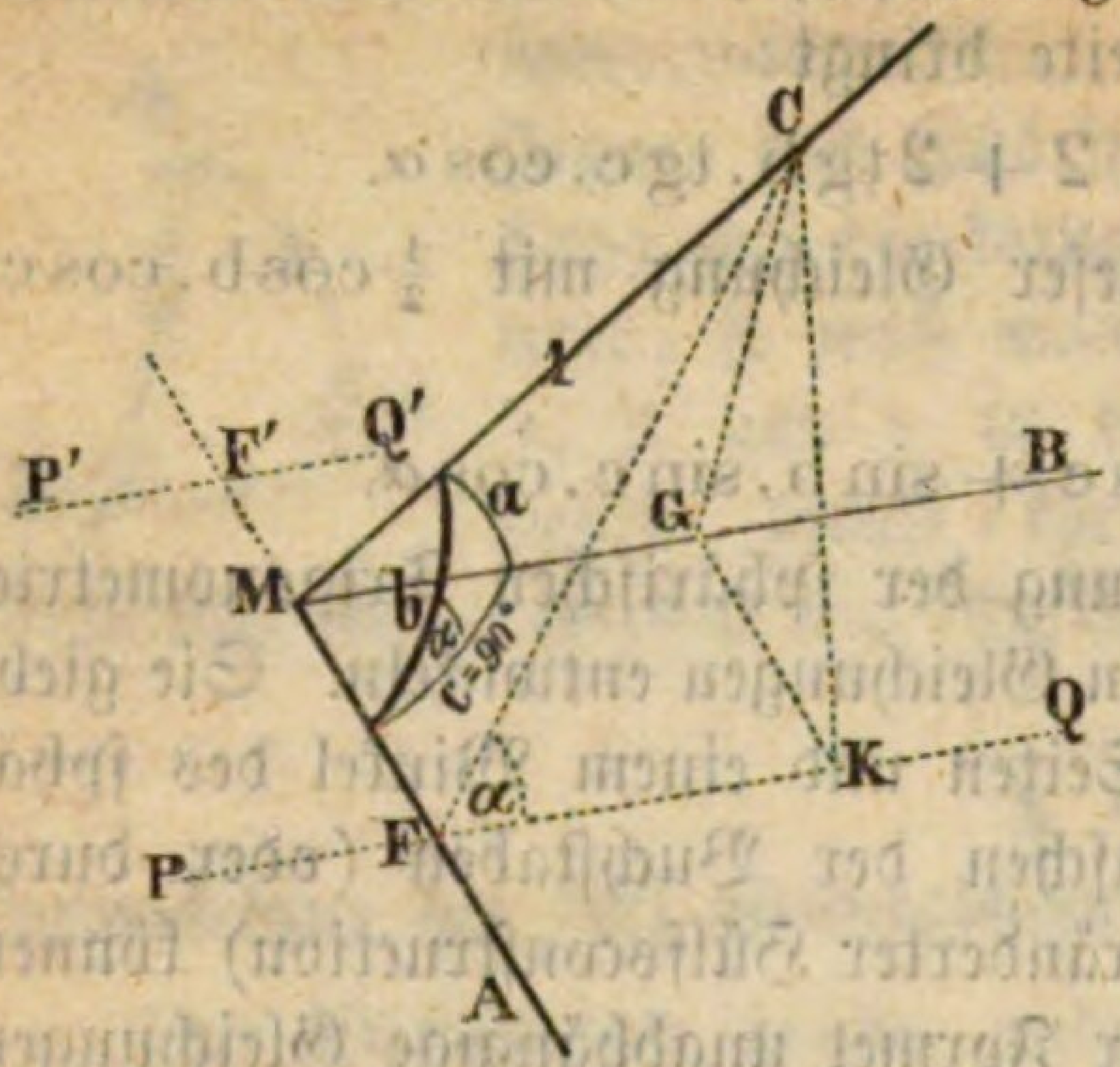
Die Gleichung (3.) geht für diesen Fall in folgende über:

$$\cos a = \sin b . \cos \alpha ,$$

und die Richtigkeit dieser Gleichung ist zu beweisen.

Der Beweis, namentlich die Hülfsconstruction, wird dem Leser klarer werden, wenn wir der Figur eine etwas veränderte Lage geben. Man denke sich die körperliche Ecke in der vorhergehenden Figur so um MB nach vorn herumgelegt, daß die Ebene der Seite c, die ein rechter Winkel sein soll, horizontal liegend erscheint. Nimmt man

dann in der Kante MC die beliebige Länge $MC = 1$, fällt $CF \perp MA$



und legt in der Ebene AMB durch F eine auf MA senkrechte, also mit MB parallele Linie PQ: so muß in dieser Linie PQ die Senkrechte ihren Fußpunkt haben, welche man von C auf die Ebene AMB fällen kann, und $\measuredangle$ CFQ ist dann der Neigungswinkel der Ebenen CMA und BMA, also gleich α (§. 256. Nr. 2.). Wir unterscheiden jetzt drei Lagen:

a) Der Fußpunkt der von C auf AMB gefällten Senkrechten kann F selbst sein. Dann steht die Ebene CMA auf der Ebene BMA senkrecht; sowohl α, als auch a ist gleich $90°$, und die zu beweisende Gleichung geht in $0 = 0$ über, ist also richtig.

b) Der Fußpunkt der von C auf AMB gefällten Senkrechten liegt rechts von MA, etwa in K, so daß $CK \perp AMB$ ist. Man fälle noch $KG \perp MB$ und verbinde G mit C. Die Linie CG steht dann senkrecht auf MB, woraus $MG = \cos a$ folgt.

Weil aber

$$MG = FK$$

ist, und $CF . \cos\alpha$ statt FK gesetzt werden kann, so ist

$$\cos a = CF . \cos\alpha, \text{ oder}$$
$$\cos a = \sin b . \cos\alpha.$$

c) Der Fußpunkt der von C auf AMB gefällten Senkrechten liegt links von F, d. h. K fällt in FP. Dann construire man wie im vorigen Falle; G liegt jetzt in der Verlängerung von MB über M hinaus, α und a sind stumpf, und die Gleichung

$$MG = FK$$

heißt trigonometrisch ausgedrückt:

$$\cos(180° - a) = \sin b . \cos(180° - \alpha),$$

geht also in die zu beweisende Gleichung über:

$$\cos a = \sin b . \cos\alpha.$$

3) Es sei $c = 90°$ und b stumpf.

Die zu beweisende Gleichung heißt wie in Nr. 2.)

$$\cos a = \sin b . \cos\alpha.$$

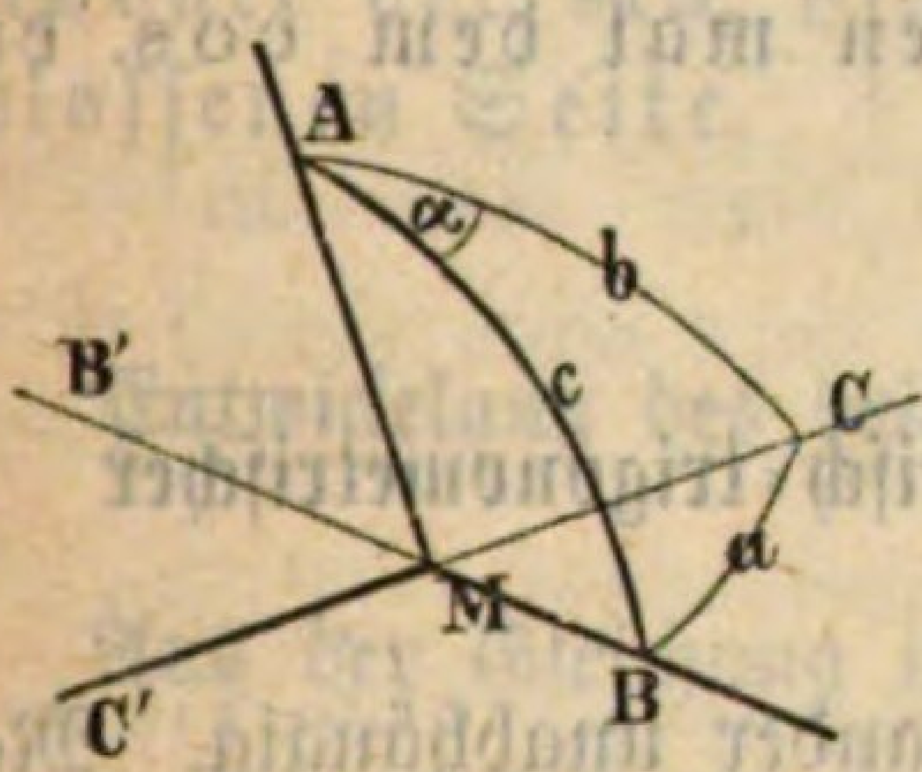
Man construire genau wie in Nr. 2. Der Punkt F fällt jetzt in die Verlängerung von MA über M hinaus, etwa in F′, und zieht man

durch F′ die Linie P′Q′ parallel MB, also senkrecht auf MA, so hat die von C auf die Ebene AMB gefällte Senkrechte, je nachdem α ein rechter, spitzer oder stumpfer Winkel ist, ihren Fußpunkt in F′, oder rechts von F′ in F′Q′, oder links von F′ in F′P′. Man erhält dieselben Gleichungen, wie in Nr. 2., nur überall $\sin(180^\circ - b)$ statt $\sin b$; bekanntlich ist aber $\sin(180^\circ - b) = \sin b$.

Der Fall »$b = 90^\circ$ und c spitz« fällt mit Nr. 2. zusammen.

Der Fall »$b = 90^\circ$ und c stumpf« fällt mit Nr. 3. zusammen.

4) Was die übrigen Fälle betrifft, so sind sie leicht auf den anfänglich betrachteten Fall zurückzuführen.



Man denke sich die Kanten MB und MC über M hinaus verlängert, die Ebenen aber, welche die körperliche Ecke MABC bilden, gehörig verbreitet; dann sind folgende Fälle zu unterscheiden (vergl. §. 277.):

a) Es ist b stumpf und c spitz.

Man betrachte die körperliche Ecke MABC′; ihre Seiten sind $180^\circ - a$, c und $180^\circ - b$, und der Seite $180^\circ - a$ liegt der Winkel $180^\circ - \alpha$ gegenüber. Weil aber c und $180^\circ - b$ spitz sind, so ist nach (3.):

$$\cos(180^\circ - a) = \cos(180^\circ - b).\cos c + \sin(180^\circ - b).\sin c.\cos(180^\circ - \alpha);$$

reducirt, giebt

$$-\cos a = -\cos b.\cos c - \sin b.\sin c.\cos\alpha.$$

Mit -1 hat man noch zu multipliciren.

b) Es ist b spitz und c stumpf.

Man betrachte die körperliche Ecke MAB′C, so findet man, wie vorstehend:

$$\cos(180^\circ - a) = \cos b.\cos(180^\circ - c) + \sin b.\sin(180^\circ - c).\cos(180^\circ - \alpha);$$

reducirt, giebt:

$$-\cos a = -\cos b.\cos c - \sin b.\sin c.\cos\alpha.$$

Mit -1 ist wieder zu multipliciren.

c) Es sind b und c stumpf.

Man betrachte die körperliche Ecke MAB′C′; da sie die spitzen Seiten $180^\circ - b$ und $180^\circ - c$ hat, so folgt aus (3.):

$$\cos a = \cos(180^\circ - b).\cos(180^\circ - c) + \sin(180^\circ - b).\sin(180^\circ - c).\cos\alpha;$$

reducirt, giebt:

$$\cos a = \cos b.\cos c + \sin a.\sin b.\cos\alpha.$$

Hiermit ist nun die Richtigkeit der Gleichung (3.) für alle sphärischen Dreiecke bewiesen, und weil man das Gesetz, welches in dieser Gleichung liegt, bei jeder Ecke dreimal anwenden kann, nämlich in Bezug auf jeden der drei Winkel, so hat man:

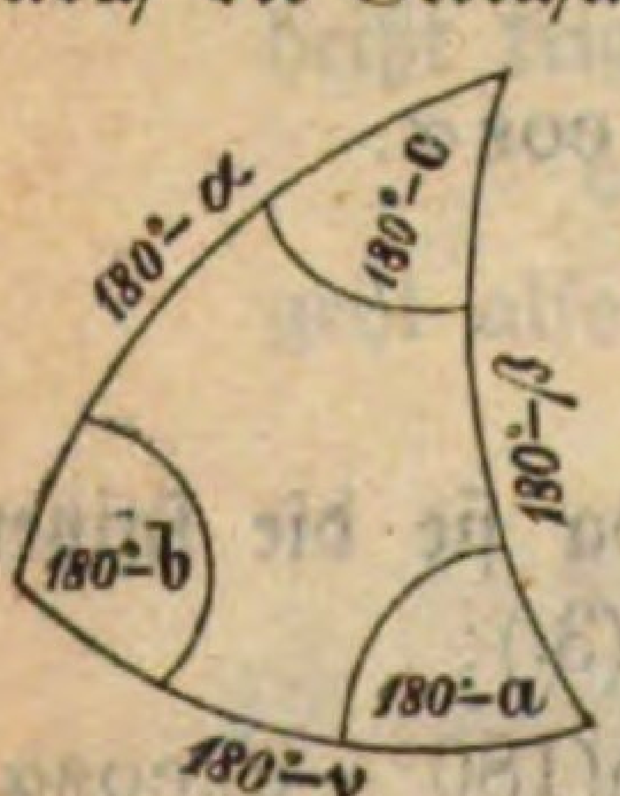
$$\text{I.}\quad \begin{cases} \cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos\alpha \\ \cos b = \cos a \,.\, \cos c + \sin a \,.\, \sin c \,.\, \cos\beta \\ \cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos\gamma \end{cases}$$

d. h. es ist der cos. einer Seite gleich dem Product der cos. der beiden anderen Seiten, addirt zu dem Product der sin. dieser beiden anderen Seiten mal dem cos. des eingeschlossenen Winkels.

§. 352.
Entwickelung des zweiten Systems sphärisch-trigonometrischer Gleichungen.

Die drei Gleichungen in I. sind von einander unabhängig. Man erkennt dies daran, daß jede Gleichung einen Winkel enthält, der in den beiden andern Gleichungen nicht vorkommt; die drei Winkel sind aber von einander unabhängig, denn man kann sie ganz beliebig wählen, wenn man nur die Grenzen für ihre Summe (§. 278. Anmerk. und §. 279. Anmerk.) inne hält. Die drei Gleichungen können daher als Bestimmungsgleichungen für drei beliebige unbekannte Stücke dienen, lösen also alle Aufgaben der sphärischen Trigonometrie. Weil aber in den meisten Fällen die Auflösung sehr weitläuftig wird, dann auch, weil diese Gleichungen zur logarithmischen Rechnung wenig geeignet sind, leitet man aus ihnen noch andere Systeme von Gleichungen her, um bei besonderen Aufgaben die zur Auflösung bequemsten wählen zu können.

Zunächst sei der Leser darauf aufmerksam gemacht, daß die Berechnung der Seiten a, b, c, wenn die Winkel α, β, γ gegeben sind, durch die Gleichungen des Systems I. sehr weitläuftig ist. Für diesen Fall läßt sich aber durch Anwendung des Gesetzes in I. auf die Ergänzungsecke der gegebenen ein zur Berechnung der Seiten geeigneteres System herleiten.



Diese Ergänzungsecke hat nach §. 275. Nr. 2. die Seiten $180° - \alpha$, $180° - \beta$ und $180° - \gamma$, und die gegenüberliegenden Winkel $180° - a$, $180° - b$ und $180° - c$. Es ist daher nach I.:

$$\cos(180° - \alpha) = \cos(180° - \beta) . \cos(180° - \gamma) + \sin(180° - \beta) . \sin(180° - \gamma) . \cos(180° - a).$$

Reducirt man, so entsteht:

$$-\cos\alpha = \cos\beta.\cos\gamma - \sin\beta.\sin\gamma.\cos a.$$

Multiplicirt man noch mit -1, so folgt:

$$\text{II.}\ \begin{cases}\cos\alpha = -\cos\beta.\cos\gamma + \sin\beta.\sin\gamma.\cos a, & \text{daher auch:}\\ \cos\beta = -\cos\alpha.\cos\gamma + \sin\alpha.\sin\gamma.\cos b\\ \cos\gamma = -\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos c,\end{cases}$$

d. h. der cos. eines Winkels ist gleich dem negativen Product der cos. der beiden andern Winkel, addirt zu dem Product der sin. dieser Winkel mal dem cos. der eingeschlossenen Seite.

§. 353.

Entwickelung des dritten Systems sphärisch-trigonometrischer Gleichungen.

Aus der Gleichung in I.:

$$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos\alpha$$

kann man $\cos\alpha$ entwickeln und aus dem erhaltenen Ausdrucke $\sin\alpha$ in einer für logarithmische Rechnung bequemen Form finden. Es entsteht zunächst

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b.\cos c}{\sin b.\sin c}.$$

Nun ist aber

$$\sin\alpha^2 = 1 - \cos\alpha^2 = (1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha),$$

und setzt man den Werth oben für $\cos\alpha$ ein, so entsteht durch eine leichte Umformung aus §. 214. X. und XII.:

$$\sin\alpha^2 = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b.\sin c}\cdot\frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b.\sin c}.$$

Wendet man jetzt die Formel §. 217. XXII. an, so folgt:

$$\sin\alpha^2 = \frac{2\sin\frac{b+c+a}{2}.\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b.\sin c}\cdot\frac{2\sin\frac{a+b-c}{2}.\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin b.\sin c}.$$

Bezeichnet man nun die halbe Summe der Seiten durch s (wie dies in der algebraischen Geometrie bei ebenen Dreiecken geschah), setzt also

$$s = \frac{a + b + c}{2},$$

so entsteht

$$(1.)\quad \sin\alpha = \frac{2}{\sin b.\sin c}\cdot\sqrt{\sin s.\sin(s-a).\sin(s-b).\sin(s-c)}.$$

Auf dieselbe Weise kann man aus den beiden andern Gleichungen in I. $\sin\beta$ und $\sin\gamma$ entwickeln, oder man kann durch Vertauschen der Buchstaben unmittelbar aus (1.) folgern:

$$(2.)\quad \sin\beta = \frac{2}{\sin a \,.\, \sin c} \cdot \sqrt{\sin s \,.\, \sin(s-a) \,.\, \sin(s-b) \,.\, \sin(s-c)}.$$

$$(3.)\quad \sin\gamma = \frac{2}{\sin a \,.\, \sin b} \cdot \sqrt{\sin s \,.\, \sin(s-a) \,.\, \sin(s-b) \,.\, \sin(s-c)}.$$

Bildet man nun aus den Gleichungen (1.) bis (3.) eine laufende Proportion, so entsteht:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \frac{1}{\sin b \,.\, \sin c} : \frac{1}{\sin a \,.\, \sin c} : \frac{1}{\sin a \,.\, \sin b}$$

und multiplicirt man rechts jedes Glied mit $\sin a . \sin b . \sin c$, so er-ergiebt sich das Gesetz:

$$\text{III.}\quad \sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

d. h. in jedem sphärischen Dreieck verhalten sich die sin. der Seiten zu einander wie die sin. der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Da dieses Gesetz nur zwei von einander unabhängige Gleichungen enthält, so kann es, wenn alle drei unbekannten Stücke einer körperlichen Ecke aus den gegebenen berechnet werden sollen, nur in Verbindung mit einem andern System benutzt werden.

Anmerkung 1. Aus $\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta$ folgt:

$$\sin a + \sin b : \sin a - \sin b = \sin\alpha + \sin\beta : \sin\alpha - \sin\beta.$$

Wendet man die Formel §. 217. XXIII. an, so erhält man

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} : \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Weil aber $\frac{a-b}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ immer spitze Winkel sind, so müssen $\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$ und $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ gleichzeitig positiv, oder negativ, oder ∞ sein, d. h. $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{\alpha+\beta}{2}$ sind gleichzeitig spitze, stumpfe oder rechte Winkel. Ist also

$$a+b \gtreqless 180^\circ, \text{ so folgt auch } \alpha+\beta \gtreqless 180^\circ$$

und umgekehrt.

Anmerkung 2. Aus der zweiten Figur in §. 351. kann man sehr leicht das Gesetz III. entnehmen. Nach der Construction dieser Figur ist $\measuredangle$ CGK $= \beta$; drückt man daher das Loth CK doppelt aus, so folgt:

$$CG . \sin\beta = CF . \sin\alpha, \text{ oder}$$
$$\sin a . \sin\beta = \sin b . \sin\alpha, \text{ folglich}$$
$$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

§. 354.

Entwickelung des vierten Systems sphärisch-trigonometrischer Gleichungen.

Aus I. folgt:

$$\cos b = \cos a . \cos c + \sin a . \sin c . \cos\beta$$
$$\cos c = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b . \cos\gamma.$$

Setzt man den Werth von cos c aus der zweiten Gleichung in die erste ein, so folgt:

$$\cos b = \cos a^2 . \cos b + \cos a . \sin a . \sin b . \cos\gamma + \sin a . \sin c . \cos\beta.$$

Bringt man das erste Glied der rechten Seite auf die linke, setzt $\cos b . (1 - \cos a^2) = \cos b . \sin a^2$ und hebt noch die Gleichung durch sin a, so folgt:

$$(1.) \quad \sin a . \cos b = \cos a . \sin b . \cos\gamma + \sin c . \cos\beta.$$

Diese Gleichung enthält fünf Stücke des sphärischen Dreiecks; durch eine leichte Umformung kann man sie auf eine Gleichung mit nur vier Stücken bringen, um sie bei drei gegebenen Stücken zur Berechnung eines vierten benutzen zu können.

Dividirt man (1.) durch sin b, so folgt:

$$\sin a . \operatorname{cotg} b = \cos a . \cos\gamma + \frac{\sin c}{\sin b} \cdot \cos\beta.$$

Setzt man jetzt (aus III.) $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ statt $\frac{\sin c}{\sin b}$, so entsteht:

$$(2.) \quad \sin a . \operatorname{cotg} b = \cos a . \cos\gamma + \sin\gamma . \operatorname{cotg}\beta.$$

Durch Vertauschen der Buchstaben lassen sich hieraus noch fünf Gleichungen bilden, von denen aber nur je drei von einander unabhängig sind. Man erhält:

$$\text{IV.} \left\{ \begin{array}{l} \sin a . \operatorname{cotg} b = \cos a . \cos\gamma + \sin\gamma . \operatorname{cotg}\beta \\ \sin a . \operatorname{cotg} c = \cos a . \cos\beta + \sin\beta . \operatorname{cotg}\gamma \\ \sin b . \operatorname{cotg} a = \cos b . \cos\gamma + \sin\gamma . \operatorname{cotg}\alpha \\ \sin b . \operatorname{cotg} c = \cos b . \cos\alpha + \sin\alpha . \operatorname{cotg}\gamma \\ \sin c . \operatorname{cotg} a = \cos c . \cos\beta + \sin\beta . \operatorname{cotg}\alpha \\ \sin c . \operatorname{cotg} b = \cos c . \cos\alpha + \sin\alpha . \operatorname{cotg}\beta \end{array} \right.$$

d. h. es ist der sin. einer Seite mal der cotg. einer zweiten gleich dem cos. der ersten Seite mal dem cos. des Winkels, den beide Seiten einschließen, addirt zu dem Pro-

duct des sin. dieses Winkels und der cotg. des Winkels, welcher der zweiten Seite gegenüberliegt.

§. 355.

Entwickelung des fünften und sechsten Systems sphärisch-trigonometrischer Gleichungen.

Aus der Gleichung in I.

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha \text{ folgt:}$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c}$$

Weil aber

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin \frac{\alpha^2}{2} \text{ und } \cos \alpha = 2 \cos \frac{\alpha^2}{2} - 1$$

ist, so kann man durch Substitution des Werthes für $\cos \alpha$ sowohl $\sin \frac{\alpha}{2}$ als auch $\cos \frac{\alpha}{2}$ durch die drei Seiten a, b, c ausdrücken. Man erhält Ausdrücke, die sich sehr bequem mit Logarithmen berechnen und deshalb bei Anwendungen vortheilhaft benutzen lassen. Es folgt aber

$$2 \sin \frac{\alpha^2}{2} = 1 - \cos \alpha = 1 - \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c}$$

$$2 \sin \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \,.\, \sin c} \quad (\text{§. 214. XII.}).$$

Verwandelt man den Zähler rechts in ein Product (§. 217. XXII.), so hebt sich 2 fort, und es entsteht:

$$\sin \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\sin \frac{a + b - c}{2} \cdot \sin \frac{a - b + c}{2}}{\sin b \,.\, \sin c}.$$

Zunächst können wir wieder $\frac{a + b + c}{2}$ mit s bezeichnen (vgl. §. 353.), dann aber auf dieselbe Weise aus den beiden andern Gleichungen in I. $\sin \frac{\beta}{2}$ und $\sin \frac{\gamma}{2}$ durch a, b, c ausdrücken (oder auch durch Vertauschen der Buchstaben aus der vorstehenden Gleichung bilden); wir erhalten dann:

$$(1.) \quad \begin{cases} \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \,.\, \sin (s - c)}{\sin b \,.\, \sin c}} \\ \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - a) \,.\, \sin (s - c)}{\sin a \,.\, \sin c}} \\ \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - a) \,.\, \sin (s - b)}{\sin a \,.\, \sin b}} \end{cases}$$

Ferner ist

$$2\cos\frac{\alpha^2}{2} = 1 + \cos\alpha = 1 + \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin a \,.\, \sin b},$$

und verfährt man nun ganz ähnlich wie oben (vergl. §. 353.), so erhält man:

$$(2.)\quad \begin{cases} \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \,.\, \sin(s-a)}{\sin b \,.\, \sin c}} \\ \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \,.\, \sin(s-b)}{\sin a \,.\, \sin c}} \\ \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \,.\, \sin(s-c)}{\sin a \,.\, \sin b}} \end{cases}$$

Aus (1.) und (2.) ergiebt sich nun einfach durch Division:

$$\text{V.}\quad \begin{cases} \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \,.\, \sin(s-c)}{\sin s \,.\, \sin(s-a)}} \\ \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \,.\, \sin(s-c)}{\sin s \,.\, \sin(s-b)}} \\ \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \,.\, \sin(s-b)}{\sin s \,.\, \sin(s-c)}} \end{cases}$$

Auf ganz ähnliche Weise, wie die Gleichungen (1.) und (2.) aus dem System I. entwickelt worden sind, kann man aus dem System II. Formeln herleiten, durch welche die sin., die cos. und dann die tg. der halben Seiten eines sphärischen Dreiecks durch die Winkel α, β, γ ausgedrückt werden. Aus

$$\cos\alpha = -\cos\beta \,.\, \cos\gamma + \sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos a \text{ folgt:}$$

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta \,.\, \cos\gamma}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma}.$$

Wie oben folgt nun:

$$2\sin\frac{a^2}{2} = 1 - \cos a = -\frac{\cos\alpha + \cos(\beta+\gamma)}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma}$$

$$2\cos\frac{a^2}{2} = 1 + \cos a = +\frac{\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma)}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma}.$$

Verwandelt man die Zähler rechts in Producte, so hebt sich 2 fort, und es entsteht:

$$\sin\frac{a^2}{2} = -\frac{\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma}$$

$$\cos\frac{a^2}{2} = +\frac{\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma}.$$

Bezeichnet man nun die Summe der Winkel α, β, γ durch 2σ, so folgt:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\sigma\quad,\quad\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}=\sigma-\alpha$$

$$\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}=\sigma-\beta\,,\quad\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}=\sigma-\gamma.$$

Setzt man die Werthe oben ein, so ergeben sich, wenn man noch die Buchstaben richtig vertauscht, folgende Formeln:

$$(3.)\quad\begin{cases}\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}}\\ \sin\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\beta)}{\sin\alpha\,.\,\sin\gamma}}\\ \sin\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}}\end{cases}$$

$$(4.)\quad\begin{cases}\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\,.\,\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}}\\ \cos\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\,.\,\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha\,.\,\sin\gamma}}\\ \cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\,.\,\cos(\sigma-\beta)}{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}}\end{cases}$$

Aus (3.) und (4.) folgt nun durch Division:

$$\text{VI.}\quad\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\,.\,\cos(\sigma-\gamma)}}\\ \operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\beta)}{\cos(\sigma-\alpha)\,.\,\cos(\sigma-\gamma)}}\\ \operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\gamma)}{\cos(\sigma-\alpha)\,.\,\cos(\sigma-\beta)}}\end{cases}$$

Das Vorzeichen — unter den Wurzeln in (3.) und VI. verhindert, daß sie imaginär werden; denn aus §. 279. Anm. folgt $\sigma > 90°$, folglich $\cos\sigma$ negativ. Hingegen sind $\sigma-\alpha$, $\sigma-\beta$ und $\sigma-\gamma$ nach §. 278. Anm. positiv oder negativ spitz; denn aus $\alpha+\beta<180°+\gamma$ folgt $\sigma-\gamma<90°$. Nimmt man aber an, $\sigma-\gamma$ wäre negativ stumpf, etwa $=-90°-\delta$, so würde hieraus $\gamma=\alpha+\beta+180°+2\delta$ folgen, und weil $\gamma+\alpha<180°+\beta$ ist, so folgt weiter der Widerspruch $0>2\alpha+2\delta$.

§. 356.

Die Gaußischen Formeln.

Es ist

$$1)\ \cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\mp\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

$$2)\ \sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Die Formeln von Gauß entstehen aus diesen Gleichungen, wenn man für $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\sin\frac{\beta}{2}$ die in §. 355. (1.) und (2.) gefundenen Werthe substituirt. Durch eine sehr einfache Umformung erhält man zunächst aus diesen Werthen:

$$3)\ \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sin s}{\sin c}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}.$$

$$4)\ \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(s-c)}{\sin c}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}.$$

$$5)\ \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

$$6)\ \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Wenn man nun statt der linken Seite jeder dieser Gleichungen die rechte in 1) und 2) substituirt, so ergeben sich vier Gleichungen (wegen $\pm$):

$$7)\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin s-\sin(s-c)}{\sin c}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}.$$

$$8)\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin s+\sin(s-c)}{\sin c}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}.$$

$$9)\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin(s-b)+\sin(s-a)}{\sin c}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

$$10)\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin(s-b)-\sin(s-a)}{\sin c}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Verwandelt man den Zähler in der rechten Seite jeder Gleichung in ein Product (§. 217. XIX. und XX.) und bedenkt, daß $2s-c=a+b$ und $2s-a-b=c$ ist, so erhält man:

$$11)\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\,.\cos\frac{a+b}{2}\,.\sin\frac{c}{2}}{\sin c}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}.$$

$$12)\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{2\,.\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}}{\sin c}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}.$$

$$13)\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\,.\sin\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}}{\sin c}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

$$14)\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{2\,.\cos\frac{c}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}}{\sin c}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Wenn man endlich in dem Nenner rechts $\sin c = 2 . \sin\frac{c}{2} \cdot \cos\frac{c}{2}$ setzt, so läßt sich der zugehörige Bruch entweder durch $2\sin\frac{c}{2}$ oder durch $2\cos\frac{c}{2}$ heben; hebt man und bringt den Nenner, welcher stehen bleibt, noch als Factor auf die linke Seite, so ergeben sich die Formeln von Gauß:

$$\text{VII.}\left\{\begin{array}{l} \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \\[2mm] \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \\[2mm] \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \\[2mm] \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}. \end{array}\right.$$

Jede dieser Formeln zeigt alle sechs Stücke des sphärischen Dreiecks und enthält eine Relation zwischen dem cos. oder sin. der halben Summe oder Differenz zweier Winkel und dem cos. oder sin. der halben Summe oder Differenz der gegenüberliegenden Seiten, und zwar in Verbindung mit dem cos. oder sin. der halben dritten Seite und des halben dritten Winkels. — Da man statt α und β auch α und γ und dann noch β und γ setzen kann (indem man natürlich auch die andern Buchstaben richtig ändert), so lassen sich noch acht andere Gleichungen aus den obigen bilden. — Zur unmittelbaren Berechnung eines unbekannten Stückes eines sphärischen Dreiecks aus drei gegebenen sind die Gaußischen Formeln nicht geeignet; hingegen kann man aus Paaren derselben entweder c oder γ eliminiren, wodurch die für das praktische Rechnen bequemen und wichtigen Formeln, welche der nächste §. enthält, entstehen.

§. 357.

Die Neper'schen Analogien.

Dividirt man von den Formeln in VII. die dritte durch die erste, dann die vierte durch die zweite, dann die zweite durch die erste, endlich die vierte durch die dritte: so entstehen die Neper'schen Analogien.

$$\text{VIII.}\quad\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}\\[2ex]\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}\\[2ex]\operatorname{tg}\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}\\[2ex]\operatorname{tg}\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}\end{cases}$$

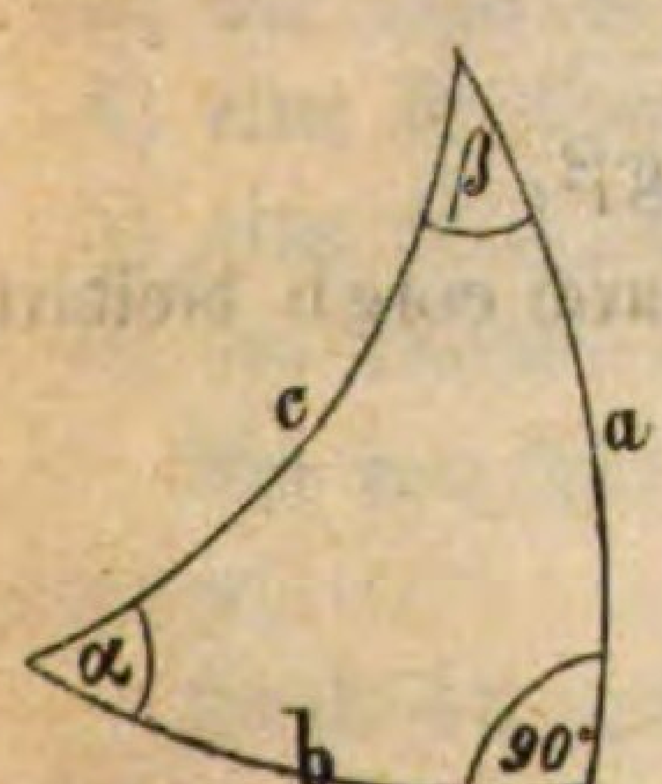
Die beiden ersten Formeln bilden zwei Bestimmungsgleichungen für α und β, wenn a, b und γ gegeben sind; aus den beiden andern kann man a und b berechnen, wenn α, β und c bekannt sind.

Von der Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke.

§. 358.

Die Neper'sche Regel zur Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke.

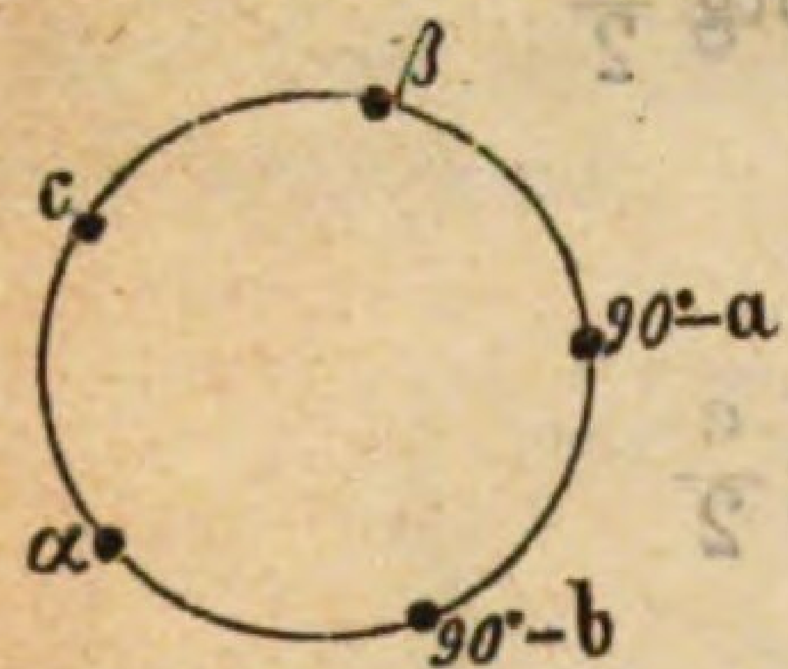
Wenn ein Winkel eines sphärischen Dreiecks gleich 90° ist, so heißt nicht nur das Dreieck ein rechtwinkliges, sondern man nennt auch die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die Hypotenuse und die den Winkel einschließenden Seiten die Katheten des



Dreiecks. Es soll der Winkel $\gamma = 90°$ sein, so daß c die Hypotenuse ist und a und b die beiden Katheten. — Da die in den vorigen §§. entwickelten Gesetze für alle Dreiecke gelten, so kann man sie unmittelbar auf rechtwinklige anwenden; in so fern würde es also besonderer Regeln für solche Dreiecke nicht bedürfen. Weil aber $\cos 90° = 0$ und $\sin 90° = 1$ ist, so nehmen jene Gesetze nicht nur eine sehr einfache Gestalt für das rechtwinklige Dreieck an, son-

dern lassen sich sogar auf eine einzige Regel bringen. Diese Regel ist zuerst von Neper und von Wolf (lebte 1679 bis 1754) aufgestellt worden; nach Ersterem nennt man sie die Neper'sche Regel. Sie ist folgende:

Läßt man den rechten Winkel fort und schreibt die übrigen fünf Stücke a, b, α, c und β des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks in



derselben Ordnung, wie sie im Dreieck auf einander folgen, mit der Abänderung in die Peripherie eines Kreises ein, daß man statt der Katheten ihre Complemente setzt, so gilt von diesen fünf eingeschriebenen Elementen folgende Regel:

Es ist der cos. jedes Elements gleich dem Product der sin. der beiden gegenüberliegenden Elemente und gleich dem Product der cotg. der beiden benachbarten Elemente.

Zur Begründung der Regel haben wir nur zu beweisen, daß jede der zehn Gleichungen, welche aus dieser Regel entspringen, aus den früher entwickelten Gesetzen folgt. Diese Gleichungen sind aber folgende:

1) $\cos c = \cos a \,.\, \cos b$.

2) $\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \,.\, \operatorname{cotg} \beta$.

Bew. Nr. 1. folgt unmittelbar aus §. 351. I.:

$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos \gamma,$$

wenn man $\gamma = 90^\circ$ setzt.

Nr. 2. folgt aus §. 352. II.

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \,.\, \cos \beta + \sin \alpha \,.\, \sin \beta \,.\, \cos c,$$

wenn man $\gamma = 90^\circ$ setzt und dann die Gleichung durch $\sin \alpha \,.\, \sin \beta$ dividirt.

3) $\sin a = \sin c \,.\, \sin \alpha$.

4) $\sin a = \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{cotg} \beta$.

Bew. Nr. 3. folgt aus §. 353. III.:

$$\sin a : \sin c = \sin \alpha : \sin \gamma,$$

wenn man $\gamma = 90^\circ$ setzt.

Nr. 4. folgt aus §. 354. IV.

$$\sin a \,.\, \operatorname{cotg} b = \cos a \,.\, \cos \gamma + \sin \gamma \,.\, \operatorname{cotg} \beta,$$

wenn man $\gamma = 90^\circ$ setzt und dann noch die Gleichung durch $\operatorname{cotg} b$ dividirt.

5) $\sin b = \sin c \,.\, \sin \beta$.

6) $\sin b = \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{cotg} \alpha$.

Bew. wie resp. Nr. 3. und 4.

7) $\cos \alpha = \cos a \,.\, \sin \beta$.

8) $\cos \alpha = \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{cotg} c$.

Bew. Nr. 7. folgt aus §. 352. II.:

$$\cos\alpha = -\cos\beta \,.\, \cos\gamma + \sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos a,$$

wenn man $\gamma = 90^\circ$ setzt.

Nr. 8. folgt aus §. 354. IV.

$$\sin b \,.\, \operatorname{cotg} c = \cos b \,.\, \cos\alpha + \sin\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\gamma,$$

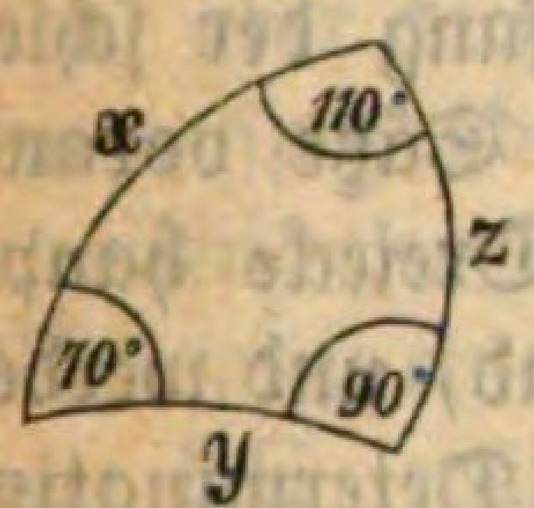
wenn man $\gamma = 90^\circ$ setzt und dann noch die Gleichung durch $\cos b$ dividirt.

9) $\cos\beta = \cos b \,.\, \sin\alpha.$

10) $\cos\beta = \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{cotg} c.$

Bew. wie resp. Nr. 7. und 8.

Beispiel. Die Winkel eines sphärischen Dreiecks sind 70°, 90° und 110°; wie groß sind die Seiten?



Aufl. 1) $\cos x = \operatorname{cotg} 110^\circ \,.\, \operatorname{cotg} 70^\circ$

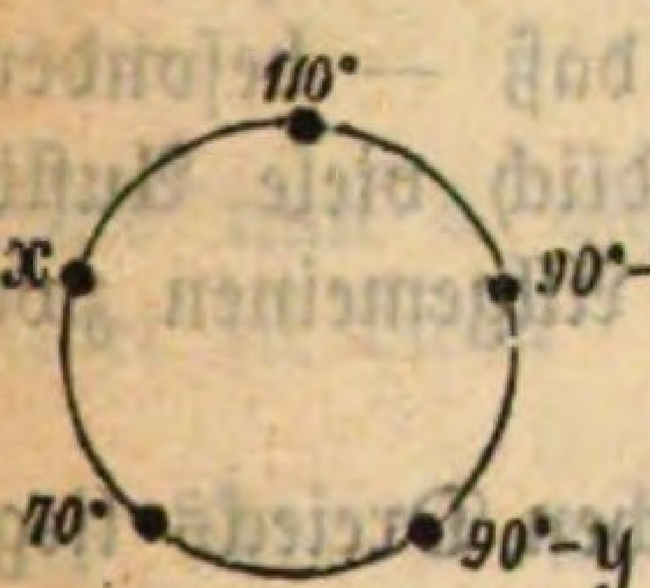
$\cos x = -(\operatorname{cotg} 70^\circ)^2.$

2) $\cos 70^\circ = \sin 110^\circ \,.\, \cos z$

$\cos z = + \operatorname{cotg} 70^\circ.$

3) $\cos 110^\circ = \sin 70^\circ \,.\, \cos y$

$\cos y = -\operatorname{cotg} 70^\circ.$



Aus 2) und 3) folgt, daß y und z Supplementswinkel sind. Auch ohne die vorstehenden Gleichungen folgt dies schon aus §. 353. Anmerk. 1.; da $110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$ ist, so muß auch $y + z = 180^\circ$ sein. — Man erhält:

$$x = 97^\circ\ 36'\ 45'';\quad z = 68^\circ\ 39'\ 21'';\quad y = 111^\circ\ 20'\ 39''.$$

§. 359.

Die Grundaufgaben über rechtwinklige sphärische Dreiecke.

Sind außer dem rechten Winkel noch zwei Stücke eines sphärischen Dreiecks gegeben, so kann man die übrigen nach der Neper'schen Regel berechnen. Man erhält sechs Grundaufgaben, denn es können gegeben sein:

1) die beiden Katheten . . . . a und b
2) die Hypotenuse und eine Kathete . . . . c und a
3) die Hypotenuse und ein anliegender Winkel . . c und α
4) eine Kathete und der anliegende schiefe Winkel . a und β
5) eine Kathete und der gegenüberliegende Winkel . a und α
6) die beiden der Hypotenuse anliegenden Winkel . . α und β

Bei der Auflösung dieser Aufgaben kommt man auf zwei Hauptfragen:

Sind die gesuchten Winkel oder Seiten spitz oder stumpf? Wie müssen die bekannten Stücke gegeben sein, damit die Aufgabe eine Auflösung zuläßt (die Determination)?

Beide Fragen hängen mit einander zusammen, denn die Bedingungen für gegebene Stücke können auch für gesuchte maßgebend sein. An die zweite Frage schließt sich noch die Untersuchung an, wie viel Auflösungen die Aufgabe hat.

Ueber die erste Frage ist leicht zu entscheiden, wenn ein gesuchtes Stück durch cos., tg. oder cotg. bestimmt werden kann; das Vorzeichen + oder — giebt die Entscheidung. Ist aber ein Stück nur durch seinen sin. zu berechnen, so ist eine besondere Untersuchung nöthig; die Aufgabe kann dann auch zwei Auflösungen haben.

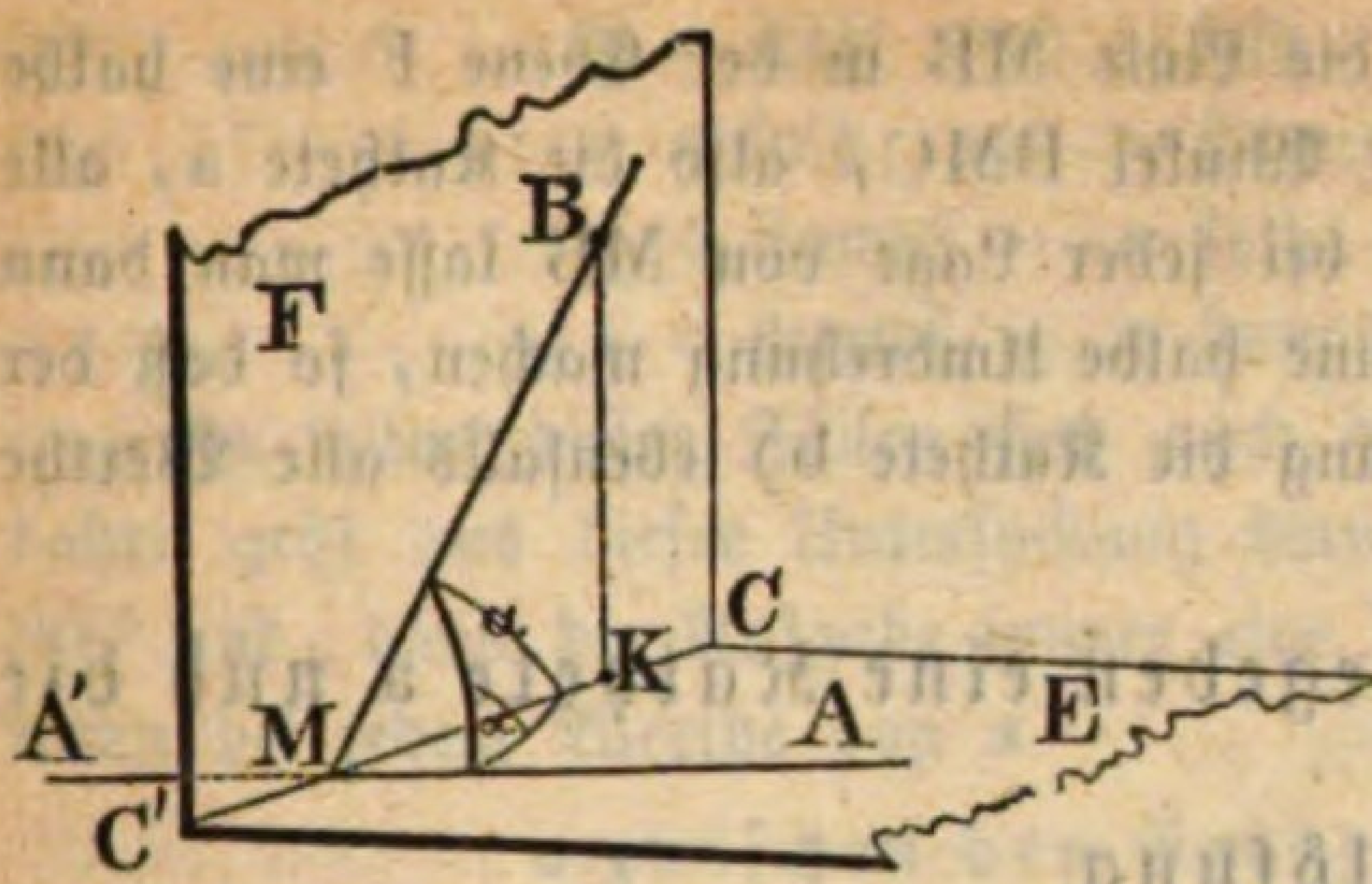
Die Auflösung der angeführten sechs Aufgaben bietet keine besonderen Schwierigkeiten dar, sie ist vielmehr dem Leser als eine leichte und nöthige Uebung zu empfehlen; namentlich wird ihm die Determination eine gute Vorübung zur allgemeinen Auflösung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke sein. Wir schicken die Sätze voraus, welche bei Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke hauptsächlich entscheidend und früher noch nicht angeführt sind, und werden dann zwei Aufgaben vollständig durchführen, auch die Determination angeben, um zu zeigen, wie diese auf die vorausgeschickten Sätze führt, namentlich auf (3.) und (4.). Bemerkt sei noch, daß — besondere Fälle ausgenommen, in denen eine Aufgabe unendlich viele Auflösungen haben kann — nur die fünfte Aufgabe im Allgemeinen zwei Auflösungen zuläßt, jede andere nur eine.

(1.) Jede Seite und jeder Winkel eines sphärischen Dreiecks liegt zwischen 0° und 180°. Hieraus folgt aber, daß kein sin. negativ sein kann.

(2.) Die Summe der Winkel α und β, welche im rechtwinkligen sphärischen Dreieck der Hypotenuse anliegen, muß größer als 90° und kleiner als 270° sein (§. 279. Anmerk. und §. 278. Anmerk.).

(3.) Jede Kathete und der ihr gegenüberliegende Winkel, z. B. a und α, sind immer gleichartig, d. h. beide sind immer gleichzeitig spitze, rechte oder stumpfe Winkel. Sind sie spitz, so ist die Kathete kleiner als der gegenüberliegende Winkel ($a < \alpha$); sind sie stumpf, so ist die Kathete größer als der gegenüberliegende Winkel ($a > \alpha$).

Beweis. Die beiden Ebenen E und F mögen auf einander senkrecht stehen; M ist ein Punkt in ihrer Durchschnittslinie CC′, und die Linien MA und MB liegen resp. in den Ebenen E und F. Die Linien MA, MB und MC sind dann die Kanten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks MABC. Denkt man sich nun von einem beliebigen Punkte B der Kante MB auf die Ebene E ein Loth BK gefällt, so liegt sein Fußpunkt K in CC′, und zwar in MC, in M, oder in



MC' — also jenseits AA', in AA', oder diesseits AA' —, je nachdem die Kathete a spitz, recht, oder stumpf ist. Im zweiten Falle steht MB ⊥ E, woraus folgt (§. 265.), daß der Winkel an der Kante MA, d. h. α, gleich 90° ist. Ist a spitz oder stumpf, so fälle man von K ein Loth KG auf AA' (der Leser möge sich dasselbe zur Figur hinzudenken) und verbinde seinen Fußpunkt G mit B. Der Winkel BGK ist spitz, und er ist der Winkel α selbst, oder dessen Nebenwinkel, je nachdem K jenseits, oder diesseits AA' liegt, d. h. α ist spitz oder stumpf, je nachdem a spitz oder stumpf ist. — Um den zweiten Theil des Satzes zu beweisen, vergleiche man die ebenen rechtwinkligen Dreiecke BKM und BKG mit einander. Diese Dreiecke haben die gemeinschaftliche Kathete BK, während die anderen Katheten ungleich sind, nämlich

$$KM > KG, \text{ woraus folgt:}$$
$$\measuredangle BMK < \measuredangle BGK.$$

Sind nun a und α spitz, so ist $\measuredangle BMK = a$ und $\measuredangle BGK = \alpha$, daher ist dann

$$a < \alpha;$$

sind aber a und α stumpf, so ist $\measuredangle BMK = 180° - a$ und $\measuredangle BGK = 180° - \alpha$, also $180° - a < 180° - \alpha$, woraus folgt:

$$a > \alpha.$$

Anmerkung. Wie folgt der Beweis aus §. 358. Nr. 6. oder Nr. 7.?

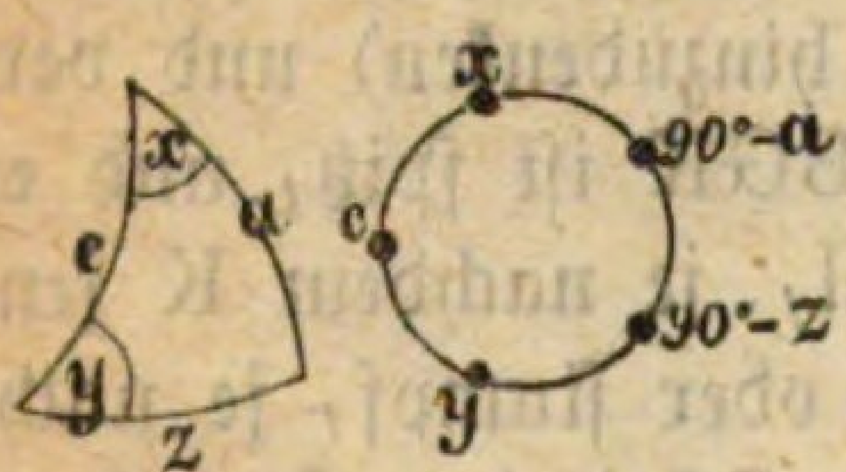
(4.) In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck liegt die Hypotenuse (c) immer zwischen jeder Kathete (a) und ihrem Supplement, d. h. c liegt immer zwischen a und 180° — a. Ist a = 90°, so fallen diese Grenzen zusammen, und c wird dann ebenfalls = 90°.

Beweis (vorige Figur). $\measuredangle BMK$ ist der Neigungswinkel der Kante MB gegen die Ebene E; er ist also kleiner und sein Nebenwinkel ist größer, als jeder Winkel, den MB mit einer Linie in der Ebene E bildet. Nun ist aber $\measuredangle BMK$ der Kathete a oder ihrem Nebenwinkel gleich, je nachdem a spitz oder stumpf ist; daher folgt: ist a spitz, so ist c größer als a, aber kleiner als 180° — a; ist aber a stumpf, so ist c kleiner als a, aber größer als 180° — a; immer liegt c also zwischen a und 180° — a. Ist a = 90°, so steht MB ⊥ E, folglich ist auch c = 90°.

Anmerkung. Die Figur zu (3.) möge der Leser benutzen, um sich die verschiedenen rechtwinkligen sphärischen Dreiecke anschaulich zu machen. Zu diesem

Zwecke ist es nur nöthig, daß man die Linie MB in der Ebene F eine halbe Umdrehung machen läßt, so daß der Winkel BMC, also die Kathete a, alle Werthe von 0° bis 180° annimmt; bei jeder Lage von MB lasse man dann auch in der Ebene E die Linie MA eine halbe Umdrehung machen, so daß der Winkel AMC (nach unserer Bezeichnung die Kathete b) ebenfalls alle Werthe von 0° bis 180° erhält.

Grundaufgabe Nr. 2. Gegeben eine Kathete a und die Hypotenuse c.



Auflösung.

1) $\cos x = \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{cotg} c$; $\cos x = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$.

2) $\sin a = \sin c \,.\, \sin y$; $\sin y = \dfrac{\sin a}{\sin c}$.

3) $\cos c = \cos a \,.\, \cos z$; $\cos z = \dfrac{\cos c}{\cos a}$.

Determination. Zunächst zeigen alle drei Gleichungen, daß $c = 90°$ sein muß, wenn $a = 90°$ ist; sind aber a und c gleich 90° gegeben, so ist die Aufgabe eine unbeschränkt unbestimmte. Denn wenn auch $y = 90°$ wird, so nehmen doch cos x und cos z resp. die Form $\frac{\infty}{\infty}$ und $\frac{0}{0}$ an, d. h. x und z sind unbestimmt. Uebrigens ist in diesem Falle $x = z$; denn man kann umformen:

$$\cos x = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c} = \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \frac{\cos c}{\cos a} = \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \cos z,$$

oder man hat unmittelbar nach der Neper'schen Regel $\sin z = \sin c \,.\, \sin x$.

Ist ferner $c = 90°$ ohne daß $a = 90°$ ist, so ergiebt sich $x = z = 90°$ und $y = a$. In der Figur zu (3.) ist dann MA die einzige Linie in der Ebene E, auf welcher MB senkrecht steht (vergl. §. 255. Nr. 3.); daher ist dann auch $MA \perp MC$, also auch $MA \perp F$, woraus folgt, daß auch die Ebene $AMB \perp F$ steht.

Was nun die anderen Fälle betrifft, wenn weder a, noch c gleich 90° ist, so findet man aus der Bedingung, daß cos. und sin. ächte Brüche sein müssen:

$$\operatorname{tg} c > \operatorname{tg} a$$
$$\sin c > \sin a$$
$$\cos c < \cos a,$$

wobei aber nur die absoluten Werthe der Functionen in Betracht kommen. Wir wollen die weitere Untersuchung an die dritte Ungleichung

$$\cos c < \cos a$$

anschließen und rathen dem Leser, zum besseren Verständniß des Folgenden die Seiten c und a als Peripheriewinkel in den Kreis zum Radius 1 einzutragen (wie in den Figuren zu §. 220. und 223.) und die Functionen als Linien (Abscissen) zu construiren; es handelt sich dann immer nur um die absolute Länge dieser Linien, also nicht um ihre Lage. Man findet nun:

ist c spitz und a spitz, so muß $c > a$ sein,
» c spitz » a stumpf, » » $c > 180° - a$ sein,
» c stumpf » a spitz, » » $c < 180° - a$ »
» c stumpf » a stumpf, » » $c < a$ sein,

In allen diesen Fällen sind auch die ersten beiden Ungleichungen richtig; daher geht aus dieser Untersuchung hervor, daß, wenn c und a nicht gleich 90° sind, dann die Aufgabe immer eine Auflösung hat, und immer nur eine, wenn bei jedem Werthe von a

c zwischen den Grenzen a und $180° - a$

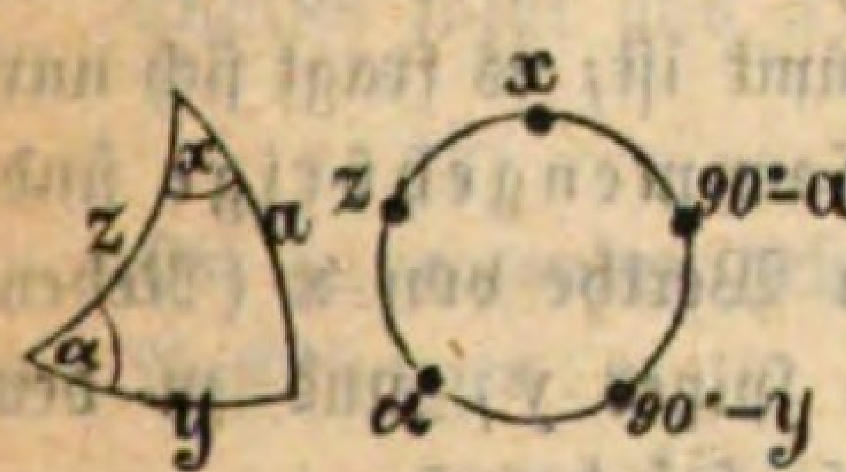
liegt. Es ist zwar y durch die Function sin. bestimmt, aber auch y kann nur einen Werth haben, weil nach (3.) y und a gleichartig sein müssen. Ohne dies angeführte Gesetz müßte man y aus der Neper'schen Regel durch eine andere Function, als den sin., bestimmen, etwa $\cos y = \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{cotg} c$.

Beispiel. Die eine Kathete eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks sei $a = 120°$ und die Hypotenuse $c = 100°$; gesucht die übrigen Stücke.

Aufl. Die andere Kathete $b = 69° \, 40' \, 41''$, $\alpha = 118° \, 25' \, 54''$, $\beta = 72° \, 13' \, 2''$.

Grundaufgabe Nr. 5. Gegeben eine Kathete a und der gegenüberliegende Winkel α.

Auflösung.



1) $\cos\alpha = \sin x \cdot \cos a$; $\sin x = \dfrac{\cos\alpha}{\cos a}$.

2) $\sin y = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{cotg}\alpha$; $\sin y = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg}\alpha}$.

3) $\sin a = \sin z \cdot \sin\alpha$; $\sin z = \dfrac{\sin a}{\sin\alpha}$.

Determination. Zunächst folgt aus 1) und 2), daß a und α gleichartig sein müssen; denn wäre das eine Element spitz, das andere stumpf, so würden $\sin x$ und $\sin y$ negativ werden; wäre aber das eine Element 90°, das andere $\gtrless 90°$, so würden $\sin x$ und $\sin y$ entweder 0, oder ∞ werden.

Als ein besonderer Fall ist nun folgender zu untersuchen:

$$a = 90° \quad \text{und} \quad \alpha = 90°.$$

In diesem Falle folgt aus 3), daß $z = 90°$ ist, während x und y unbestimmt sind, denn es wird $\sin x = \dfrac{0}{0}$ und $\sin y = \dfrac{\infty}{\infty}$. Uebrigens ist $x = y$, denn man kann umformen:

$$\sin y = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin a}{\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos a} = \frac{\sin a}{\sin\alpha} \cdot \sin x,$$

oder man entnimmt, daß x und y einander gleich sind, sonst aber jeden beliebigen Werth haben können, aus der Figur zu (3.). Die Linie MB steht, wenn

$a = 90°$ ist, senkrecht auf der Ebene E, folglich steht auch die Ebene AMB $\perp$ E, d. h. es ist auch $\alpha = 90°$. Hierbei bilden nun MA und MC den Neigungswinkel der Ebenen AMB und CMB, d. h. es ist $y = x$, und weil die Linie MA in der Ebene E jede Lage annehmen kann, ohne daß a und α aufhören gleich 90° zu sein, so können x und y jeden beliebigen Werth zwischen 0° und 180° annehmen.

Ein zweiter besonderer Fall ist

$$a = \alpha.$$

Es ergiebt sich dann $x = y = z = 90°$, wobei jetzt a und α jeden Werth haben können. In diesem Falle steht in der Figur zu (3.) MA $\perp$ MC, während MB in der Ebene F jede beliebige Lage haben kann.

Was nun die übrigen Fälle betrifft, so folgt aus den Gleichungen 1) bis 3), daß

$$\cos\alpha < \cos a$$
$$\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg} a$$
$$\sin\alpha > \sin a$$

sein muß, wenn man nur die absoluten Werthe dieser Functionen, nicht ihre Vorzeichen berücksichtigt. Hieraus folgt aber weiter:

sind α und a spitz, so muß $\alpha > a$ sein,
sind α und a stumpf, so muß $\alpha < a$ sein,

d. h. es muß α immer zwischen a und 90° liegen.

In diesen Fällen gestattet die Aufgabe immer zwei Auflösungen, weil jedes unbekannte Element durch die Function sin. bestimmt ist; es fragt sich nur, welche von den zwei Werthen für x, y und z zusammengehörige sind. Hierüber ist leicht zu entscheiden: nachdem die beiden Werthe von x (Nebenwinkel) gefunden sind, muß man zu dem spitzen x ein spitzes y, und zu dem stumpfen x ein stumpfes y nehmen. Was z betrifft, so folgt aus

$$\cos z = \cos a \,.\, \cos y,$$

daß z spitz ist, wenn beide Katheten spitz oder beide stumpf sind, hingegen stumpf, wenn die eine Kathete spitz, die andere stumpf ist. — Uebrigens kann man auch, nachdem x gefunden ist, y und z aus den Gleichungen

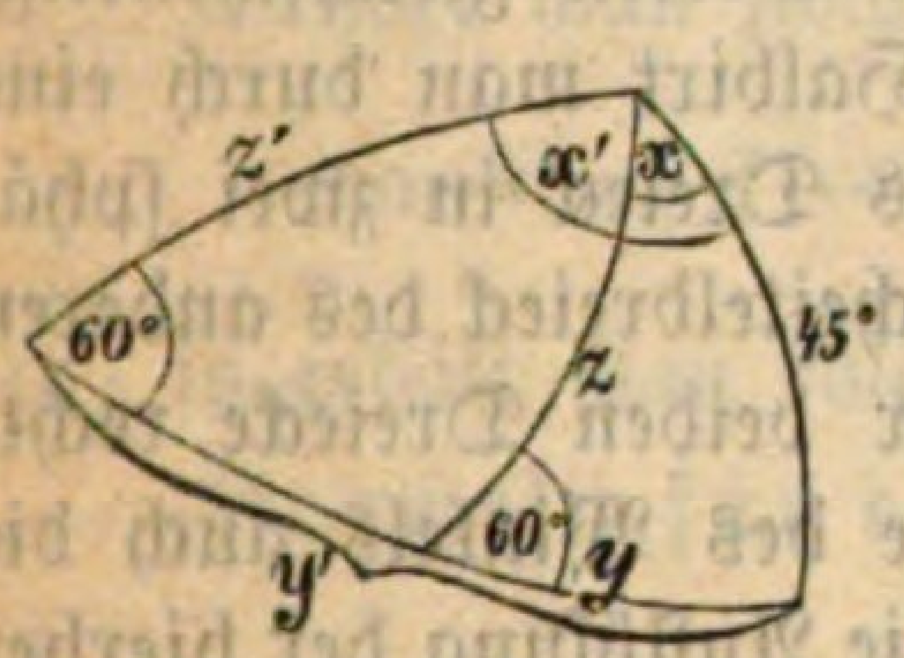
$$\sin a = \operatorname{cotg} x \,.\, \operatorname{tg} y \quad \text{und} \quad \cos z = \operatorname{cotg} x \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$$

entnehmen, wo dann jeder Zweifel über den Quadranten, in welchem y und z liegen, fortfällt.

Dem Leser möchte vielleicht noch schwer fallen, aus der Figur zu (3.) zu erkennen, daß zwei verschiedene sphärische Dreiecke existiren, wenn außer dem rechten Winkel an der Kante MC noch a und α gegeben sind und beide Elemente a und α spitz, oder beide stumpf sind. Wir wollen daher noch zeigen, wie man zu der in jener Figur gezeichneten Ecke die zweite hinzufügen kann. Denkt man sich die Ebene E über die Kante C'C verbreitet, so kann man in E auf der linken Seite von MC von M aus eine Linie ziehen, welche mit MC einen Winkel bildet, der dem Winkel AMC gleich ist; diese Linie mag MP heißen (man vergl. auch §. 255. Nr. 2.). Hierdurch erhält man eine körperliche Ecke,

deren Kanten MC, MB und MP sind, und diese Ecke ist dem körperlichen Dreieck MCBA zwar nicht congruent, aber demselben symmetrisch gleich, hat also dieselben Seiten und Winkel. Namentlich ist der Winkel an der Kante MP dem Winkel an der Kante MA gleich, also $= \alpha$. (Man kann auch die Gleichheit der Winkel durch Construction sehr leicht unmittelbar nachweisen; die Figur in §. 255. Nr. 2. zeigt die Construction, wenn man sich dort $CD \perp AD$ und $CF \perp AF$ denkt.) Wenn man nun die Linie MP über M verlängert — die Verlängerung mag MP′ heißen —, so sind MC, MB und MP′ die Kanten des zweiten körperlichen Dreiecks, welches an der Kante MC einen rechten Winkel, dann noch die Seite a und den gegenüberliegenden Winkel α hat.

Beispiel. Eine Kathete eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ist $a = 45°$, der gegenüberliegende Winkel $\alpha = 60°$; wie groß sind die andern Stücke?



Aufl. 1) $\cos 60° = \sin x \, . \cos 45°$.
2) $\sin y = \operatorname{tg} 45° \, . \operatorname{cotg} 60°$.
3) $\sin 45° = \sin 60° \, . \sin z$.

Aus diesen Gleichungen folgt:

$\sin x = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; folglich

I. $x = 45°$ oder $135°$.

Ferner aus 2) $\sin y = \operatorname{cotg} 60°$, daher

II. $y = 35° \, 15' 52''$ oder $144° \, 44' 8''$.

Endlich folgt aus 3) $\sin z = \frac{\sin 45°}{\sin 60°}$, folglich

III. $z = 54° \, 44' 8''$ oder $125° \, 15' 52''$.

Die zu einander gehörigen Werthe von x, y und z geben also folgende zwei Auflösungen:

$x = 45°$ und $x' = 135°$
$y = 35° \; 15' \; 52''$ $y' = 144° \; 44' \; 8''$
$z = 54° \; 44' \; 8''$ $z' = 125° \; 15' \; 52''$.

§. 360.

Das gleichschenklige und das gleichseitige sphärische Dreieck.

Nicht nur bei dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke nehmen die allgemeinen Gesetze der sphärischen Trigonometrie, namentlich die Gesetze I. bis IV., eine einfachere Gestalt an, auch bei anderen besonders geformten Dreiecken ist dies der Fall; namentlich bei dem Dreiecke, in welchem eine Seite $= 90°$ ist. Man kann die Berechnung dieses Dreiecks durch die Ergänzungsecke auf die Neper'sche Regel zurückführen, denn diese Ecke hat dann einen Winkel von $90°$; in der Regel ist aber die unmittelbare Anwendung der erwähnten Systeme noch bequemer.

Wie ferner in einzelnen besonderen Fällen jene Gesetze zu einer einfachen Form führen können, mag ein Beispiel zeigen.

Aufgabe. Zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind gleich 45°, der eingeschlossene Winkel = 60°; wie groß ist die dritte Seite x?

Aufl. $\cos x = (\cos 45°)^2 + (\sin 45°)^2 . \cos 60°$; hieraus

$\cos x = \frac{3}{4}$; $x = 41° \, 24' \, 34{,}6''$.

Abgesehen aber von solchen besonderen Fällen, sind noch zwei Arten von Dreiecken hervorzuheben, deren Auflösung durch Zurückführen auf das rechtwinklige Dreieck oder durch unmittelbare Anwendung der allgemeinen sphärisch-trigonometrischen Formeln sehr einfach wird.

1) Ein sphärisches Dreieck heißt gleichschenklig, wenn zwei Seiten desselben einander gleich sind. Nach §. 280. sind auch die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich (die Winkel an der Grundlinie), und umgekehrt ist ein Dreieck gleichschenklig, wenn es zwei einander gleiche Winkel hat. — Halbirt man durch eine Ebene den Winkel an der Spitze, so wird das Dreieck in zwei sphärische Dreiecke zerlegt, von denen jedes dem Scheiteldreieck des anderen congruent ist. Hieraus folgt, daß jedes der beiden Dreiecke rechtwinklig ist und daß durch die Halbirungsebene des Winkels auch die gegenüberliegende Seite halbirt wird, so daß die Auflösung der hierher gehörigen Aufgaben auf die Neper'sche Regel zurückzuführen ist. Uebrigens nehmen auch einzelne der früher entwickelten Gesetze für das gleichschenklige Dreieck eine sehr bequeme Form an. Bezeichnet a jeden Schenkel, α den gegenüberliegenden Winkel, b die Grundlinie und β den Winkel an der Spitze im gleichschenkligen Dreieck, so ergiebt sich aus der zweiten Gleichung in §. 355. Nr. (1.), wenn man $a = c$ setzt, und aus der zweiten Gleichung in §. 355. Nr. (4.), wenn man $\alpha = \gamma$ setzt:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\frac{b}{2}}{\sin a} \quad \text{und} \quad \cos\frac{b}{2} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}.$$

2) Ein sphärisches Dreieck heißt gleichseitig, wenn seine drei Seiten einander gleich sind. Im gleichseitigen Dreieck sind auch die Winkel einander gleich (§. 280.), und umgekehrt ist jedes Dreieck mit drei gleichen Winkeln auch gleichseitig.

Um bei dem gleichseitigen Dreieck aus der Seite a den Winkel α, oder aus dem Winkel α die Seite a zu finden, kann man die Aufgabe entweder durch Halbiren eines Winkels auf die Nepersche Regel zurückführen, oder die vorstehenden Gleichungen am Schlusse von Nr. 1. anwenden, oder auch aus den Systemen I. und II. folgern:

$$\cos a = \cos a^2 + \sin a^2 . \cos\alpha$$

$$\cos a(1 - \cos a) = \sin a^2 . \cos\alpha$$

$$2\cos a \,.\, \sin\frac{a^2}{2} = 4\sin\frac{a^2}{2}\cdot\cos\frac{a^2}{2}\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos a}{2\left(\cos\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\cos\alpha = -\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 \,.\, \cos a$$
$$\cos\alpha\,(1+\cos\alpha) = \sin\alpha^2 \,.\, \cos a$$
$$2\cos\alpha \,.\, \cos\frac{\alpha^2}{2} = 4\sin\frac{\alpha^2}{2}\cdot\cos\frac{\alpha^2}{2}\cdot\cos a$$

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

Wendet man noch die Formeln

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin\frac{\alpha^2}{2} \quad \text{und} \quad \cos a = 2\cos\frac{a^2}{2} - 1$$

an, so erhält man folgende

Formeln für das gleichseitige sphärische Dreieck

$$(1.)\quad \cos\alpha = \frac{\cos a}{2\left(\cos\frac{a}{2}\right)^2};\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{a}{2}}$$

$$(2.)\quad \cos a = \frac{\cos\alpha}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2};\quad \cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Hieraus folgt das einfache Gesetz:

$$2\cos\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = 1$$

d. h. im gleichseitigen sphärischen Dreieck ist das doppelte Product des cos. der halben Seite mit dem sin. des halben Winkels gleich 1.

Beispiel 1. Jede Seite eines sphärischen Dreiecks sei 90°, wie groß ist jeder Winkel (x)?

Aufl. $2\cos 45^\circ . \sin\frac{x}{2} = 1$; hieraus folgt $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $x = 90^\circ$. — Einfacher hat man hier aus (1.) $\cos x = 0$, $x = 90^\circ$.

Beispiel 2. Jede Seite eines sphärischen Dreiecks sei $= 60^\circ$; wie groß ist jeder Winkel (x)?

Aufl. $2 . \cos 30^\circ . \sin\frac{x}{2} = 1$, folglich $\sin\frac{x}{2} = \operatorname{tg} 30^\circ$; oder

$$\cos x = \frac{\cos 60^\circ}{2(\cos 30^\circ)^2} = \tfrac{1}{3};\ \text{hieraus } x = 70^\circ\ 31'\ 43''.$$

Beispiel 3. Jeder Winkel eines sphärischen Dreiecks sei = 120°; wie groß ist jede Seite?

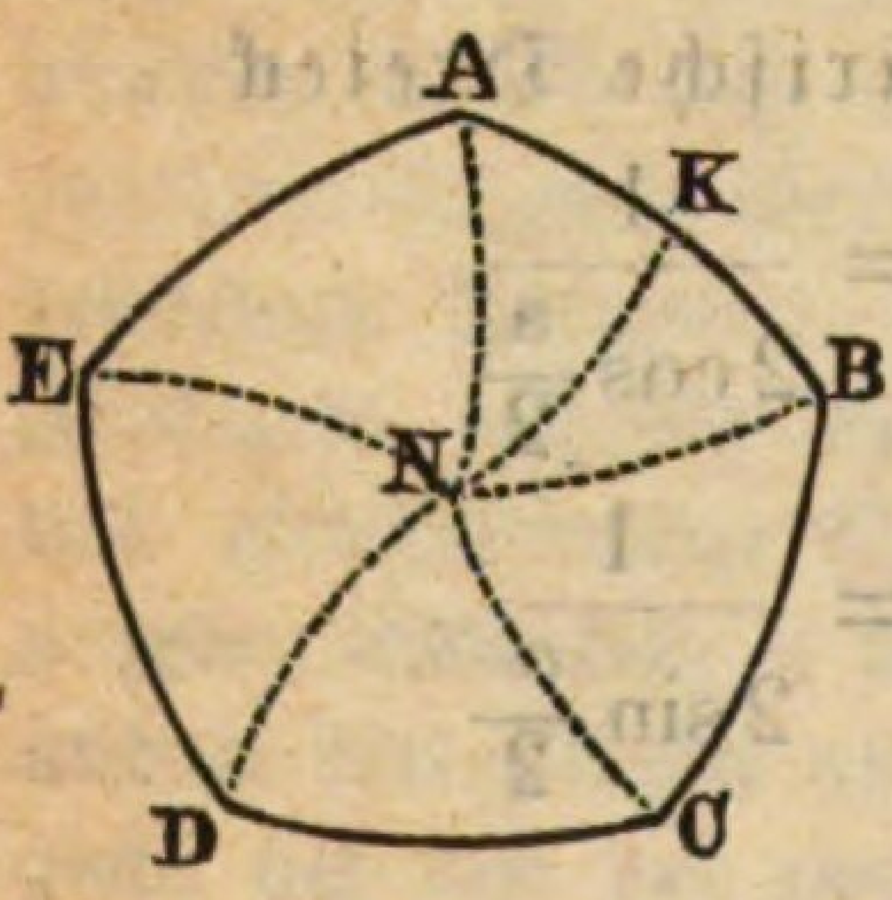
Antw. 109° 28′ 17″.

§. 361.
Die reguläre körperliche Ecke.

I. Eine körperliche Ecke heißt regulär, wenn sie lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel hat. — Das gleichseitige körperliche Dreieck ist eine reguläre Ecke.

II. Halbirt man alle Winkel einer regulären Ecke, so schneiden sich alle Halbirungs-Ebenen in einer geraden Linie, und diese Linie bildet sowohl mit allen Kanten der Ecke gleiche Winkel, als auch mit allen Seitenflächen; sie soll die Axe der regulären körperlichen Ecke genannt werden. — Jeder Punkt der Axe ist sowohl von allen Kanten gleich weit entfernt, als auch von allen Seitenflächen der Ecke.

Beweis. Um die Figur anschaulicher zu machen, wollen wir uns die Spitze der regulären körperlichen in den Mittelpunkt M einer Kugel gelegt denken; die Seitenflächen schneiden dann die Kugeloberfläche in Bogen größter Kugelkreise, die ein reguläres sphärisches Vieleck ABCDE bilden. Den Punkt M zeigt die Figur nicht; der Leser muß sich diesen Punkt hinter dem Papiere denken. A, B, C, D und E sind die Punkte, in welchen die Kanten der Ecke die Kugelober-oberfläche schneiden, so daß MA, MB, MC, MD und ME diese Kanten sind. Man halbire jetzt die beiden Winkel an den Kanten MA und MB durch zwei Ebenen, die sich in der Linie MN schneiden mögen (N liege in der Kugeloberfläche), und lege noch durch MN und jede andere Kante der körperlichen Ecke eine Ebene. Die reguläre körperliche Ecke wird so in lauter congruente dreikantige körperliche Ecken, welche die gemeinschaftliche Spitze M haben, das sphärische Vieleck ABCDE in lauter congruente sphärische Dreiecke zerlegt. Denn zunächst ist △ NAB dem △ NBC symmetrisch gleich, weil NB = NB, BA = BC und ∡ NBA = ∡ NBC ist, diese Stücke aber in beiden Dreiecken nicht nach derselben Richtung hin auf einander folgen (§. 281.). Hieraus ergiebt sich:



$$\measuredangle NAB = \measuredangle NCB;$$

folglich ist ∡ NCB die Hälfte des ∡ BCD der regulären körperlichen Ecke, die Ebene NMC halbirt diesen Winkel und ∡ NCD ist die andere Hälfte desselben. Weil nun aber die sphärischen Dreiecke NAB und

NBC gleichschenklig sind, so sind sie nicht nur symmetrisch gleich, sondern auch congruent (§. 281. Nr. 2.).

Ganz auf dieselbe Weise kann man nun vom $\triangle$ NBC zum $\triangle$ NCD und zu den folgenden Dreiecken übergehen, nachweisen, daß auch die Winkel an den Kanten MD, ME u. s. w. durch die entsprechenden Ebenen halbirt werden, und so die Congruenz aller sphärischen Dreiecke begründen. — Hieraus ergiebt sich aber der erste Theil des Satzes, weil ein Flächenwinkel nur durch eine Ebene halbirt werden kann. — Aus der Congruenz der gleichschenkligen sphärischen Dreiecke folgt nun, daß die Axe mit allen Kanten der regulären körperlichen Ecke gleiche Winkel bildet, und, wenn man die zugehörigen dreikantigen körperlichen Ecken zum Decken bringt, daß sie auch mit allen Seitenflächen gleiche Winkel bildet (durch Construction des Neigungswinkels).

Der letzte Theil des Satzes folgt jetzt leicht aus congruenten Dreiecken (§. 25. III.)

Anmerkung. Alle Ebenen, von denen jede durch die Axe und eine Kante einer regulären p-kantigen körperlichen Ecke geht, erzeugen um die Axe herum p gleiche Flächenwinkel, so daß jeder derselben, z. B. der Winkel ANB in dem $\triangle$ NAB, gleich $\frac{360^\circ}{p}$ ist. — Denkt man sich die Ecke um ihre Axe drehend bewegt, so bewegen sich alle Kanten in dem Mantel desselben Kegels, und jede Kante nimmt bei einer vollen Umdrehung nach und nach die Lage an, welche anfänglich jede der anderen Kanten hatte.

III. Schneidet man von allen Kanten einer regulären p-kantigen körperlichen von der Spitze M aus gleiche Stücke ab, so liegen die Endpunkte aller Stücke in einer Ebene und können als Ecken eines regulären ebenen p-Ecks betrachtet werden. Die Axe der körperlichen Ecke schneidet dieses p-Eck senkrecht und geht durch seinen Mittelpunkt.

Beweis. Fällt man vom Endpunkt jeder Kante auf die Axe eine Senkrechte, so entstehen p congruente Dreiecke (§. 25. III.); daher treffen alle Senkrechten denselben Punkt der Axe. Diese Senkrechten bilden mit einander zugleich die Neigungswinkel zu den in der vorhergehenden Anmerkung erwähnten gleichen Flächenwinkeln. Der Satz folgt nun leicht aus §. 253. II.

IV. Aufgabe. Jede Seite einer regulären p-kantigen körperlichen Ecke sei gleich α (so daß $p.\alpha < 360^\circ$ ist); man soll den (Flächen-) Winkel δ der Ecke berechnen.

Auflösung. In der Figur zu II. sei die Anzahl der Seiten des sphärischen Vielecks $= p$; dann ist im gleichschenkligen sphärischen Dreieck NAB (wenn MN die Axe der körperlichen Ecke ist) $\measuredangle$ ANB

$= \frac{360^\circ}{p}$, $\measuredangle$ NAB $= \frac{\delta}{2}$ und die Seite AB $= \alpha$. Denkt man sich den Winkel ANB halbirt, so entsteht das rechtwinklige sphärische Dreieck ANK, in welchem $\measuredangle$ ANK $= \frac{180^\circ}{p}$, $\measuredangle$ NAK $= \frac{\delta}{2}$ und die Katheten AK $= \frac{\alpha}{2}$ ist. Nach der Neper'schen Regel ist daher

$$\cos\frac{180^\circ}{p} = \sin\frac{\delta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}, \text{ folglich}$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\frac{180^\circ}{p}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Uebungs-Aufgabe. Jede Seite einer regulären zwölfkantigen körperlichen Ecke sei gleich 20°; wie groß ist jeder Winkel (δ), und welchen Winkel (φ) bildet die Axe mit jeder Kante, und welchen Winkel (ψ) mit jeder Seitenfläche?

Aufl. $\delta = 157^\circ\ 31'\ 27{,}6''$; $\varphi = 42^\circ\ 8'\ 18{,}6''$ und $\psi = 41^\circ\ 9'\ 7{,}8''$.

Von der Berechnung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke.

§. 362.

Die Aufgabe »von den sechs Stücken eines sphärischen Dreiecks, den drei Seiten und den drei Winkeln, sind drei gegeben; man soll die drei übrigen finden« führt zu sechs Grundaufgaben. Dieselbe Aufgabe, für das ebene Dreieck gestellt, gab nur vier Grundaufgaben, weil im ebenen Dreieck die drei Winkel nicht von einander unabhängige, also nicht bestimmende Stücke sind. Diese sechs Grundaufgaben für schiefwinklige sphärische Dreiecke schließen sich in ihrer Folge den Lehrsätzen von der Congruenz dieser Dreiecke (§. 281.) an und folgen im nächsten §.; ihre Auflösung erfolgt durch die in §. 351. bis §. 357. entwickelten Gesetze. Dieser Auflösung schicken wir folgende Bemerkungen voran:

Zunächst fragt es sich bei jeder Aufgabe, ob sie nur eine, oder mehr als eine Auflösung gestattet. Nun zeigen freilich die Congruenz-Sätze in §. 281., daß in jedem Falle zunächst zwei Dreiecke mit den gegebenen drei Stücken existiren, die nicht congruent, wohl aber symmetrisch gleich sind, weil diese Stücken nach zwei verschiedenen Richtungen hin auf einander folgen können. Da aber symmetrisch gleiche

Dreiecke auch in den nicht gegebenen Stücken übereinstimmen und es sich bei der Berechnung dieser Stücke nur um ihre Größe, und nicht um die Richtung, in welcher sie auf einander folgen, handelt, so haben wir auf diese Richtung nicht Rücksicht zu nehmen; daher können die den ersten vier Congruenz-Sätzen entsprechenden Grundaufgaben nur eine Auflösung haben, weil bei diesen Congruenz-Sätzen eine andere Bedingung, als die Uebereinstimmung in den gegebenen drei Stücken, fehlt. Anders ist es bei den letzten beiden Grundaufgaben. Hier enthält jeder der beiden entsprechenden Congruenz-Sätze noch eine besondere Nebenbedingung, welche sich auf ein nicht gegebenes Stück (in den beiden Dreiecken, um deren Congruenz es sich handelt) bezieht; daher können diese Grundaufgaben mehr als eine Auflösung zulassen, und wir werden sehen, daß sie in der That zwei Auflösungen haben können.

Demnächst machen wir den Leser darauf aufmerksam, daß, wenn ein Stück eines sphärischen Dreiecks durch die Function sin. bestimmt wird, es ungewiß bleibt, ob dieses Stück spitz oder stumpf ist. Hierüber muß also eine besondere Untersuchung entscheiden, während durch die Functionen cos., tg. und cotg. jedes Stück unzweifelhaft bestimmt ist.

Endlich erfordert eine erschöpfende Analysis der Grundaufgaben noch eine Untersuchung darüber, ob die drei bestimmenden Stücke eines sphärischen Dreiecks von einander unabhängig, also ganz beliebig gegeben werden können. Diese Determination kann allerdings aus dem Resultate für die unbekannten Stücke entnommen werden, sie ergiebt sich aber in den meisten Fällen einfacher aus den nachfolgenden Sätzen, durch welche zugleich die andern hier gestellten Fragen, welche bei der Auflösung der Grundaufgaben erledigt werden sollen, zum größten Theile ihre Beantwortung finden werden, und die wir hier nochmals zusammen stellen.

1) Jede Seite und jeder Winkel eines sphärischen Dreiecks liegt zwischen 0 und 180°, daher die halbe Seite und der halbe Winkel zwischen 0° und 90°.

2) Die Summe zweier Seiten ist immer größer als die dritte Seite; die Summe zweier Winkel ist immer kleiner als der um 180° vermehrte dritte Winkel (§. 278.).

3) Die Summe der drei Seiten liegt zwischen 0 und 4R, die Summe der drei Winkel zwischen 2R und 6R (§. 279. Anmerk.).

4) Dem größeren Winkel liegt die größere Seite, der größeren Seite der größere Winkel gegenüber (§. 280.).

5) Die Summe zweier Seiten ist immer mit der Summe der gegenüberliegenden Winkel gleichartig, d. h. beide Summen sind immer gleichzeitig kleiner als 180°, oder gleich 180°, oder größer als 180° (§. 353. Anmerk. 1.).

§. 363.

Die Grundaufgaben über schiefwinklige sphärische Dreiecke.

Die frühere Bezeichnung soll beibehalten werden. Wir bezeichnen die Seiten des sphärischen Dreiecks mit a, b und c, die gegenüberliegenden Winkel resp. mit α, β und γ; ferner mit s die halbe Summe der drei Seiten und mit σ die halbe Summe der drei Winkel; es ist also:

$$s = \frac{a+b+c}{2} \text{ und } \sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

Aufgabe 1.

Es sind zwei Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel γ eines sphärischen Dreiecks gegeben; man soll die übrigen Stücke c, α und β finden.

Aufl. 1. (Wenn man zuerst die unbekannten Winkel α und β berechnen will und dann die dritte Seite c.) Die Neper'schen Analogien (§. 357.) geben unmittelbar:

$$1)\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

$$2)\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

Nachdem aus diesen Formeln $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ gefunden sind, ergeben sich α und β durch Addition und Subtraction beider Werthe. Um c zu finden, kann man entweder eine der Gaußischen Formeln anwenden, oder man entnimmt aus dem System III. (§. 353.)

$$3)\qquad \sin c = \frac{\sin a.\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Ob c spitz oder stumpf ist, muß nach dem vorhergehenden §. beurtheilt werden. Die Aufgabe hat nur eine Auflösung.

Auflösung 2. (Wenn zuerst die dritte Seite c berechnet werden soll, und dann die Winkel α und β.) Sollen alle drei unbekannten Stücke gefunden werden, so ist diese Auflösung unbequemer als die erste; man wird sie also nur anwenden, wenn c allein gesucht wird, oder

wenn man zur größeren Sicherheit c unmittelbar aus den gegebenen Stücken finden will, oder wenn man durch diese Auflösung die Richtigkeit der Resultate der ersten prüfen will. Aus dem System I. (§. 351.) ist:

$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos\gamma$$

Zur bequemeren Rechnung mit Logarithmen kann man so umformen:

$$\cos c = \cos a \,.\, (\cos b + \operatorname{tg} a \,.\, \sin b \,.\, \cos\gamma).$$

Bestimmt man jetzt φ so, daß

$$(1.)\quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma$$

ist, so folgt

$$\cos c = \cos a \,.\, (\cos b + \sin b \,.\, \operatorname{tg}\varphi)$$

$$= \cos a \,.\, \frac{\cos b \,.\, \cos\varphi + \sin b \,.\, \sin\varphi}{\cos\varphi}, \text{ oder}$$

$$(2.)\quad \cos c = \frac{\cos a \,.\, \cos(b - \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Aus (1.) ergeben sich zwei Werthe für φ, die um 180° verschieden sind; setzt man aber in (2.) 180° + φ statt φ, so bleibt der Werth von cos c unverändert, d. h. man erhält doch für c nur einen Werth, also für die Aufgabe nur eine Auflösung.

Um α und β zu finden kann man das System III. anwenden, muß aber besonders beurtheilen, ob diese Winkel spitz oder stumpf sind.

Beispiel 1. Zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind gegeben, $a = 50°\ 7'$ und $b = 44°\ 2'$, der eingeschlossene Winkel ist $\gamma = 20°\ 4'$; wie groß sind die andern Stücke?

Aufl. Es ist $\frac{a+b}{2} = 47°\ 4'\ 30''$, $\frac{a-b}{2} = 3°\ 2'\ 30''$ und $\frac{\gamma}{2} = 10°\ 2'$; folglich ist

$$1)\ \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos 3°\ 2'\ 30''}{\cos 47°\ 4'\ 30''} \,.\, \operatorname{cotg} 10°\ 2'.$$

$$2)\ \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin 3°\ 2'\ 30''}{\sin 47°\ 4'\ 30''} \,.\, \operatorname{cotg} 10°\ 2'.$$

Hieraus folgt:

$$\log\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = 10{,}9184209 - 10;\ \text{folglich}\ \frac{\alpha+\beta}{2} = 83°\ 7'\ 11''.$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = 9{,}6123342 - 10;\ \text{folglich}\ \frac{\alpha-\beta}{2} = 22°\ 16'\ 22''.$$

Addirt und subtrahirt man jetzt die gefundenen Winkel, so folgt:

I. $\alpha = 105°\ 23'\ 33''$.

II. $\beta = 60°\ 50'\ 49''$.

Um endlich die Seite c zu finden, hat man:

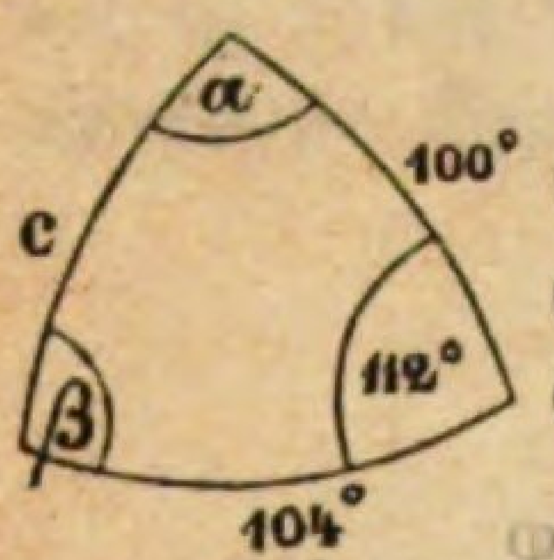
3) $\sin c : \sin 44^\circ\ 2' = \sin 20^\circ\ 4' : \sin 60^\circ\ 50'\ 49''$,

folglich $$\sin c = \frac{\sin 44^\circ\ 2' . \sin 20^\circ\ 4'}{\sin 60^\circ\ 50'\ 49''};$$

$\log \sin c = 9{,}4362962 - 10$; folglich $c = 15^\circ\ 50'\ 52{,}3''$.

Es fragt sich nur noch, ob der gefundene Winkel, oder sein Nebenwinkel der richtige Werth von c ist. Aus 3) folgt aber, weil dem kleineren Winkel die kleinere Seite gegenüberliegen muß, daß $c < 44^\circ\ 2'$ ist; daher ist

III. $c = 15^\circ\ 50'\ 52{,}3''$.



Beispiel 2. Zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind gegeben, $a = 104^\circ$ und $b = 100^\circ$, und der eingeschlossene Winkel $\gamma = 112^\circ$; man soll die andern Stücke finden.

Aufl. Wir wollen diesmal die weniger bequeme Auflösung 2. wählen und zuerst c, dann aber α und β suchen. Es ist

$$\cos c = \cos 104^\circ . \cos 100^\circ + \sin 104^\circ . \sin 100^\circ . \cos 112^\circ$$
$$= \cos 104^\circ . (\cos 100^\circ + \operatorname{tg} 104^\circ . \sin 100^\circ . \cos 112^\circ).$$

Man kann nun

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} 104^\circ . \cos 112^\circ$$

setzen und, wie oben angegeben, verfahren; bequemer aber ist es, zunächst die stumpfen Winkel auf spitze zu reduciren, wodurch folgende Umformung entsteht:

$$\cos c = \cos 76^\circ . \cos 80^\circ - \sin 76^\circ . \sin 80^\circ \cos 68^\circ$$
$$= \cos 76^\circ . (\cos 80^\circ - \operatorname{tg} 76^\circ . \sin 80^\circ . \cos 68^\circ).$$

Setzt man nun

(1.) $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} 76^\circ . \cos 68^\circ$, so folgt:

(2.) $$\cos c = \frac{\cos 76^\circ . \cos (80^\circ + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Aus (1.) folgt:

$\log \operatorname{tg} \varphi = 10{,}1768043 - 10$; folglich $\varphi = 56^\circ\ 21'\ 12''$.

Setzt man diesen Werth in (2.) ein, so entsteht:

$$\cos c = \frac{\cos 76^\circ . \cos 136^\circ\ 21'\ 12''}{\cos 56^\circ\ 21'\ 12''} = -\frac{\cos 76^\circ . \cos 43^\circ\ 38'\ 48''}{\cos 56^\circ\ 21'\ 12''}.$$

Hieraus $\log \cos (180^\circ - c) = 9{,}4996152 - 10$; folglich

I. $c = 108^\circ\ 25'\ 5''$.

Um nun α und β zu finden, hat man

$$\sin \alpha : \sin 112^\circ = \sin 104^\circ : \sin 108^\circ\ 25'\ 5''$$
$$\sin \beta : \sin 112^\circ = \sin 100^\circ : \sin 108^\circ\ 25'\ 5'',$$ folglich

(3.) $$\sin \alpha = \frac{\sin 68^\circ . \sin 76^\circ}{\sin 71^\circ\ 34'\ 55''} \text{ und } \sin \beta = \frac{\sin 68^\circ . \sin 80^\circ}{\sin 71^\circ\ 34'\ 55''}.$$

Hieraus folgt weiter:

$\log \sin \alpha = 9{,}9769061 - 10$ und $\log \sin \beta = 9{,}9833535 - 10$.

Weil aber aus (3.) nicht erkannt werden kann, ob α und β spitz oder stumpf sind, so hat man vorläufig:

$$\alpha = \begin{cases} 71^\circ\ 28'\ 48'' \text{ oder} \\ 108^\circ\ 31'\ 12'' \end{cases} \text{ und } \beta = \begin{cases} 74^\circ\ 14'\ 14{,}5'' \text{ oder} \\ 105^\circ\ 45'\ 45{,}5''. \end{cases}$$

Welche Werthe sind nun die richtigen? Zunächst kann über α leicht entschieden werden. Da der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt, so muß $\alpha > \beta$ sein, und weil der spitze Winkel α kleiner als jeder der beiden Werthe von β ist, so muß α stumpf sein, d. h. es ist

II. $\alpha = 108^\circ\ 31'\ 12''$.

Ueber β ist nicht so leicht zu entscheiden; weil aber jetzt alle übrigen Stücke des Dreiecks bekannt sind, so kann man aus einem beliebigen System eine Gleichung heraussuchen, welche eine andere Function von β, als den sin., enthält, wodurch dann über β unzweifelhaft entschieden wird. Nehmen wir das System I., so ist

$$\cos 100^\circ = \cos 104^\circ . \cos c + \sin 104^\circ . \sin c . \cos\beta, \text{ oder}$$
$$\cos 100^\circ - \cos 104^\circ . \cos c = \sin 104^\circ . \sin c . \cos\beta.$$

Nun ist die linke Seite dieser Gleichung negativ, denn der Minuend ist negativ und der Subtrahend positiv, und das Product $\sin 104^\circ . \sin c$ ist positiv; daher ergiebt sich $\cos\beta$ negativ, und β ist stumpf, also

III. $\beta = 105^\circ\ 45'\ 45{,}5''$.

Aufgabe 2.

Zwei Winkel α und β eines sphärischen Dreiecks sind gegeben, und die zwischen ihnen liegende Seite c; man soll die übrigen Stücke a, b und γ berechnen.

Auflösung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist der Auflösung der vorhergehenden analog, ja man kann die vorliegende Aufgabe mittelst der Ergänzungsecke auf die vorige zurückführen; denn in der Ergänzungsecke kennt man zwei Seiten ($180^\circ - \alpha$ und $180^\circ - \beta$) und den eingeschlossenen Winkel ($180^\circ - c$). Wir können uns daher kurz fassen.

Aus den Neper'schen Analogien hat man:

$$1)\quad \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} . \operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

$$2)\quad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} . \operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

Nachdem aus diesen Gleichungen $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$ gefunden sind, erhält man a und b durch Addition und Subtraction beider Werthe.

Um γ zu berechnen, kann man entweder eine der Gaußischen Formeln anwenden, oder aus dem System III. entnehmen:

$$3)\quad \sin\gamma = \frac{\sin\alpha.\sin c}{\sin a},$$

wobei wieder besonders zu untersuchen ist, ob γ spitz oder stumpf ist. Die Aufgabe gestattet nur eine Auflösung.

Will man γ zuerst finden, also nur durch α, β und c bestimmen, so giebt das System II.

$$\cos\gamma = -\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos c$$
$$= -\cos\alpha.(\cos\beta - \operatorname{tg}\alpha.\sin\beta.\cos c).$$

Bestimmt man jetzt den Winkel φ so, daß

$$(1.)\quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha.\cos c$$

ist, so erhält man durch eine leichte Umformung (wie in der vorigen Aufgabe).

$$(2.)\quad \cos\gamma = -\frac{\cos\alpha.\cos(\beta+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

a und b können jetzt mittelst des Systems III. gefunden werden.

Beispiel 1. Zwei Winkel eines sphärischen Dreiecks sind gegeben, $\alpha = 110°\ 40'$ und $\beta = 24°$, die eingeschlossene Seite ist $= 60°$; wie groß sind die andern Stücke?

Aufl. Es ist $\frac{\alpha+\beta}{2} = 67°\ 20'$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = 43°\ 20'$ und $\frac{c}{2} = 30°$; daher

$$1)\quad \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos 43°\ 20'}{\cos 67°\ 20'}\cdot\operatorname{tg}30°$$

$$2)\quad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin 43°\ 20'}{\sin 67°\ 20'}\cdot\operatorname{tg}30°;$$

$\log\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = 10{,}0373199 - 10$; folglich $\frac{a+b}{2} = 47°\ 27'\ 31{,}5''$.

$\log\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = 9{,}6328266 - 10$; folglich $\frac{a-b}{2} = 23°\ 14'\ 13{,}2''$.

Durch Addition und Subtraction ergiebt sich nun:

I. $a = 70°\ 41'\ 44{,}7''$.

II. $b = 24°\ 13'\ 18{,}3''$.

Aus der Proportion

$3)\ \sin\gamma : \sin 60° = \sin 24° : \sin 24°\ 13'\ 18{,}3''$

folgt nun $\log\sin\gamma = 9{,}9337750 - 10$, folglich

III. $\gamma = 59°\ 9'\ 22{,}5''$.

Daß γ spitz ist, folgt daraus, daß $\gamma < 110° \ 40'$ sein muß (§. 362. Nr. 4.); der Nebenwinkel von $59° \ 9' \ 22{,}5''$ ist aber größer als $110° \ 40'$.

Beispiel 2. Eine Seite eines sphärischen Dreiecks sei $= 153°$, die beiden anliegenden Winkel $= 148°$ und $75°$; wie groß ist der dritte Winkel?

Aufl. Da nur der dritte Winkel γ gesucht wird, so nimmt man aus dem System II.:

$$\cos\gamma = -\cos 148°.\cos 75° + \sin 148°.\sin 75°.\cos 153°$$
$$= \cos 32°.\cos 75° - \sin 32°.\sin 75°.\cos 27°$$
$$= \cos 32°.(\cos 75° - \operatorname{tg} 32°.\sin 75°.\cos 27°).$$

Setzt man jetzt

(1.) $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} 32°.\cos 27°$, so folgt:

(2.) $\cos\gamma = \dfrac{\cos 32°.\cos(75° + \varphi)}{\cos\varphi}$.

Man erhält $\log \operatorname{tg}\varphi = 9{,}7456701 - 10$; hieraus:

I. $\varphi = 29° \ 6' \ 26{,}7''$.

Da nun $75° + \varphi$ stumpf ist, so entsteht, wenn man den cos. dieses Winkels auf den cos. des Nebenwinkels reducirt, aus (2.):

$$\cos\gamma = -\frac{\cos 32°.\cos 75° \ 53' \ 33{,}3''}{\cos 29° \ 6' \ 26{,}7''}.$$

$\log\cos(180° - \gamma) = 9{,}3739813 - 10$; $180° - \gamma = 76° \ 18' \ 54{,}4''$;

II. $\gamma = 103° \ 41' \ 5{,}6''$.

Aufgabe 3.

Es sind die drei Seiten a, b und c eines sphärischen Dreiecks gegeben; man soll die drei Winkel α, β und γ berechnen.

Auflösung. Unmittelbar aus dem System V. (§. 355.) ist:

$$1)\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b).\sin(s-c)}{\sin s.\sin(s-a)}}.$$

$$2)\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a).\sin(s-c)}{\sin s.\sin(s-b)}}.$$

$$3)\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a).\sin(s-b)}{\sin s.\sin(s-c)}}.$$

Die Auflösung ist deshalb besonders bequem, weil man zu allen drei Winkeln nur dieselben vier Logarithmen braucht, und weil eine Untersuchung, ob die Winkel spitz oder stumpf sind, wegfällt; denn die halben Winkel sind immer spitz. Die Aufgabe hat nur *eine* Auflösung.

Etwas bequemer wird die praktische Rechnung, wenn man alle drei Winkel berechnen will, noch dadurch, daß man — ähnlich wie

in der ebenen Trigonometrie (§. 241. Aufg. 2.) — den Werth für $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ so umformt:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin(s-a)} \cdot \sqrt{\frac{\sin(s-a) \, . \sin(s-b) \, . \sin(s-c)}{\sin s}}.$$

Bezeichnet man die Quadratwurzel in dieser Gleichung mit ϱ und formt auch $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ ähnlich wie $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ um, so folgt:

$$(1.) \qquad \varrho = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \, . \sin(s-b) \, . \sin(s-c)}{\sin s}}.$$

$$(2.) \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{\sin(s-a)}; \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{\sin(s-b)}; \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{\sin(s-c)}.$$

Soll nur **ein** Winkel berechnet werden, oder will man die Richtigkeit der durch die vorstehenden Formeln erhaltenen Resultate prüfen, so kann man eine der Formeln in §. 355. (1.) oder (2.) benutzen, z. B.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \, . \sin(s-a)}{\sin b \, . \sin c}}.$$

Beispiel. Die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind $a = 120° \, 20'$, $b = 55° \, 30'$ und $c = 80° \, 10'$; wie groß sind die drei Winkel?

Aufl. Es ist $a + b + c = 256°$; folglich:

$$s = 128°; \qquad s - a = 7° \, 40'$$
$$s - b = 72° \, 30'; \qquad s - c = 47° \, 50'.$$

Da $\sin 128° = \sin 52°$ ist, so hat man:

$$\varrho = \sqrt{\frac{\sin 7° \, 40' \, . \sin 72° \, 30' \, . \sin 47° \, 50'}{\sin 52°}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{\sin 7° \, 40'}; \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{\sin 72° \, 30'}; \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{\sin 47° \, 50'};$$

$$\begin{aligned}
\log\sin 7° \, 40' &= 9{,}1251872 - 10 \\
\log\sin 72° \, 30' &= 9{,}9794195 - 10 \\
\log\sin 47° \, 50' &= 9{,}8699326 - 10 \\
\hline
& 28{,}9745393 - 30 \\
\log\sin 52° &= 9{,}8965321 - 10 \\
\hline
& 19{,}0780072 - 20 \\
2) \hline
\log\varrho &= 9{,}5390036 - 10
\end{aligned}$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 10{,}4138164 - 10; \quad \frac{\alpha}{2} = 68° \, 54' \, 40{,}7''.$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 9{,}5595841 - 10; \quad \frac{\beta}{2} = 19° \, 56' \, 14''.$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 9{,}6690710 - 10; \quad \frac{\gamma}{2} = 25° \, 1' \, 12{,}5''.$$

Es ist sonach:

I. $\alpha = 137^\circ\ 49'\ 21{,}4''$

II. $\beta = 39^\circ\ 52'\ 28''$.

III. $\gamma = 50^\circ\ 2'\ 25''$.

Aufgabe 4.

Es sind die drei Winkel α, β und γ eines sphärischen Dreiecks gegeben, man soll die drei Seiten a, b und c berechnen.

Auflösung. Diese Aufgabe ist ganz ähnlich, wie die vorhergehende, zu lösen und läßt sich auch mittelst der Ergänzungsecke auf diese zurückführen. Unmittelbar nach dem System VI. (§. 355.) ist

$$1)\quad \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\,.\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\,.\cos(\sigma-\gamma)}}.$$

$$2)\quad \operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\,.\cos(\sigma-\beta)}{\cos(\sigma-\alpha)\,.\cos(\sigma-\gamma)}}.$$

$$3)\quad \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\,.\cos(\sigma-\gamma)}{\cos(\sigma-\alpha)\,.\cos(\sigma-\beta)}}.$$

Alle drei Seiten sind durch dieselben vier Logarithmen zu berechnen, auch findet keine besondere Untersuchung darüber Statt, ob die Seiten spitz oder stumpf sind, denn die halben Seiten sind immer spitz. Die Aufgabe hat nur eine Auflösung.

Die praktische Rechnung wird noch etwas bequemer, namentlich wenn alle drei Seiten berechnet werden sollen, durch folgende Umformung:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \cos(\sigma-\alpha)\,.\sqrt{-\frac{\cos\sigma}{\cos(\sigma-\alpha)\,.\cos(\sigma-\beta)\,.\cos(\sigma-\gamma)}}$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \cos(\sigma-\alpha):\sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\alpha)\,.\cos(\sigma-\beta)\,.\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma}}.$$

Bezeichnet man die letzte Quadratwurzel durch ϱ' und formt auch die Werthe für $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ und $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ eben so um, wie den Werth von $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, so entsteht:

$$(1.)\quad \varrho' = \sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\alpha)\,.\cos(\sigma-\beta)\,.\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma}}$$

$$(2.)\quad \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\cos(\sigma-\alpha)}{\varrho'};\ \operatorname{tg}\frac{b}{2} = \frac{\cos(\sigma-\beta)}{\varrho'};\ \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\cos(\sigma-\gamma)}{\varrho'}.$$

Soll nur eine Seite berechnet werden, oder will man die Richtigkeit der durch die vorstehende Auflösung erhaltenen Resultate prüfen, so kann man eine der Formeln in §. 355. (3.) oder (4.) benutzen, z. B.

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}}.$$

Beispiel. Die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks sind $\alpha = 130^\circ$, $\beta = 70^\circ$ und $\gamma = 40^\circ$; wie groß sind die drei Seiten?

Aufl. Es ist $\alpha + \beta + \gamma = 240^\circ$, folglich:

$$\sigma = 120^\circ;\ \sigma-\alpha = -10^\circ;\ \sigma-\beta = 50^\circ;\ \sigma-\gamma = 80^\circ.$$

Da $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$ ist, so hat man

$$\varrho' = \sqrt{\frac{\cos 10^\circ\,.\,\cos 50^\circ\,.\,\cos 80^\circ}{\cos 60^\circ}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\cos 10^\circ}{\varrho'};\ \operatorname{tg}\frac{b}{2} = \frac{\cos 50^\circ}{\varrho'};\ \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\cos 80^\circ}{\varrho'}.$$

$$\begin{aligned}
\log\cos 10^\circ &= 9{,}9933515 - 10\\
\log\cos 50^\circ &= 9{,}8080675 - 10\\
\log\cos 80^\circ &= 9{,}2396702 - 10\\
\hline
&\ 29{,}0410892 - 30\\
\log\cos 60^\circ &= 9{,}6989700 - 10\\
\hline
&\ 19{,}3421192 - 20\\
2)\hline
\log\varrho' &= 9{,}6710596 - 10
\end{aligned}$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{a}{2} = 10{,}3222919 - 10;\ \frac{a}{2} = 64^\circ\ 32'\ 25{,}3''.$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{b}{2} = 10{,}1370079 - 10;\ \frac{b}{2} = 53^\circ\ 53'\ 28{,}8''.$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2} = 9{,}5686106 - 10;\ \frac{c}{2} = 20^\circ\ 19'\ 19{,}3''.$$

Es ist sonach:

I. $a = 129^\circ\ \ 4'\ 50{,}6''$.
II. $b = 107^\circ\ 46'\ 57{,}6''$.
III. $c = \ 40^\circ\ 38'\ 38{,}6''$.

Aufgabe 5.

Es sind zwei Seiten a und b und der der Seite a gegenüberliegende Winkel α eines sphärischen Dreiecks gegeben; man soll die übrigen Stücke c, β und γ berechnen.

Auflösung. Daß diese Aufgabe zwei Auflösungen haben kann, erkennt man leicht aus der letzten Figur in §. 281. (Seite 26. unten). Denkt man sich das körperliche Dreieck MBCX gleichschenklig, so daß Seite CMB = CMX = a ist, zieht in der verbreiteten Ebene BMX beliebig die Linie MA, legt durch MA und MC eine Ebene und bezeichnet den Linien-Winkel AMC mit b und den Flächenwinkel an der Kante MA mit α: so enthält jedes der beiden körperlichen Dreiecke

MABC und MAXC die beiden Seiten a und b und den a gegenüberliegenden Winkel α. — Bei der Auflösung der vorliegenden Aufgabe haben wir zu untersuchen, in welchem Falle sie zwei Auflösungen hat und in welchem Falle nur eine, und ob sie noch mehr als zwei Auflösungen haben kann.

Nach dem System III. hat man:

$$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta, \text{ folglich}$$

$$(1.) \qquad \sin\beta = \frac{\sin b . \sin\alpha}{\sin a}.$$

Da kein Stück eines sphärischen Dreiecks 0° oder 180° sein kann, da also $\sin\beta$ die Form $\frac{0}{0}$ nicht annehmen kann, so erkennen wir zunächst, daß die Aufgabe niemals ganz unbestimmt ist. Ist $\sin b . \sin\alpha = \sin a$, in welchem Falle $\sin\beta = 1$, also $\beta = 90°$ wird, so hat die Aufgabe nur eine Auflösung; ist $\sin b . \sin\alpha > \sin a$, so hat sie gar keine Auflösung.

Es bleibt der Fall zu untersuchen übrig, wenn $\sin b . \sin\alpha < \sin a$ ist. Dann kann die Aufgabe zwei Auflösungen haben, weil β spitz und stumpf sein kann, aber auch nur zwei; denn ist β bestimmt, so ergiebt sich c mittelst der Neperschen Analogien ganz unzweifelhaft, wodurch dann schon aus den drei jetzt bekannten Seiten das Dreieck bestimmt ist. Ob aber für β beide Werthe Geltung haben, oder nur der eine, d. h. ob die Aufgabe zwei Auflösungen, oder nur eine hat, geht aus der Gleichung (1.) nicht hervor; die Entscheidung hierüber erfolgt in einzelnen Fällen schon durch das Gesetz in §. 362. Nr. 4., im Allgemeinen aber durch §. 362. Nr. 5. Die Untersuchung hierüber ist folgende:



Nach dem angeführten Gesetz Nr. 5. sind $a + b$ und $\alpha + \beta$ immer gleichzeitig gleich 180°, oder größer, oder kleiner als 180°.

I. $a + b = 180°$, also auch $\alpha + \beta = 180°$.

Wir unterscheiden hier folgende Fälle:

1) $\alpha = 90°$, so ist $\beta = 90°$, und die Aufgabe hat nur eine Auflösung.

2) $\alpha > 90°$, so ist $\beta < 90°$, also wieder nur eine Auflösung.

3) $\alpha < 90°$, so ist $\beta > 90°$, also wieder nur eine Auflösung.

Natürlich muß α im Falle 2) der größeren, im Falle 3) der kleineren gegebenen Seite gegenüberliegen.

II. $a + b > 180°$, also auch $\alpha + \beta > 180°$.

Wir unterscheiden wieder drei Fälle:

1) $\alpha = 90°$, so ist $\beta > 90°$, also hat die Aufgabe nur eine Auflösung.

2) $\alpha < 90°$, so ist $\beta > 90°$, also wieder nur eine Auflösung.

3) $\alpha > 90°$, so sind dann zwei Auflösungen möglich (β spitz und stumpf), wenn der spitze Werth von β, zu α addirt, mehr als 180° giebt. Ist dies nicht der Fall, so gilt für β nur der stumpfe Winkel, und die Aufgabe hat nur eine Auflösung.

III. $a + b < 180°$, also auch $\alpha + \beta < 180°$.

Abermals unterscheiden wir drei Fälle:

1) $\alpha = 90°$, so ist $\beta < 90°$, und die Aufgabe hat nur eine Auflösung.

2) $\alpha > 90°$, so ist $\beta < 90°$, also wieder nur eine Auflösung.

3) $\alpha < 90°$, so sind dann zwei Auflösungen möglich (β spitz und stumpf), wenn der stumpfe Werth von β, zu α addirt, weniger als 180° giebt. Ist dies nicht der Fall, so gilt nur der spitze Winkel, und die Aufgabe hat nur eine Auflösung.

Aus dieser Untersuchung geht hervor, daß nur in zwei Fällen zwei Auflösungen der vorliegenden Aufgabe möglich sind, nämlich:

A) wenn $\alpha + b > 180°$ und $\alpha > 90°$ ist, und wenn dann der spitze Werth von β mit α zusammen schon mehr als 180° beträgt, und

B) wenn $a + b < 180°$ und $\alpha < 90°$ ist, und wenn dann der stumpfe Werth von β mit α zusammen noch nicht 180° beträgt.

Nachdem β gefunden ist, kann man, um c und γ zu berechnen, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ und $\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$ aus einer der Neper'schen Analogien entwickeln. Man erhält:

$$(2.)\qquad \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.$$

$$(3.)\qquad \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Hat man für β zwei Werthe gefunden, so ist jeder derselben in (2.) und (3.) einzusetzen; man erhält dann für c und γ ebenfalls zwei

Werthe. — Uebrigens kann man auch, nachdem von den beiden Stücken c und γ das eine gefunden ist, das andere aus der Proportion

$$\sin b : \sin c = \sin\beta : \sin\gamma$$

berechnen; besonders bequem ist aber diese Gleichung, wenn man prüfen will, ob die Berechnung der unbekannten Stücke nach den oben angegebenen Formeln fehlerfrei ist.

Anmerkung. Will man c und γ unmittelbar aus den gegebenen Stücken berechnen, so kann dies auf folgende Weise geschehen:

Aus dem System I. folgt:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos\alpha.$$

Die Gleichung enthält die Unbekannten sin c und cos c und kann entweder ganz so, wie in §. 232. Nr. 4. gelehrt wurde, oder hier besser auf eine ganz ähnliche Art behandelt werden. Dividirt man nämlich nicht durch den Factor von sin c (wie dort), sondern durch den von cos c, so entsteht:

$$\cos c + \operatorname{tg} b \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin c = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

Setzt man jetzt

$$1) \quad \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg} b \,.\, \cos\alpha$$

so folgt:

$$\cos c + \operatorname{cotg}\varphi \,.\, \sin c = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

Multiplicirt man mit $\sin\varphi$, so erhält man:

$$2) \quad \sin(c + \varphi) = \frac{\cos a}{\cos b} \cdot \sin\varphi.$$

Ergiebt sich $c + \varphi = \delta$, so ist $c = \delta - \varphi$.

Ferner folgt aus dem System IV. (§. 354.):

$$\sin b \,.\, \operatorname{cotg} a = \cos b \,.\, \cos\gamma + \sin\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\alpha.$$

Dividirt man durch cos b, so entsteht:

$$\cos\gamma + \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\cos b} \cdot \sin\gamma = \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{cotg} a.$$

Setzt man $\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\cos b} = \operatorname{cotg}\psi$, oder, was dasselbe ist:

$$3) \quad \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\alpha \,.\, \cos b,$$

so folgt:

$$\cos\gamma + \operatorname{cotg}\psi \,.\, \sin\gamma = \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{cotg} a.$$

Multiplicirt man mit $\sin\psi$, so erhält man:

$$4) \quad \sin(\gamma + \psi) = \operatorname{cotg} a \,.\, \operatorname{tg} b \,.\, \sin\psi.$$

Ergiebt sich hieraus $\gamma + \psi = \varepsilon$, so ist $\gamma = \varepsilon - \psi$.

Beispiel. Zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind gegeben: $a = 38^\circ\ 40'$ und $b = 80^\circ$; der der Seite a gegenüberliegende

Winkel ist $\alpha = 28^\circ\ 20'$; man soll die übrigen Stücke c, β und γ berechnen.

Aufl. Aus der Proportion:

$$\sin 28^\circ\ 20' : \sin\beta = \sin 38^\circ\ 40' : \sin 80^\circ$$

folgt:
$$\sin\beta = \frac{\sin 28^\circ\ 20' \,.\, \sin 80^\circ}{\sin 38^\circ\ 40'}.$$

$$\begin{array}{ll} \log\sin 28^\circ\ 20' = & 9{,}6763281 - 10 \\ \log\sin 80^\circ = & 9{,}9933515 - 10 \\ \hline & 19{,}6696796 - 20 \\ \log\sin 38^\circ\ 40' = & 9{,}7957330 - 10 \\ \hline \log\sin\beta = & 9{,}8739466 - 10 \end{array}$$

$$\beta = \begin{cases} 48^\circ\ 25'\ 26{,}8'' \text{ oder} \\ 131^\circ\ 34'\ 33{,}2''. \end{cases}$$

Um nun zu entscheiden, ob beide Werthe gelten, oder welcher von beiden, hat man

$$a + b < 180^\circ,$$

daher muß auch $\alpha + \beta < 180^\circ$ sein; dies ist aber für jeden der beiden Werthe von β der Fall, folglich hat die vorliegende Aufgabe zwei Auflösungen; für jede derselben muß eine besondere weitere Rechnung erfolgen.

A) Wenn $\beta = 48^\circ\ 25'\ 26{,}8''$ ist.

In diesem Falle ist:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 38^\circ\ 22'\ 43{,}4'' \quad \text{und} \quad \frac{\beta - \alpha}{2} = 10^\circ\ 2'\ 43{,}4''$$

$$\frac{a + b}{2} = 59^\circ\ 20' \quad \text{und} \quad \frac{b - a}{2} = 20^\circ\ 40'.$$

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) oben ergiebt sich nun, wenn man $\frac{\beta - \alpha}{2}$ statt $\frac{\alpha - \beta}{2}$, also auch $\frac{b - a}{2}$ statt $\frac{a - b}{2}$ setzt:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\sin 38^\circ\ 22'\ 43{,}4''}{\sin 10^\circ\ \ 2'\ 43{,}4''} \cdot \operatorname{tg} 20^\circ\ 40'.$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin 59^\circ\ 20'}{\sin 20^\circ\ 40'} \cdot \operatorname{tg} 10^\circ\ 2'\ 43{,}4''.$$

$$\begin{array}{ll} \log\sin 38^\circ\ 22'\ 43{,}4'' = & 9{,}7929913 - 10 \\ \log\sin 10^\circ\ \ 2'\ 43{,}4'' = & 9{,}2416169 - 10 \\ \hline & 0{,}5513744 \\ \log\operatorname{tg} 20^\circ\ 40'' = & 9{,}5765761 - 10 \\ \hline \log\operatorname{tg}\frac{c}{2} = & 10{,}1279505 - 10 \end{array}$$

$\frac{c}{2} = 53^\circ\ 19'\ 14{,}3''$; folglich $c = 106^\circ\ 38'\ 28{,}6''$.

$$\log \sin 59^\circ\ 20' = 9{,}9345738 - 10$$
$$\log \sin 20^\circ\ 40' = 9{,}5476893 - 10$$
$$0{,}3868845$$
$$\log \operatorname{tg} 10^\circ\ 2'\ 43{,}4'' = 9{,}2483262 - 10$$
$$\log \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} = 9{,}6352107 - 10$$
$$\frac{\gamma}{2} = 66^\circ\ 38'\ 55{,}4''; \text{ folglich } \gamma = 133^\circ\ 17'\ 50{,}8''.$$

B) Wenn $\beta = 131^\circ\ 34'\ 33{,}2''$ ist.

In diesem Falle ist:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 79^\circ\ 57'\ 16{,}6'' \text{ und } \frac{\beta-\alpha}{2} = 51^\circ\ 37'\ 16{,}6''$$
$$\frac{a+b}{2} = 59^\circ\ 20' \text{ und } \frac{b-a}{2} = 20^\circ\ 40'.$$

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) folgt jetzt:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\sin 79^\circ\ 57'\ 16{,}6''}{\sin 51^\circ\ 37'\ 16{,}6''} \cdot \operatorname{tg} 20^\circ\ 40'.$$
$$\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin 59^\circ\ 20'}{\sin 20^\circ\ 40'} \cdot \operatorname{tg} 51^\circ\ 37'\ 16{,}6''.$$

$$\log \sin 79^\circ\ 57'\ 16{,}6'' = 9{,}9932906 - 10$$
$$\log \sin 51^\circ\ 37'\ 16{,}6'' = 9{,}8942740 - 10$$
$$0{,}0990166$$
$$\log \operatorname{tg} 20^\circ\ 40' = 9{,}5765761 - 10$$
$$\log \operatorname{tg}\frac{c}{2} = 9{,}6755927 - 10$$
$$\frac{c}{2} = 25^\circ\ 21'\ 5{,}3''; \text{ folglich } c = 50^\circ\ 42'\ 10{,}6''.$$

$$\log \sin 59^\circ\ 20' = 9{,}9345738 - 10$$
$$\log \sin 20^\circ\ 40' = 9{,}5476893 - 10$$
$$0{,}3868845$$
$$\log \operatorname{tg} 51^\circ\ 37'\ 16{,}6'' = 10{,}1012826 - 10$$
$$\log \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = 10{,}4881671 - 10$$
$$\frac{\gamma}{2} = 18^\circ\ 0'\ 8''; \text{ folglich } \gamma = 36^\circ\ 0'\ 16''.$$

Die vorliegende Aufgabe hat also folgende zwei Auflösungen:

A) $\beta = 48^\circ\ 25'\ 26{,}8''$	B) $\beta = 131^\circ\ 34'\ 33{,}2''$
$\gamma = 133^\circ\ 17'\ 50{,}8''$	$\gamma = 36^\circ\ 0'\ 16''$
$c = 106^\circ\ 38'\ 28{,}6''$	$c = 50^\circ\ 42'\ 10{,}6''$

Aufgabe 6.

Es sind zwei Winkel α und β und die dem Winkel α gegenüberliegende Seite a eines sphärischen Dreiecks gegeben; man soll die übrigen Stücke γ, a und b berechnen.

Auflösung. Auch diese Aufgabe kann zwei Auflösungen haben, denn sie läßt sich mittelst der Ergänzungsecke auf die vorhergehende reduciren (§. 275. Anm.). Ihre Auflösung zeigt überhaupt eine so große Uebereinstimmung mit der Auflösung der fünften Grundaufgabe, daß es genügen wird, nur das Wichtigste hervorzuheben.

Nach dem System III. hat man:

$$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta, \text{ folglich}$$

$$(1.) \qquad \sin b = \frac{\sin a \,.\, \sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Ist nun $\sin\alpha \,.\, \sin\beta = \sin\alpha$, so ist $b = 90°$, und die Aufgabe hat nur eine Auflösung; sie gestattet gar keine Auflösung, wenn $\sin a \,.\, \sin\beta > \sin\alpha$ ist.

Es bleibt der Fall zu untersuchen übrig, wenn $\sin a \,.\, \sin\beta < \sin\alpha$ ist. Dann kann die Aufgabe zwei Auflösungen haben (b spitz und stumpf), aber auch nur zwei und nicht mehr. Die Gründe sind den in der Auflösung zur vorhergehenden Aufgabe angegebenen ganz entsprechend. Nimmt man nun, wie dort, die einzelnen Fälle durch, so findet man aus dem Gesetz §. 362. Nr. 5., nach welchem

$$\alpha + \beta \quad \text{und} \quad a + b$$

immer gleichzeitig gleich 180°, oder größer, oder kleiner als 180° sein müssen, daß nur in zwei Fällen zwei Auflösungen möglich sind, nämlich:

A) wenn $\alpha + \beta > 180°$ und $a > 90°$ ist, und wenn dann der spitze Werth von b mit a zusammen schon mehr als 180° beträgt, und

B) wenn $\alpha + \beta < 180°$ und $a < 90°$ ist, und wenn dann der stumpfe Werth von b mit a zusammen noch nicht 180° beträgt.

Nachdem b gefunden ist, kann man aus den Neper'schen Analogien entnehmen:

$$(2.) \qquad \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.$$

$$(3.) \qquad \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Um die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, ist wieder die Formel besonders bequem:

$$\sin b : \sin c = \sin\beta : \sin\gamma.$$

Anmerkung. Will man c und γ unmittelbar durch die gegebenen Stücke berechnen, so entnimmt man aus dem System IV.:

$$\sin c \,.\, \operatorname{cotg} a = \cos c \,.\, \cos\beta + \sin\beta \,.\, \operatorname{cotg}\alpha.$$

Dividirt man die Gleichung durch $\cos\beta$, so folgt:

$$\sin c \cdot \frac{\operatorname{cotg} a}{\cos\beta} - \cos c = \operatorname{tg}\beta \,.\, \operatorname{cotg}\alpha.$$

Setzt man $\frac{\operatorname{cotg} a}{\cos\beta} = \operatorname{cotg}\varphi$, oder, was dasselbe ist:

1) $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} a \,.\, \cos\beta$,

so folgt:

$$\sin c \,.\, \operatorname{cotg}\varphi - \cos c = \operatorname{tg}\beta \,.\, \operatorname{cotg}\alpha.$$

Multiplicirt man die Gleichung mit $\sin\varphi$, so entsteht:

2) $\sin(c - \varphi) = \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta \,.\, \sin\varphi$.

Ferner entnimmt man aus dem System II.:

$$\cos\alpha = -\cos\beta \,.\, \cos\gamma + \sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos a.$$

Dividirt man die Gleichung durch $\cos\beta$, so entsteht:

$$\sin\gamma \,.\, \operatorname{tg}\beta \,.\, \cos a - \cos\gamma = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Setzt man nun

3) $\operatorname{cotg}\psi = \operatorname{tg}\beta \,.\, \cos a$,

so entsteht

$$\sin\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\psi - \cos\gamma = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Multiplicirt man die Gleichung mit $\sin\psi$, so folgt:

4) $\sin(\gamma - \psi) = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \sin\psi$.

Beispiel. Zwei Winkel eines sphärischen Dreiecks sind gegeben: $\alpha = 110°$, $\beta = 100°$; die dem ersten Winkel gegenüberliegende Seite ist $a = 120°$; man soll die andern Stücke γ, b und c finden.

Aufl. Aus der Proportion

$$\sin b : \sin 120° = \sin 100° : \sin 110° \quad \text{folgt:}$$

$$\sin b = \frac{\sin 60° \,.\, \sin 80°}{\sin 70°}.$$

$$\log \sin 60° = 9{,}9375306 - 10$$
$$\log \sin 80° = 9{,}9933515 - 10$$
$$9{,}9308821 - 10$$

$$\log \sin 70^\circ = 9{,}9729858 - 10$$

$$\log \sin b = 9{,}9578963 - 10$$

$$b = \begin{cases} 65^\circ\ 10'\ 34{,}6'' \text{ oder} \\ 114^\circ\ 49'\ 25{,}4''. \end{cases}$$

Da $\alpha + \beta > 180^\circ$ ist, so muß auch $a + b > 180^\circ$ sein, und weil diese letzte Ungleichung für jeden der beiden Werthe von b wahr ist, so gestattet die Aufgabe zwei Auflösungen. Man hat also:

A) Wenn $b = 65^\circ\ 10'\ 34{,}6''$ ist.

In diesem Falle ist:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 105^\circ \quad \text{und} \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = 5^\circ$$

$$\frac{a + b}{2} = 92^\circ\ 35'\ 17{,}3'' \quad \text{und} \quad \frac{a - b}{2} = 27^\circ\ 24'\ 42{,}7''.$$

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) ergiebt sich nun, wenn man noch die Functionen stumpfer Winkel auf die Functionen spitzer reducirt:

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 5^\circ} \cdot \operatorname{tg} 27^\circ\ 24'\ 42{,}7''.$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin 87^\circ\ 24'\ 42{,}7''}{\sin 27^\circ\ 24'\ 42{,}7''} \cdot \operatorname{tg} 5^\circ.$$

$$\log \sin 75^\circ = 9{,}9849438 - 10$$

$$\log \sin\ 5^\circ = 8{,}9402960 - 10$$

$$1{,}0446478$$

$$\log \operatorname{tg} 27^\circ\ 24'\ 42{,}7'' = 9{,}7148438 - 10$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{c}{2} = 10{,}7594916 - 10$$

$$\frac{c}{2} = 80^\circ\ 7'\ 49''; \quad \text{folglich } c = 160^\circ\ 15'\ 38''.$$

$$\log \sin 87^\circ\ 24'\ 42{,}7'' = 9{,}9995568 - 10$$

$$\log \sin 27^\circ\ 24'\ 42{,}7'' = 9{,}6631198 - 10$$

$$0{,}3364370$$

$$\log \operatorname{tg} 5^\circ = 8{,}9419518 - 10$$

$$\log \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} = 9{,}2783888 - 10$$

$$\frac{\gamma}{2} = 79^\circ\ 15'\ 3''; \quad \text{folglich } \gamma = 158^\circ\ 30'\ 6''.$$

B) Wenn $b = 114^\circ\ 49'\ 25{,}4''$ ist.

In diesem Falle ist:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 105^\circ \quad \text{und} \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = 5^\circ$$

$$\frac{a + b}{2} = 117^\circ\ 24'\ 42{,}7'' \quad \text{und} \quad \frac{a - b}{2} = 2^\circ\ 35'\ 17{,}3''.$$

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) folgt nun, wenn man die Functionen stumpfer Winkel auf Functionen spitzer Winkel reducirt:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 5^\circ}\cdot \operatorname{tg} 2^\circ\ 35'\ 17{,}3''.$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin 62^\circ\ 35'\ 17{,}3''}{\sin 2^\circ\ 35'\ 17{,}3''}\cdot \operatorname{tg} 5^\circ.$$

$$\begin{aligned}
\log\sin 75^\circ &= 9{,}9849438 - 10\\
\log\sin\ \ 5^\circ &= 8{,}9402960 - 10\\
\hline
&\ 1{,}0446478\\
\log \operatorname{tg} 2^\circ\ 35'\ 17{,}3'' &= 8{,}6551604 - 10\\
\hline
\log \operatorname{tg}\frac{c}{2} &= 9{,}6998082 - 10
\end{aligned}$$

$$\frac{c}{2} = 26^\circ\ 36'\ 33{,}5'';\ \text{folglich } c = 53^\circ\ 13'\ 7''.$$

$$\begin{aligned}
\log\sin 62^\circ\ 35'\ 17{,}3'' &= 9{,}9482761 - 10\\
\log\sin\ \ 2^\circ\ 35'\ 17{,}3'' &= 8{,}6547172 - 10\\
\hline
&\ 1{,}2935589\\
\log \operatorname{tg} 5^\circ &= 8{,}9419518 - 10\\
\hline
\log \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} &= 10{,}2355107 - 10
\end{aligned}$$

$$\frac{\gamma}{2} = 30^\circ\ 10'\ 28{,}3'';\ \text{folglich } \gamma = 60^\circ\ 20'\ 56{,}6''.$$

Die Aufgabe hat also folgende zwei Auflösungen;

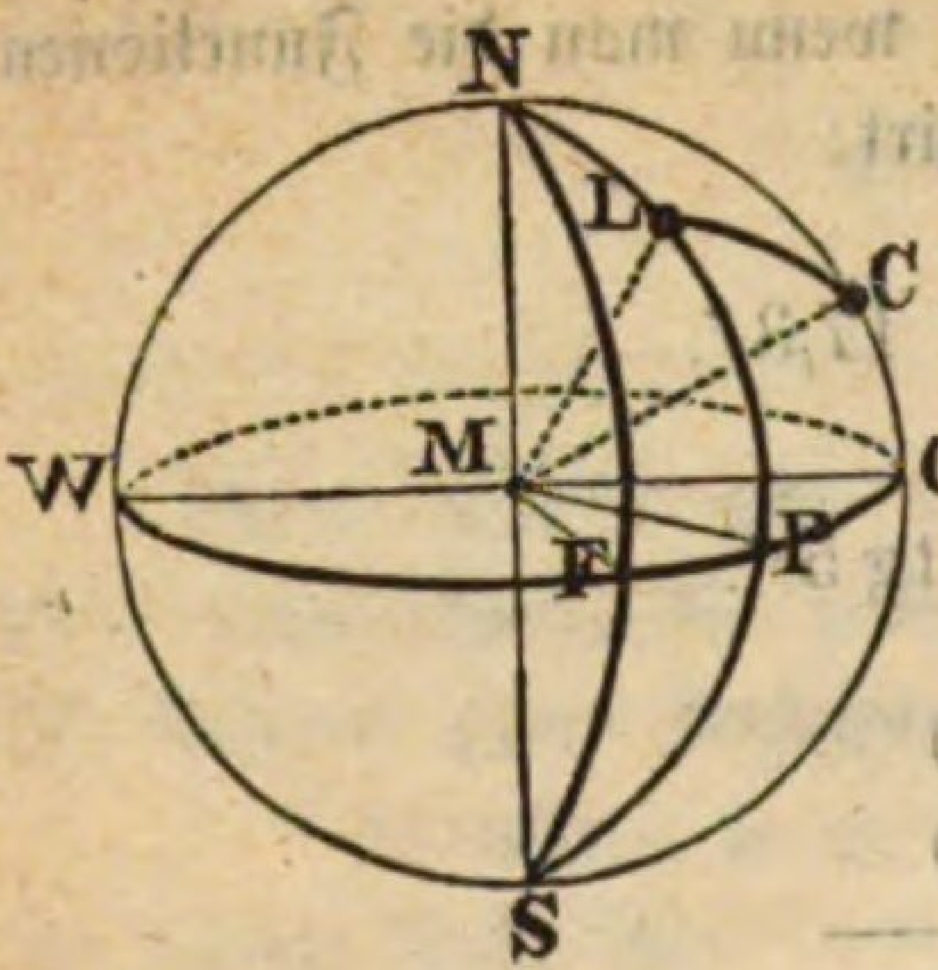
A) $b = 65^\circ\ 10'\ 34{,}6''$	B) $b = 114^\circ\ 49'\ 25{,}4''$
$c = 160^\circ\ 15'\ 38''$	$c = 53^\circ\ 13'\ 7''$
$\gamma = 158^\circ\ 30'\ 6''$	$\gamma = 60^\circ\ 20'\ 56{,}6''$.

§. 364.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Die geographische Lage von London ist 17° 35' östl. Länge und 51° 31' nördl. Breite; Constantinopel hat 46° 36' östl. Länge und 41° 1' nördl. Breite. Wie groß ist die kürzeste Entfernung beider Städte auf der Erdoberfläche von einander, und wie groß die absolut kürzeste Entfernung, wenn die Erde als eine Kugel zum Durchmesser 1719 Meilen betrachtet wird?

Auflösung. M sei der Mittelpunkt der Erde, NS die Erdaxe, WFPQ der Aequator, der Punkt L stelle London und der Punkt C



Constantinopel vor; gesucht wird der Bogen LC des größten durch L und C gehenden Kugelkreises. Sind ferner NLPS und NCQS die durch resp. London und Constantinopel gehenden Meridiane, so ist der Bogen LC aus dem sphärischen Dreieck NLC zu finden; denn in diesem Dreieck kennt man zwei Seiten, NL und NC, und den eingeschlossenen Winkel LNC, kann also die Seite LC und aus ihr den Bogen LC finden. Es ist nämlich der Bogen PL oder $\measuredangle$ PML (vergl. §. 119. Nr. 4.) die nördliche Breite von London, und Bogen CQ oder $\measuredangle$ QMC die nördliche Breite von Constantinopel. Hieraus folgt:

$$\text{Seite NL} = 90^\circ - 51^\circ\ 31' = 38^\circ\ 29' = a,$$
$$\text{Seite NC} = 90^\circ - 41^\circ\ \ 1' = 48^\circ\ 59' = b.$$

Ist ferner NFS der Meridian, von dem aus die geographischen Längen gemessen werden (in der vorliegenden Aufgabe über die Insel Ferro gehend), so ist der Bogen FP oder der $\measuredangle$ FMP die östliche Länge von London, und der Bogen FQ oder der $\measuredangle$ FMQ die östliche Länge von Constantinopel. Die Differenz dieser Längen ist der Bogen PQ oder der $\measuredangle$ PMQ, und dieser Winkel ist der Neigungswinkel der Ebenen der durch London und Constantinopel gehenden Meridiane, also der Winkel LNC im sphärischen Dreieck LNC. Es ist sonach:

$$\measuredangle \text{LNC} = 46^\circ\ 36' - 17^\circ\ 35' = 29^\circ\ 1' = \gamma.$$

Setzt man nun für a, b und γ die Werthe in die Formeln (1.) und (2.) der zweiten Auflösung der Grundaufgabe 1. (§. 363.) ein, so folgt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} 38^\circ\ 29' . \cos 29^\circ\ 1';\quad \varphi = 34^\circ\ 48'\ 22''$$

und, wenn man die Seite LC (den Centriwinkel LMC) mit x bezeichnet:

$$\cos x = \frac{\cos 38^\circ\ 29' . \cos 14^\circ\ 10'\ 38''}{\cos 34^\circ\ 48'\ 22''};\quad x = 22^\circ\ 26'\ 3''.$$

Man hat nun

$$\text{Bogen LC} = 859{,}5 . \operatorname{arc} 22^\circ\ 26'\ 3''\ \text{und}$$
$$\text{Sehne LC} = 1719 . \sin 11^\circ\ 13'\ 1{,}5'';\ \text{folglich}$$

I. Bogen LC = 336,5372 Meilen.

II. Sehne LC = 334,3916 Meilen.

Der Unterschied dieser Entfernungen beträgt 2,1456 Meilen.

Aufgabe 2. Die geographische Lage von München ist 29° 14′ 15″ östl. Länge und 48° 8′ 20″ nördl. Breite; Rio-Janeiro hat 25° 5′ westl. Länge und 22° 54′ 10″ südl. Breite. Wie groß

ist die kürzeste Entfernung beider Städte von einander auf der Erdoberfläche, wenn die Erde als eine Kugel zum Durchmesser 1719 Meilen betrachtet wird?

Aufl. Wie bei der vorhergehenden Aufgabe erfolgt die Berechnung aus dem sphärischen Dreiecke, dessen Ecken die beiden Städte und der Nordpol sind; man findet aber diesmal die eine Seite durch Addition der südlichen Breite von Rio-Janeiro zu 90°, und den von den bekannten Seiten eingeschlossenen Winkel durch Addition der geographischen Längen beider Städte. Bezeichnet man die unbekannte Seite des sphärischen Dreiecks mit x, und wird

$$(1.)\quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} 41°\ 51'\ 40''.\cos 54°\ 19'\ 15''$$

gesetzt, woraus

$$\varphi = 27°\ 35'\ 30''$$

folgt, so erhält man

$$(2.)\quad \cos x = \frac{\cos 41°\ 51'\ 40''.\cos 85°\ 18'\ 40''}{\cos 27°\ 35'\ 30''}.$$

Hieraus folgt $x = 86°\ 3'\ 39{,}8''$ und

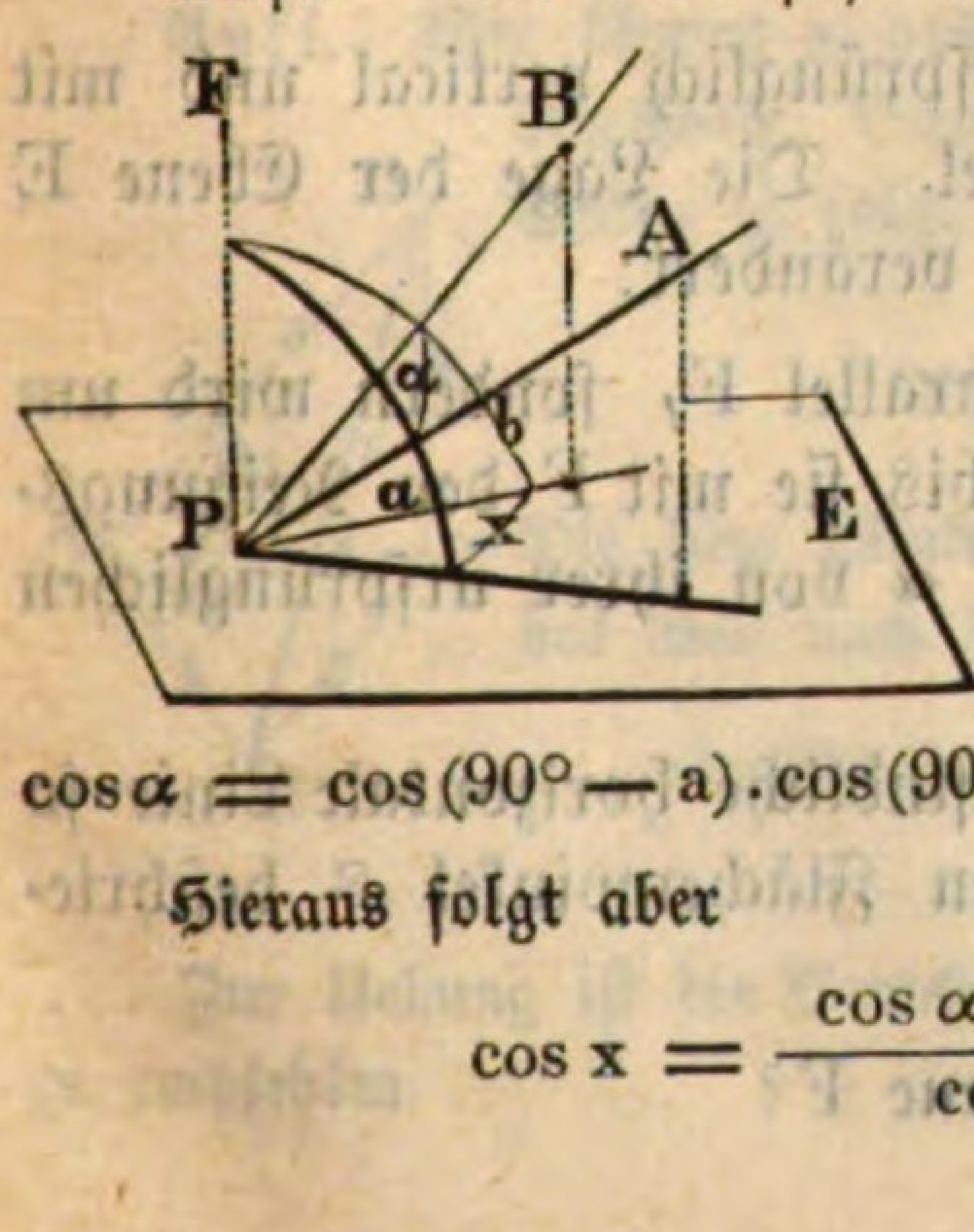
die gesuchte Entfernung = 1291,011 Meilen.

Aufgabe 3. Ein Schiff, welches von der Mündung des Amazonen-Stromes nach London segelt, passirt die Linie unter 30° westl. von Ferro; wie weit ist es in diesem Augenblick von London entfernt? (Vergl. Aufg. 1.)

Antw. 977,79 Meilen.

Aufgabe 4. Von einem Punkte P in einer horizontalen Ebene E gehen zwei Linien PA und PB in den Raum, welche mit der Ebene E resp. die Neigungswinkel a und b, mit einander aber den Winkel α bilden; man soll den Winkel x berechnen, welchen die in der Ebene E liegenden Schenkel der Neigungswinkel a und b mit einander bilden, d. h. man soll den Winkel α auf den Horizont reduciren.

Aufl. Denkt man sich die Ebenen der Neigungswinkel a und b verbreitet, bis sie sich in der Linie PF schneiden, so steht PF auf der Ebene E senkrecht (§. 265. und §. 266. Nr. 4.). Die körperliche dreikantige Ecke PABF hat daher die drei Seiten α, $90° - a$ und $90° - b$, während der der Seite α gegenüberliegende Winkel der gesuchte Winkel x ist. Man hat daher nach dem System I.:



$$\cos\alpha = \cos(90° - a).\cos(90° - b) + \sin(90° - a).\sin(90° - b).\cos x.$$

Hieraus folgt aber

$$\cos x = \frac{\cos\alpha - \sin a\,.\,\sin b}{\cos a\,.\,\cos b}.$$

Setzt man $2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 - 1$ statt $\cos x$, so folgt durch eine leichte Umformung

$$2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\cos(a+b)+\cos\alpha}{\cos a \cdot \cos b}, \text{ oder}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{a+b+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{a+b-\alpha}{2}}{\cos a \cdot \cos b}}.$$

Aufgabe 5. Die drei Seiten a, b und c eines körperlichen Dreiecks sind gegeben, man soll den Winkel δ finden, welchen eine Kante, etwa die der Seite a gegenüberliegende, mit der gegenüberliegenden Seite bildet.

Aufl. Legt man durch die Kante eine die gegenüberliegende Seite (a) senkrecht schneidende Ebene, so kann man δ aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck entwickeln, dessen Hypotenuse b ist. Der Winkel, welcher der Kathete δ gegenüberliegt, ist entweder γ, oder $180^\circ - \gamma$ (vergl. §. 277.); in jedem Falle erhält man nach der Neper'schen Regel:

$$\sin\delta = \sin b \cdot \sin\gamma.$$

Hieraus unmittelbar mit Hülfe von §. 353. (3.), oder auch, nachdem man $2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$ statt $\sin\gamma$ gesetzt hat, aus §. 355. (2.) und (3.) folgt:

$$\sin\delta = \frac{2}{\sin a}\cdot\sqrt{\sin s \cdot \sin(s-a)\cdot\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}.$$

Aufgabe 6. Die vorige Aufgabe zu lösen, wenn nicht die drei Seiten, sondern die drei Winkel des körperlichen Dreiecks gegeben sind.

Aufl. Mit Hülfe von §. 355. (3.) und (4.) folgt wie oben:

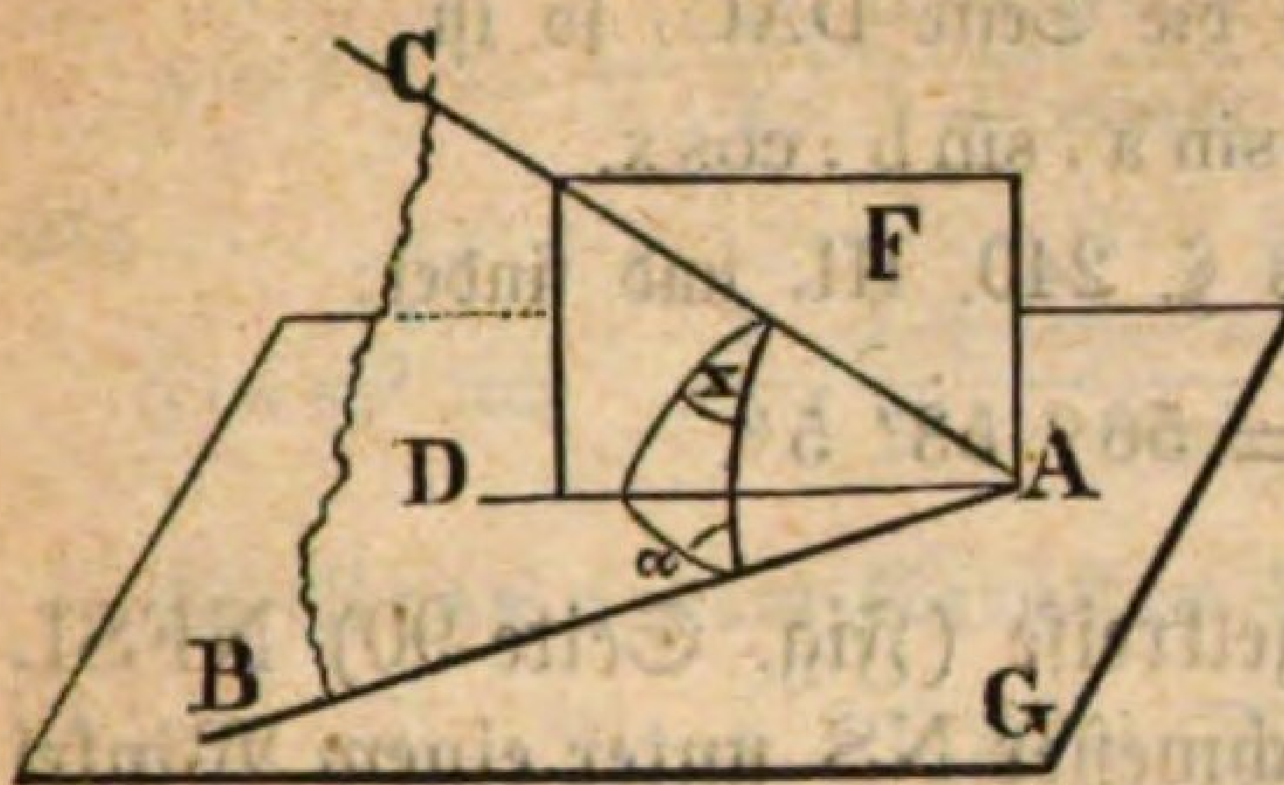
$$\sin\delta = \frac{2}{\sin\alpha}\cdot\sqrt{-\cos\sigma\cdot\cos(\sigma-\alpha)\cdot\cos(\sigma-\beta)\cdot\cos(\sigma-\gamma)}.$$

Aufgabe 7. Eine Ebene E ist ursprünglich vertical und mit der ebenfalls verticalen Ebene F parallel. Die Lage der Ebene E wird dann durch eine doppelte Drehung verändert:

1) E bleibt vertical, aber nicht parallel F, sondern wird um eine verticale Linie so gedreht, bis sie mit F den Neigungswinkel α bildet (also auch um α von ihrer ursprünglichen Lage abweicht).
2) Jetzt wird E um eine in ihr befindliche horizontale Linie so weit herumgedreht, bis sie den Flächenwinkel β beschrieben hat;

welchen Winkel bildet jetzt E mit der Ebene F?

Aufl. Man denke sich durch die horizontale Linie (AB), um welche die



zweite Drehung Statt fand, eine horizontale Ebene G gelegt, so bilden G, F und die Ebene E in ihrer letzten Lage (BAC) ein körperliches rechtwinkliges Dreieck ABCD, in welchem eine Kathete $= \alpha$, der anliegende schiefe Winkel $= 90° - \beta$ und der gegenüberliegende Winkel $=$ x ist. Nach der Neper'schen Regel ist daher

$$\cos x = \cos\alpha \,.\, \cos\beta.$$

Aufgabe 8. In einer Ebene E liegen zwei sich unter einem Winkel von 40° schneidende Linien AB und AC. Die Ebene E wird zunächst um AB gedreht, bis sie einen Winkel von 20° beschrieben hat; dann wird sie um die Linie AC (in ihrer jetzigen Lage) gedreht, bis sie einen Winkel von 50° beschrieben hat; welchen Winkel x bildet jetzt E mit ihrer ursprünglichen Lage?

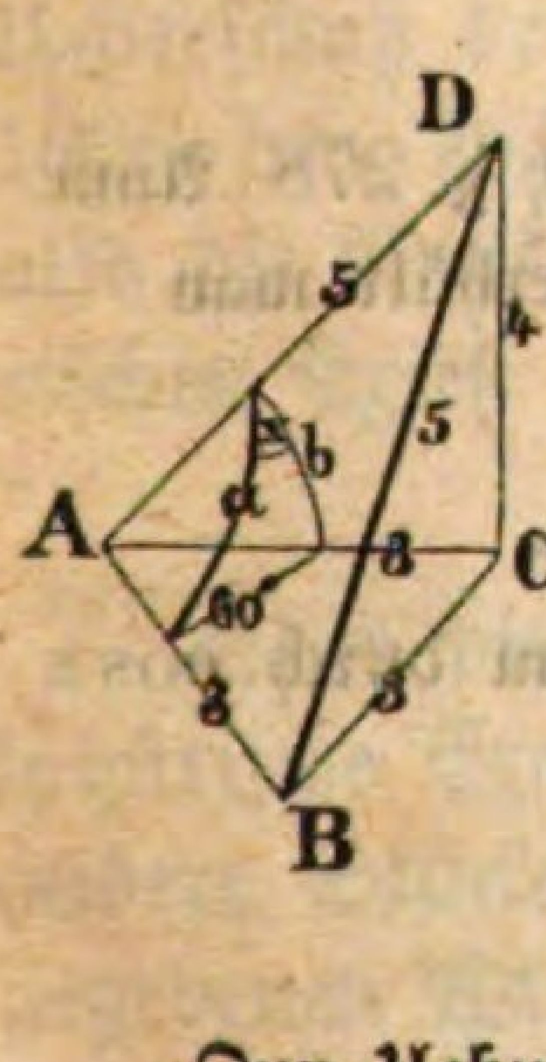
Aufl. Statt der Ebene E in ihren drei verschiedenen Lagen, denke man sich drei Ebenen in diesen Lagen und entnehme x aus dem körperlichen Dreieck, welches diese Ebenen bilden. Man erhält:

$$x = 113° \; 47' \; 8'', \quad \text{oder} \quad x = 36° \; 24' \; 57'',$$

je nachdem die Drehung um AC nach der einen, oder anderen Richtung hin erfolgt. Bei der einen Dreh-Richtung hat das sphärische Dreieck, aus welchem x zu finden ist, die Seite 40° und die anliegenden Winkel 50° und 20°, bei der andern die Seite 40° und die anliegenden Winkel 50° und 160°.

Aufgabe 9. Jede Grundkante einer dreiseitigen Pyramide sei $= 3'$, die Seitenkanten aber sind $5'$, $5'$ und $4'$; wie groß ist der Winkel x, den zwei Seitenflächen mit einander bilden, die sich in einer der beiden gleichen Seitenkanten schneiden?

Aufl. Wir können x aus dem rechtwinkligen körperlichen Dreieck bei A



berechnen. Bezeichnet a die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite, so folgt aus dem $\triangle$ DAB:

$$\cos a = \frac{3}{10}, \text{ folglich } \sin a = \frac{\sqrt{91}}{10}.$$

Die dem Winkel x gegenüberliegende Kathete ist 60°; daher hat man nach der Neper'schen Regel:

$$\sin 60° = \sin a \,.\, \sin x, \text{ folglich } \sin x = 5\sqrt{\frac{3}{91}},$$
$$x = 65° \; 12' \; 32''.$$

Zur Uebung ist die Berechnung von x aus dem körperlichen Dreieck bei D zu empfehlen.

Anmerkung. Ist die Kante CD $= 6'$ (statt $4'$), so ist die Ecke bei A nicht mehr rechtwinklig. Bezeichnet dann b die Seite DAC, so ist

$$\cos 60^\circ = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos x.$$

In diesem Falle erhält man $\cos b$ aus §. 240. III. und findet:

$$\cos x = \frac{39}{2\sqrt{1274}}, \quad x = 56^\circ\ 53'\ 5''.$$

Aufgabe 10. Zwei größte Kugelkreise (Fig. Seite 90) NFSL und NESD schneiden sich in dem Durchmesser NS unter einem Winkel von 25° und werden noch durch den dritten größten Kugelkreis DFEL senkrecht geschnitten. Wie groß ist die kürzeste Entfernung des Punktes F vom Mittelpunkte B des Bogens NE auf der Kugeloberfläche, wenn der Inhalt der Kugel gleich 288 Kubikfuß ist?

Antw. Bogen $FB = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}} \cdot \text{arc}\, 50^\circ\ 8'\ 40'' = 3{,}585377'$.

Aufgabe 11. Jede Grundkante einer dreiseitigen Pyramide sei $12'$, jede Seitenkante $30'$; wie groß ist der Winkel, den zwei Seitenflächen mit einander bilden?

Antw. $61^\circ\ 22'\ 8{,}5''$.

Aufgabe 12. Jede Grundkante einer dreiseitigen Pyramide sei $= a$, jede Seitenkante $= b$; es soll der Winkel x gefunden werden, den zwei Seitenflächen mit einander bilden.

Aufl. $\cos x = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2 - 4b^2}$.

Aufgabe 13. In einem sphärischen Dreieck verhalten sich die Winkel zu einander wie 1 : 2 : 3, und ihre Summe ist gleich 240°; wie groß sind die Seiten?

Antw. $37^\circ\ 12'\ 46''$, $112^\circ\ 5'\ 36''$ und $125^\circ\ 25'\ 52''$.

Aufgabe 14. In einem sphärischen Dreieck verhalten sich die Winkel zu einander wie 1 : 2 : 3, und eine Seite ist $= a$; man soll die Winkel berechnen.

Aufl. Bezeichnet man die Winkel mit x, $2x$ und $3x$ (nach §. 278. Anm. und §. 279. Anm. liegt x immer zwischen 45° und 30°), so erhält man

1) Wenn a dem größten Winkel gegenüber liegt.

$$\cos 3x = -\cos 2x \,.\, \cos x + \sin 2x \,.\, \sin x \,.\, \cos a.$$

Setzt man $3x = 2x + x$ und formt $\cos 3x$ um, so kann man durch $\cos x$ heben. Man erhält:

$$\sin x = \sqrt{\frac{1}{3 + \cos a}} \quad \text{oder} \quad \cos 2x = \frac{1 + \cos a}{3 + \cos a}.$$

2) Wenn a dem mittleren Winkel gegenüber liegt.

$$\cos 2x = -\frac{1}{4}\cdot\frac{3-\cos a}{1+\cos a}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{17+10.\cos a+9.\cos a^2}}{1+\cos a}$$

oder

$$(\cos x)^2 = \frac{1}{8}\cdot\frac{1+5\cos a}{1+\cos a}+\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{17+10.\cos a+9.\cos a^2}}{1+\cos a}.$$

3) Wenn a dem kleinsten Winkel gegenüber liegt.

$$\cos 2x = \frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{-7+9.\cos a}{1+\cos a}} \text{ oder}$$

$$(\cos x)^2 = \frac{5}{8}\pm\frac{1}{8}\cdot\sqrt{\frac{-7+9.\cos a}{1+\cos a}}.$$

Aufgabe 15. Von einem Punkte P in einer horizontalen Ebene E gehen zwei gerade Linien nach zwei Punkten A und B, welche im Raume auf derselben Seite der Ebene E liegen. Es bildet PA mit der Ebene E einen Winkel von 30°, PB einen Winkel von 45°, mit einander bilden diese Linien einen Winkel von 60°; man soll diesen Winkel von 60° auf den Horizont reduciren, d. h. den Winkel φ berechnen, welchen die in der Ebene E liegenden Schenkel der Neigungswinkel 30° und 45° mit einander bilden.

Aufl. $\varphi = 76°\ 9'\ 49{,}8''$.

Aufgabe 16. Die Seiten einer dreikantigen körperlichen Ecke sind 50°, 60° und 80°; welchen Winkel bildet die der Seite 80° gegenüberliegende Kante mit dieser Seite?

Antw. Einen Winkel von 41° 3′ 3,4″.

§. 365.

L'Huilier's Formel zur Berechnung des sphärischen Excesses aus den Seiten des sphärischen Dreiecks.

In der Anmerkung zu §. 346. wurde angegeben, daß man den Ueberschuß der Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks über 180° den sphärischen Exceß des Dreiecks nennt. Bezeichnen wir also die Winkel eines sphärischen Dreiecks mit α, β und γ, den sphärischen Exceß aber mit ε, so ist

$$\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma-180°.$$

Sind die drei Winkel des sphärischen Dreiecks gegeben, so ist der sphärische Exceß unmittelbar zu berechnen; ist aber das Dreieck durch andere Stücke bestimmt, so würde man aus ihnen zunächst die nicht gegebenen Winkel und aus diesen dann den sphärischen Exceß berechnen müssen. In praktischen Anwendungen kommt am häufigsten der Fall vor: wenn die drei Seiten a, b und c eines sphärischen Dreiecks

gegeben sind, den sphärischen Exceß zu berechnen. Für diesen Fall hat l'Huilier (am Ende des 18. Jahrhunderts) eine Formel gegeben, durch welche der sphärische Exceß aus den drei Seiten des Dreiecks nicht nur unmittelbar, sondern auch auf eine für die praktische Ausrechnung sehr bequeme Weise gefunden werden kann. Die hier folgende Entwicklung der l'Huilier'schen Formel hat Lobatto veröffentlicht. (Vergl. Grunerts Archiv 1862.)

Die Grundlage der Entwickelung bilden die dritte und die erste der Gaußischen Formeln (§. 356. VII.):

$$\text{I.}\quad \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

$$\text{II.}\quad \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}};$$

als Hülfsgleichung wird eine dritte Formel benutzt, welche sich aus den Formeln §. 217. XXII. und XXI.:

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{y-x}{2}$$

ergiebt, wenn man beide durch einander dividirt. Man erhält:

$$\text{III.}\quad \frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{y-x}{2}.$$

Die Entwickelung der l'Huilier'schen Formel ist nun folgende: Aus der oben angeführten Gaußischen Formel I. folgt (Arithm. §. 45. II.):

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{c}{2}}$$

und wenn man statt des sin. des Winkels $\frac{\alpha+\beta}{2}$ den cos. seines Complements setzt:

$$\frac{\cos\frac{180^\circ-\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{180^\circ-\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{c}{2}}.$$

Wendet man jetzt die Formel III. an, so ergiebt sich:

$$\text{tg}\,\frac{180^\circ-\alpha-\beta+\gamma}{4}\cdot\text{tg}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma-180^\circ}{4}=\text{tg}\,\frac{a-b+c}{4}\cdot\text{tg}\,\frac{c-a+b}{4}.$$

Nun ist aber $\text{tg}\,\frac{\varphi}{4}=\text{cotg}\left(90^\circ-\frac{\varphi}{4}\right)=\text{cotg}\,\frac{360^\circ-\varphi}{4}$,

und formt man hiernach den ersten Factor der linken Seite um, so entsteht, wenn man noch für den sphärischen Exceß $\alpha+\beta+\gamma-180^\circ$ die Bezeichnung ε einführt:

$$\text{IV.}\quad \text{cotg}\,\frac{180^\circ+\alpha+\beta-\gamma}{4}\cdot\text{tg}\,\frac{\varepsilon}{4}=\text{tg}\,\frac{b+c-a}{4}\cdot\text{tg}\,\frac{a+c-b}{4}.$$

Ferner ergiebt sich aus der oben angeführten Gaußischen Formel II. die Gleichung:

$$\frac{\sin\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a+b}{2}}$$

oder, wenn man $\cos\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)$ statt $\sin\frac{\gamma}{2}$ setzt:

$$\frac{\cos\frac{180^\circ-\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{180^\circ-\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a+b}{2}}.$$

Wendet man auch auf jede Seite dieser Gleichung die Formel III. an, so entsteht:

$$\text{tg}\,\frac{180^\circ-\gamma+\alpha+\beta}{4}\cdot\text{tg}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma-180^\circ}{4}=\text{tg}\,\frac{c+a+b}{4}\cdot\text{tg}\,\frac{a+b-c}{4}$$

oder, weil $\alpha+\beta+\gamma-180^\circ=\varepsilon$ ist:

$$\text{V.}\quad \text{tg}\,\frac{180^\circ+\alpha+\beta-\gamma}{4}\cdot\text{tg}\,\frac{\varepsilon}{4}=\text{tg}\,\frac{a+b+c}{4}\cdot\text{tg}\,\frac{a+b-c}{4}.$$

Wenn man nun die Gleichungen IV. und V. mit einander multiplicirt, so erhält man:

$$\left(\text{tg}\,\frac{\varepsilon}{4}\right)^2=\text{tg}\,\frac{b+c-a}{4}\cdot\text{tg}\,\frac{a+c-b}{4}\cdot\text{tg}\,\frac{a+b+c}{4}\cdot\text{tg}\,\frac{a+b-c}{4},$$

und zieht man endlich noch aus beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so entsteht die Formel von l'Huilier:

$$\text{VI.}\quad \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a+b+c}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{b+c-a}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{a+c-b}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{a+b-c}{4}}.$$

Die Quadratwurzel ist positiv zu nehmen, weil $\frac{\varepsilon}{4}$ immer ein spitzer Winkel ist; denn es ist

$$\alpha+\beta+\gamma < 6R, \text{ folglich}$$

$$\varepsilon < 4R \text{ oder } \frac{\varepsilon}{4} < R.$$

Bezeichnet man die halbe Summe der drei Seiten des sphärischen Dreiecks mit s, so daß also

$$a+b+c = 2s$$

ist, so nimmt die l'Huilier'sche Formel folgende Gestalt an:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}.$$

Beispiel 1. Die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind 120° 20′, 55° 30′ und 80° 10′; man soll den sphärischen Exceß berechnen.

Auflösung. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}64^\circ.\operatorname{tg}3^\circ\,50'.\operatorname{tg}36^\circ\,15'.\operatorname{tg}23^\circ\,55'}.$$

Hieraus folgt:

$$\log\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = 9{,}3250211 - 10;\quad \frac{\varepsilon}{4} = 11^\circ\,56'\,3{,}6''$$

$$\varepsilon = 47^\circ\,44'\,14{,}4''.$$

In dem Beispiele zu §. 363. Aufg. 3. sind die Winkel dieses Dreiecks gefunden worden. Addirt man sie, so ist die Summe $= 227^\circ\,44'\,14{,}4''$; folglich ist der sphärische Exceß gleich

$$227^\circ\,44'\,14{,}4'' - 180^\circ = 47^\circ\,44'\,14{,}4''$$

wie oben gefunden wurde.

Beispiel 2. Die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind 6° 44′, 8° 24′ und 11° 20′. Das Dreieck liegt auf der Oberfläche der Erde; wie groß ist sein Flächeninhalt, wenn die Erde als eine Kugel mit dem Radius 859,5 geogr. Meilen betrachtet wird?

Auflösung. Bezeichnet F den Flächeninhalt, so ist nach §. 346. II.:

$$1)\qquad F = 859{,}5^2.\operatorname{arc}\varepsilon \text{ und}$$

$$2)\quad \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}6^\circ\,37'.\operatorname{tg}57'.\operatorname{tg}2^\circ\,25'.\operatorname{tg}3^\circ\,15'}.$$

Aus 2) erhält man:

$$\frac{\varepsilon}{4} = 7'\,22{,}85'' \text{ folglich } \varepsilon = 29'\,31{,}4''.$$

Aus 1) ergiebt sich jetzt:

$$F = 859{,}5^2 . \operatorname{arc} 29' \; 31{,}4''$$
$$= 859{,}5^2 . \; 0{,}0085880.$$

Hieraus findet man $\log F = 3{,}8023838$; daher:

$$F = 6344{,}3 \; \square\text{-Meilen.}$$

Beispiel 3. Wie groß ist der Inhalt eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks auf der Oberfläche der Erde, wenn jede Seite desselben $= 1°$ ist und die Erde als eine Kugel zum Radius 859,5 geogr. Meilen betrachtet wird, und um wie viel weicht dieser Inhalt von dem Inhalte eines *ebenen* Dreiecks ab, dessen Seiten den Bogen des sphärischen Dreiecks gleich sind?

Auflösung. Man erhält

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} 45' . (\operatorname{tg} 15')^3},$$

und hieraus ergiebt sich

$$\frac{\varepsilon}{4} = 6{,}802''; \text{ folglich } \varepsilon = 27{,}208'' \text{ und } \operatorname{arc} \varepsilon = 0{,}0001319081.$$

Der Inhalt F des sphärischen Dreiecks ist sonach:

$$F = 859{,}5^2 . \operatorname{arc} 27{,}208'' = 97{,}4458 \; \square\text{-Meilen.}$$

Jede Seite des ebenen Dreiecks ist $= 859{,}5 . \operatorname{arc} 1°$; bezeichnet F′ den Inhalt dieses Dreiecks, so ist also:

$$F' = \frac{(859{,}5 . \operatorname{arc} 1°)^2}{4} \sqrt{3} = (859{,}5 . \operatorname{arc} 30')^2 . \sqrt{3}$$
$$= 97{,}4422 \; \square\text{-Meilen.}$$

Der Unterschied der Inhalte beider Dreiecke beträgt sonach nur 0,0036 □-Meilen. Dieser Unterschied wird um so geringer, je kleiner die Seiten der beiden Dreiecke sind, er wächst um so mehr, je größer die Seiten werden. — Man vergleiche hiermit die Anmerkung am Schlusse des nächsten §.

Beispiel 4. Wie groß ist der Inhalt F eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks auf der Oberfläche der Erde, wenn jede Seite $= 4°$ ist und die Erde als Kugel betrachtet wird, und um wie viel weicht dieser Inhalt von dem Inhalte F′ des *ebenen* Dreiecks ab, dessen Seiten den Bogen des sphärischen Dreiecks gleich sind?

Auflösung. Man erhält:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} 3° . (\operatorname{tg} 1°)^3}, \text{ und hieraus:}$$

$$\frac{\varepsilon}{4} = 1' \; 48{,}8943''; \text{ folglich } \varepsilon = 7' \; 15{,}5772'' \text{ und } \operatorname{arc} \varepsilon = 0{,}0021117378.$$

$$F = 1560{,}026 \; \square\text{-Meilen.}$$

Die Seite des ebenen Dreiecks ist $= 859{,}5 . \operatorname{arc} 4°$; daher sein Inhalt:

$$F' = (859{,}5 . \operatorname{arc} 2°)^2 . \sqrt{3} = 1559{,}076 \; \square\text{-Meilen.}$$

Der Unterschied beträgt also 0,95 □-Meilen.

Beispiel 5. Wie groß ist der Inhalt F eines sphärischen Dreiecks auf der Oberfläche der Erde, dessen Seiten 6°, 8° und 10° sind, wenn die Erde als Kugel betrachtet wird, und um wie viel weicht derselbe von dem Inhalte F′ eines ebenen Dreiecks ab, dessen Seiten den Bogen des sphärischen Dreiecks gleich sind?

Auflösung. Man erhält:

$$F = 5414{,}546 \;\square\text{-Meilen.}$$

Das ebene Dreieck hat, wenn r den Radius der Erde bezeichnet, die Seiten $r \cdot \text{arc}\,6°$, $r \cdot \text{arc}\,8°$ und $r \cdot \text{arc}\,10°$; folglich verhalten sich seine Seiten zu einander, wie 6 : 8 : 10, das Dreieck selbst ist also rechtwinklig und sein Inhalt gleich dem halben Product der Katheten. Man findet hiernach:

$$F' = 5400{,}796 \;\square\text{-Meilen.}$$

Der Unterschied beträgt sonach 13,75 □-Meilen.

§. 366.
Der Lehrsatz von Legendre.

Wenn die Bogen eines sphärischen Dreiecks, welches in der Oberfläche einer Kugel liegt, im Verhältniß zu dem Radius der Kugel sehr klein sind, und wenn die Seiten eines ebenen Dreiecks den Bogen des sphärischen gleich sind: so findet man jeden Winkel des ebenen Dreiecks aus dem gleichliegenden Winkel des sphärischen Dreiecks dadurch, daß man letzteren um ein Drittel des sphärischen Excesses vermindert.

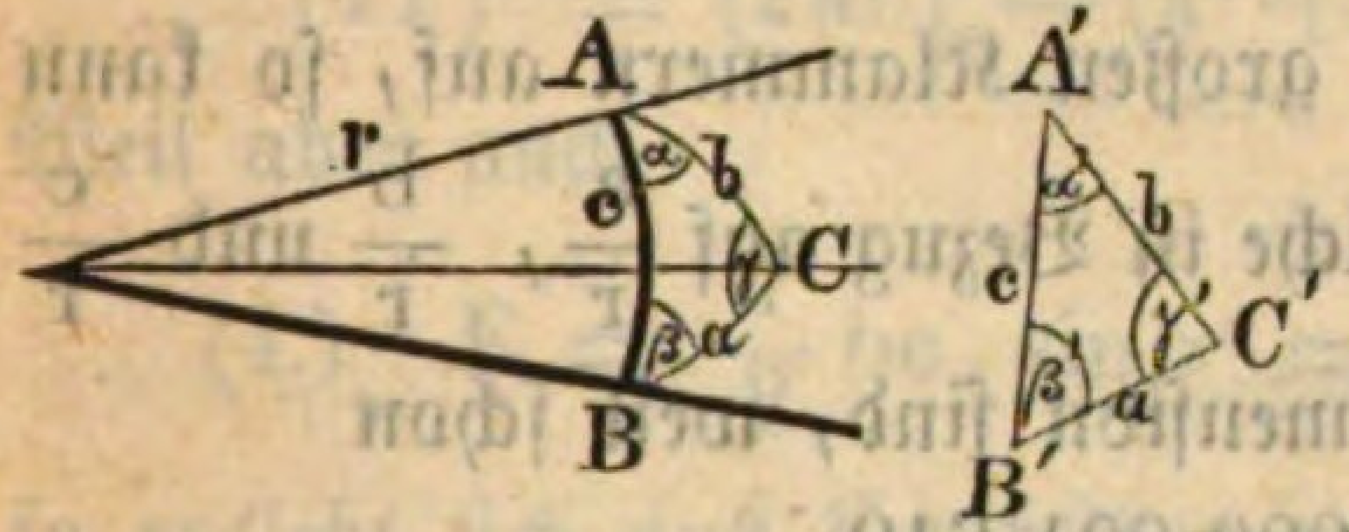
Beweis.

In diesem Lehrsatze, der besonders für die Geodäsie wichtig ist und von Legendre (1787) gefunden wurde, ist absichtlich Bogen des sphärischen Dreiecks statt Seiten gesagt worden, weil die wirkliche Länge der Bogen gemeint ist, während in der sphärischen Trigonometrie unter Seiten die Linien-Winkel, welche die Kanten mit einander bilden, verstanden werden. In diesem Sinne sollen auch die Seiten in dem nachfolgenden Beweise genommen werden.

Die Bogen des sphärischen Dreiecks ABC mögen in Bezug auf eine beliebige Längeneinheit gleich a, b und c sein, der Radius der Kugel in derselben Längeneinheit gleich r; die Winkel sollen resp. mit α, β, γ bezeichnet werden. Das ebene Dreieck A′B′C′ hat nach der Voraussetzung a, b und c zu Seiten; die Winkel wollen wir mit α', β' und γ' bezeichnen. Die Behauptung heißt dann, wenn ε den sphärischen Exceß bedeutet:

$$\alpha' = \alpha - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \beta' = \beta - \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad \gamma' = \gamma - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da der Lehrsatz nur mit der Beschränkung gilt, daß a, b und c im Verhältniß zu r sehr klein sein sollen, so fragt es sich zunächst, innerhalb welcher Grenzen der Satz richtig ist. Nun bestimmen aber die Brüche (Verhältnisse) $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ und $\frac{c}{r}$ die Seiten des sphärischen



Dreiecks, denn sie sind ihre Arcus; folglich können wir die Grenzen auf die Seiten des sphärischen Dreiecks beziehen, und wollen voraussetzen, daß keine Seite größer als ein Grad sein soll. Wenn hiernach z. B. der Lehrsatz auf ein sphärisches Dreieck angewandt werden soll, welches auf der Erdoberfläche liegt (die Erde als Kugel betrachtet), so sollen die Bogen nicht länger als 15 Meilen sein.

Bezeichnet x den Arcus eines beliebigen Winkels, so war (§. 229.)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \cdots$$

Ist nun x nicht größer als arc 1°, so kann man alle Glieder, welche x in einer höheren als der vierten Potenz enthalten, fortlassen, denn es ist

$$\frac{(\text{arc}\, 1°)^5}{5!} = 0{,}000\,000\,000\,012\,956\ldots;$$

folglich beträgt der Fehler bei sin x noch nicht 13 Einheiten der 12. Decimalstelle, bei cos x aber noch weniger (Arithm. §. 197.). Man hat also die bei der angegebenen Voraussetzung hinreichend genauen Formeln:

$$(1.)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

$$(2.)\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!}.$$

In dem sphärischen Dreieck ABC sind nun die Arcus der Seiten gleich $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ und $\frac{c}{r}$, folglich ist (vergl. die Vorbemerk. in §. 229.):

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cdot\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{c}{r}\cdot\cos\alpha$$

und hieraus folgt

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cdot\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{c}{r}},$$

daher aus (1.) und (2.)

$$\cos\alpha = \frac{1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{1}{24}\left(\frac{a}{r}\right)^4-\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{r}\right)^2+\frac{1}{24}\left(\frac{b}{r}\right)^4\right]\cdot\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{r}\right)^2+\frac{1}{24}\left(\frac{c}{r}\right)^4\right]}{\left[\frac{b}{r}-\frac{1}{6}\left(\frac{b}{r}\right)^3\right]\cdot\left[\frac{c}{r}-\frac{1}{6}\left(\frac{c}{r}\right)^3\right]}.$$

Löst man im Zähler und Nenner die großen Klammern auf, so kann man wieder alle Glieder fortlassen, welche in Bezug auf $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ und $\frac{c}{r}$ von einer höhern als der vierten Dimension sind, weil schon

$$(\text{arc } 1^\circ)^5 = 0{,}000\,000\,001\,619\ldots$$

ist und solche Glieder immer noch einen ächten Bruch zum Factor haben. Man erhält dann, wenn man ordnet:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{b}{r}\right)^2+\left(\frac{c}{r}\right)^2-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]+\frac{1}{24}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4-\left(\frac{b}{r}\right)^4-\left(\frac{c}{r}\right)^4-6\left(\frac{b}{r}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{r}\right)^2\right]}{\frac{b}{r}\cdot\frac{c}{r}\cdot\left[1-\frac{1}{6}\left(\frac{b}{r}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{c}{r}\right)^2\right]}.$$

Multiplicirt man nun Zähler und Nenner dieses Bruches mit

$$1+\frac{1}{6}\left(\frac{b}{r}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{c}{r}\right)^2,$$

so geht der Nenner in $\frac{b}{r}\cdot\frac{c}{r}\left[1-\left(\frac{1}{6}\left(\frac{b}{r}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{c}{r}\right)^2\right)^2\right]$ d. h. in $\frac{b}{r}\cdot\frac{c}{r}$ über; denn der Minuend der in den großen Klammern stehenden Differenz ist von der vierten Dimension, giebt also, mit $\frac{b}{r}\cdot\frac{c}{r}$ multiplicirt, einen Ausdruck vom sechsten Grade, der sonach fortgelassen werden kann. Läßt man auch im Zähler alle Producte fort, welche den vierten Grad übersteigen, so entsteht:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{b}{r}\right)^2+\left(\frac{c}{r}\right)^2-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]+\frac{1}{24}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4+\left(\frac{b}{r}\right)^4+\left(\frac{c}{r}\right)^4-2\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{b}{r}\right)^2-2\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{c}{r}\right)^2-2\left(\frac{b}{r}\right)^2\left(\frac{c}{r}\right)^2\right]}{\frac{b}{r}\cdot\frac{c}{r}}$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit r^2, so entsteht:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{24bcr^2}.$$

Zerlegt man im Zähler des Subtrahenden $2a^2b^2$ in $4a^2b^2-2a^2b^2$, so läßt sich der Zähler in die Differenz zweier Quadrate zerlegen, und man erhält:

$$(3.)\quad \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{24bcr^2}.$$

Diese Gleichung gestattet nun den Uebergang zu dem ebenen Dreieck A'B'C', dessen Seiten a, b und c sind. Bezeichnet noch F den Inhalt dieses Dreiecks, so ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \, . \cos\alpha' \text{ (§. 240. III.) und}$$

$$(4F)^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \text{ (§. 185. I.).}$$

Weil aber auch

$$(4.) \quad F = \frac{1}{2} bc \, . \sin\alpha' = \frac{1}{2} ac \, . \sin\beta' = \frac{1}{2} ab \, . \sin\gamma' \text{ ist,}$$

so ergiebt sich aus den beiden vorstehenden Gleichungen:

$$(5.) \quad \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos\alpha'.$$

$$(6.) \quad \frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{24bcr^2} = \frac{(2bc \, . \sin\alpha')^2}{24bcr^2} = \frac{bc}{6r^2} \cdot (\sin\alpha')^2.$$

Setzt man die Werthe aus (5.) und (6.) in (3.) ein, so entsteht:

$$(7.) \quad \cos\alpha = \cos\alpha' - \frac{bc}{6r^2} (\sin\alpha')^2.$$

Aus dieser Gleichheit geht aber hervor, daß $\cos\alpha < \cos\alpha'$ ist, also, weil α und α' zwischen $0°$ und $180°$ liegen, daß $\alpha > \alpha'$ ist. Da die entsprechende Ungleichung auch für die andern Winkel wahr ist, so hat man also:

$$(8.) \quad \alpha > \alpha', \quad \beta > \beta' \text{ und } \gamma > \gamma'.$$

Ferner geht aus (7.) auch hervor, daß der Unterschied zwischen α und α' nur sehr klein sein kann; indessen kann man auf einem anderen Wege nicht nur hierüber sicherer entscheiden, sondern auch die Grenzen angeben, zwischen welchen dieser Unterschied liegen muß.

Es ist $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180°$; weil aber $\alpha' + \beta' + \gamma'$ statt $180°$ gesetzt werden kann, so übertrifft die Summe der Winkel des sphärischen Dreiecks die Summe der Winkel des ebenen um den sphärischen Exceß. Hieraus und aus (8.) folgt aber, daß der Unterschied zwischen jedem Winkel des sphärischen Dreiecks und dem zugehörigen Winkel des ebenen kleiner als ε sein muß. Aber die Grenzen für ε lassen sich angeben. Betrachten wir die Formel VI. für $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}$ im vorigen §., so ist der erste Factor rechts unter dem Wurzelzeichen von allen vier Factoren der größte; daher ist

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} < \sqrt{\left(\operatorname{tg}\frac{a+b+c}{4}\right)^4} \text{ oder } \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} < \left(\operatorname{tg}\frac{a+b+c}{4}\right)^2.$$

Da nun nach unserer Voraussetzung jede Seite des sphärischen Dreiecks nicht größer als 1° sein soll, so ist der größte Werth, den $\frac{a+b+c}{4}$ haben kann, gleich $\frac{3^\circ}{4} = 45'$; folglich ist

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} < (\operatorname{tg} 45')^2, \text{ und hieraus:}$$

$$\varepsilon < 2'\ 21''.$$

Setzen wir nun mit Rücksicht auf (8.):

$$(9.) \quad \begin{cases} \alpha = \alpha' + x, \text{ so ist auch nach §. 163. (2.)} \\ \operatorname{arc}\alpha = \operatorname{arc}\alpha' + \operatorname{arc}x, \end{cases}$$

und x liegt dann zwischen den Grenzen 0 und 2′ 21″. Aus der Entwickelung dieser Grenzen geht aber hervor, daß in den meisten Fällen x bedeutend kleiner als 2′ 21″ sein wird. Aus (9.) folgt nun:

$$\cos\alpha = \cos\alpha' . \cos x - \sin\alpha' . \sin x,$$

und setzen wir statt cos x und sin x die Reihen

$$\cos x = 1 - \frac{(\operatorname{arc}x)^2}{2!} + \ldots\ldots \text{ und } \sin x = \operatorname{arc}x - \frac{(\operatorname{arc}x)^3}{3!} + \ldots,$$

so können wir, weil arc x sehr klein ist, ohne bemerkbaren Fehler schon vom 2ten Gliede an in jeder Reihe die Glieder außer Acht lassen, also

1 statt cos x, und arc x statt sin x

setzen; denn es ist

$$\frac{(\operatorname{arc} 2'\ 21'')^2}{2!} = 0{,}000\,000\,233\,6\ldots\ldots,$$

folglich ist der Fehler kleiner, in den meisten Fällen bedeutend kleiner, als 24 Einheiten der 8ten Decimalstelle. So entsteht

$$(10.) \quad \cos\alpha = \cos\alpha' - \operatorname{arc}x . \sin\alpha'.$$

Aus (7.) und (10.) folgt nun $\operatorname{arc}x . \sin\alpha' = \frac{bc}{6r^2}(\sin\alpha')^2$, folglich

$$(11.) \quad \operatorname{arc}x = \frac{bc . \sin\alpha'}{6r^2},$$

und setzt man diesen Werth in (9.) ein, so entsteht:

$$(12.) \quad \begin{cases} \operatorname{arc}\alpha = \operatorname{arc}\alpha' + \frac{bc . \sin\alpha'}{6r^2}, \text{ daher auch} \\ \operatorname{arc}\beta = \operatorname{arc}\beta' + \frac{ac . \sin\beta'}{6r^2} \\ \operatorname{arc}\gamma = \operatorname{arc}\gamma' + \frac{ab . \sin\gamma'}{6r^2}. \end{cases}$$

Aus (4.) folgt aber, daß der Zähler des zweiten Gliedes rechts in jeder Gleichung $= 2F$ ist; folglich erhält man

$$(13.) \quad \begin{cases} \text{arc}\,\alpha = \text{arc}\,\alpha' + \dfrac{F}{3r^2} \\ \text{arc}\,\beta = \text{arc}\,\beta' + \dfrac{F}{3r^2} \\ \text{arc}\,\gamma = \text{arc}\,\gamma' + \dfrac{F}{3r^2}. \end{cases}$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so folgt

$$\text{arc}\,\alpha + \text{arc}\,\beta + \text{arc}\,\gamma = \text{arc}\,180° + \frac{F}{r^2}, \text{ folglich}$$

$$(14.) \quad \frac{F}{r^2} = \text{arc}\,(\alpha + \beta + \gamma - 180°) = \text{arc}\,\varepsilon.$$

Setzt man endlich diesen Werth von $\frac{F}{r^2}$ in (13.) ein, so erhält man mit Hülfe von §. 163. (5.):

$$\text{arc}\,\alpha = \text{arc}\,\alpha' + \text{arc}\,\frac{\varepsilon}{3}, \; \text{arc}\,\beta = \text{arc}\,\beta' + \text{arc}\,\frac{\varepsilon}{3}, \; \text{arc}\,\gamma = \text{arc}\,\gamma' + \text{arc}\,\frac{\varepsilon}{3},$$

daher auch

$$\text{arc}\,\alpha' = \text{arc}\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\right), \; \text{arc}\,\beta' = \text{arc}\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right), \; \text{arc}\,\gamma' = \text{arc}\left(\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

und hieraus:

$$(15.) \quad \alpha' = \alpha - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \beta' = \beta - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \gamma' = \gamma - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Anmerkung. Aus (14.) folgt

$$F = r^2 . \text{arc}(\alpha + \beta + \gamma - 180°).$$

Bezeichnet nun f den Inhalt des sphärischen Dreiecks ABC, so ist (§. 346. II.)

$$f = r^2 . \text{arc}(\alpha + \beta + \gamma - 180°),$$

woraus $f = F$ folgt, d. h. man kann den Inhalt eines sphärischen Dreiecks, dessen Bogen im Verhältniß zum Radius der Kugel sehr klein sind (die Seiten nicht über 1°), ohne bemerkbaren Fehler dem Inhalte eines ebenen Dreiecks gleich setzen, dessen Seiten jene Bogen sind.

Von den regulären Körpern.

§. 367.

Erklärung.

Ein Körper heißt regulär, wenn er von lauter congruenten regulären ebenen Figuren so begrenzt wird, daß je zwei zusammenstoßende denselben Neigungswinkel bilden.

Aus dieser Erklärung folgt unmittelbar, daß alle Ecken eines regulären Körpers regulär sind; mittelbar folgt, daß sie auch alle einander congruent sind, daß also auch gleich viel Kanten in jeder Ecke zu-

sammenstoßen. Denn denkt man sich zwei Ecken so in einander gelegt, daß ihre Spitzen in einander fallen und ein Paar Seitenflächen sich decken, so müssen wegen Gleichheit aller Winkel und Gleichheit aller Seiten nach der Reihe rings herum alle Winkel und Seiten zusammenfallen, woraus indirect folgt, daß beide Ecken gleich viel Kanten haben und congruent sein müssen.

§. 368.
Die fünf regulären Körper.

Ein regulärer Körper könnte von regulären Dreiecken, Vierecken, Fünfecken u. s. w. begrenzt sein, und in jeder Ecke könnten 3, 4, 5 u. s. w. Kanten, also auch Seitenflächen, zusammenstoßen; je mehr Seiten aber ein reguläres Vieleck hat, desto größer ist sein Umfangswinkel, und weil wenigstens drei solcher Umfangswinkel in jeder Ecke des Körpers als seine Seiten zusammenstoßen müssen, die Summe der Seiten aber kleiner als 360° sein muß: so darf die Größe des Umfangswinkels eine gewisse Grenze nicht übersteigen, er muß, weil $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ ist, kleiner als 120° sein. Hieraus ersehen wir aber (vergl. §. 150. Nr. 3.), daß ein regulärer Körper nur von regulären Dreiecken, Vierecken und Fünfecken begrenzt sein kann, von regulären Sechsecken schon nicht mehr. Sonach kann es drei Klassen regulärer Körper geben, und es fragt sich nun, wie viel verschiedene Körper wieder in jeder Klasse möglich sind. Aber dasselbe Gesetz, welches der Anzahl der Klassen eine Grenze setzte, beschränkt auch in jeder Klasse die Anzahl der regulären Körper; es können nur so viel Umfangswinkel der begrenzenden regulären Vielecke in jeder Ecke zusammenstoßen, als die Grenze 360° für ihre Summe gestattet. Nun ist aber in Bezug auf die von gleichseitigen Dreiecken begrenzten regulären Körper

$$3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$$
$$4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$$
$$5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$$
$$6 \cdot 60^\circ = 360^\circ.$$

Da im letzten Falle die nicht mehr zulässige Grenze schon erreicht ist, so kann es nur drei verschiedene von gleichseitigen Dreiecken begrenzte Körper geben.

Von regulären Vierecken und Fünfecken kann nur je ein Körper begrenzt sein, so daß in jeder Ecke drei Umfangswinkel der Begrenzungsebenen zusammenstoßen, denn es ist schon

$$4 \cdot 90^\circ = 360^\circ \text{ und } 4 \cdot 108^\circ > 360^\circ.$$

Um die Untersuchung allgemeiner zu führen, wollen wir annehmen, der reguläre Körper möge von regulären m-Ecken so begrenzt sein, daß p Kanten in jeder Ecke zusammenstoßen; dann ist jeder Umfangswinkel einer Seitenfläche gleich $\frac{(m-2)2R}{m}$, und wenn p solcher Winkel Seiten jeder Ecke sind, so muß

$$p \cdot \frac{(m-2)2R}{m} < 4R$$

sein. Hieraus folgt aber

$$p \cdot (m-2) < 2m, \text{ folglich}$$

$$p < \frac{2m}{m-2} \text{ oder } p < \frac{2}{1-\frac{2}{m}}.$$

Aus der letzten Umformung erkennt man, daß p um so kleiner wird, je größer m ist.

Ist nun

1) $m = 3$, so folgt $p < 6$;

folglich kann p nur gleich 3, oder 4, oder 5 sein.

2) $m = 4$, so folgt $p < 4$;

folglich kann p nur gleich 3 sein.

3) $m = 5$, so folgt $p < 3\frac{1}{3}$;

folglich kann p wieder nur gleich 3 sein.

Ist $m = 6$, so wird schon $p < 3$, um so mehr also, wenn $p > 6$ ist.

Es kann also hiernach nur fünf verschiedene reguläre Körper geben, und zwar müssen die einzelnen Körper in der Folge, wie sie aus der vorstehenden Entwickelung sich ergeben haben, begrenzt sein:

I. von congruenten gleichseitigen Dreiecken, so daß drei Kanten in jeder Ecke zusammenstoßen;

II. von congruenten gleichseitigen Dreiecken, so daß vier Kanten in jeder Ecke zusammenstoßen;

III. von congruenten gleichseitigen Dreiecken, so daß fünf Kanten in jeder Ecke zusammenstoßen;

IV. von congruenten Quadraten, so daß drei Kanten in jeder Ecke zusammenstoßen;

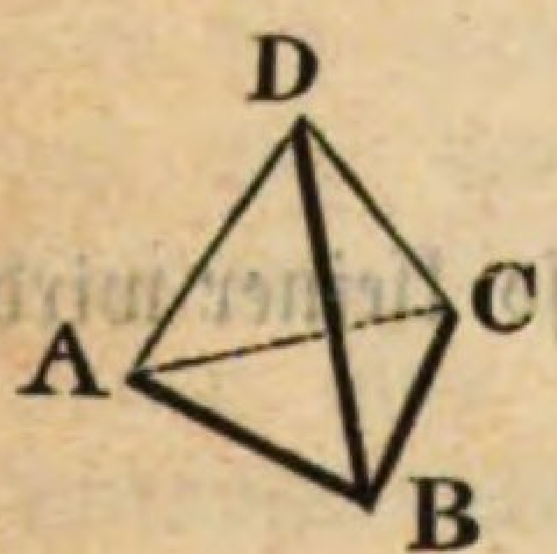
V. von congruenten regulären Fünfecken, so daß drei Kanten in jeder Ecke zusammenstoßen.

Es fragt sich jetzt, ob denn auch diese fünf regulären Körper wirklich existiren, und dies soll nun gezeigt werden. Die Körper sind in der eben angeführten Ordnung folgende:

I. Das Tetraëder

ist ein von vier congruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzter regulärer Körper mit 4 Ecken und 6 Kanten, von denen immer drei in jeder Ecke zusammenstoßen.

Der Körper ist eine dreiseitige Pyramide ABCD, in welcher alle Kanten einander gleich sind. Um ihn zu construiren, mache man ein gleichseitiges Dreieck ABC, dessen Seite a heißen mag, zur Grundfläche einer regulären Pyramide (§. 316.) und gebe ihr die Höhe $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Da der Radius des Kreises um die Grundfläche gleich $a\sqrt{\frac{1}{3}}$ ist, so wird jede Seitenkante gleich $\sqrt{\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{3}a^2}=a$; der Körper ist also ein regulärer (§. 281. Nr. 3.).



Anmerk. Wird ein Körper von n beliebigen m-Ecken so begrenzt, daß in jeder Ecke p Kanten zusammenstoßen, so kann man hieraus die Anzahl der Kanten und Ecken leicht bestimmen. Es soll dies hier allgemein geschehen und dem Leser überlassen bleiben, die Anwendung auf die einzelnen regulären Körper selbst zu machen.

Alle m-Ecke zusammen haben $n \times m$ Seiten, und weil immer zwei Seiten eine Kante bilden, so ist

$$\text{die Anzahl der Kanten} = \frac{n \times m}{2}.$$

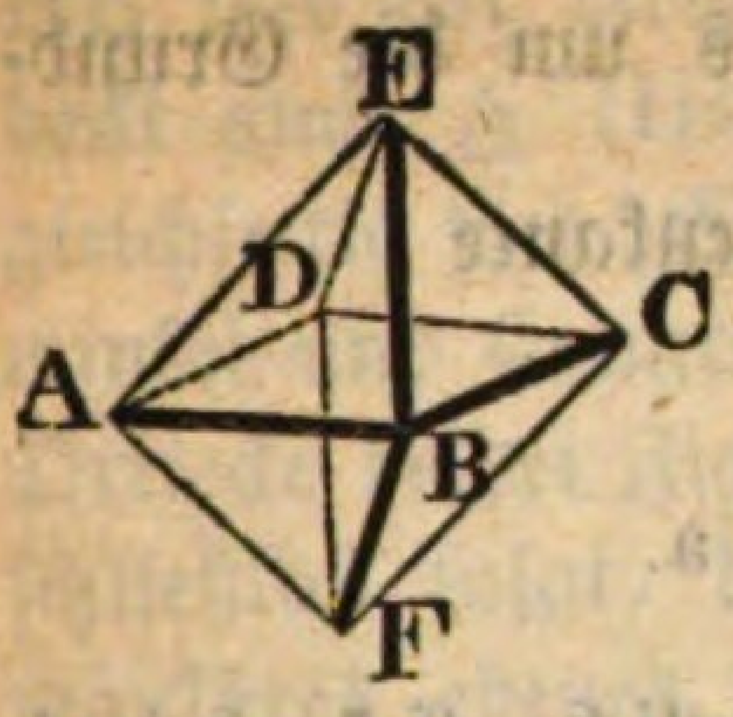
Jede Kante hat aber zwei Endpunkte, folglich haben alle Kanten $n \times m$ Endpunkte. Weil nun p Endpunkte immer in eine Ecke zusammenfallen, so ist

$$\text{die Anzahl der Ecken} = \frac{n \times m}{p}.$$

II. Das Octaëder

ist ein von acht congruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzter regulärer Körper mit 6 Ecken und 12 Kanten, von denen in jeder Ecke vier zusammenstoßen.

Der Körper besteht aus zwei congruenten regulären vierseitigen Pyramiden mit lauter gleichen Kanten, welche mit ihren Grundflächen an einander gesetzt sind. Um ihn zu construiren, mache man das Quadrat



ABCD, dessen Seite a sein mag, zur Grundfläche einer regulären Pyramide ABCDE und gebe ihr die Höhe $a\sqrt{\frac{1}{2}}$. Der Radius des Kreises um die Grundfläche ist auch $= a\sqrt{\frac{1}{2}}$, folglich jede Seitenkante $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2} = a$. Construirt man nun eine zweite der ersten congruente Pyramide ABCDF und setzt beide so an einander, daß ihre Grundflächen sich decken, so ist der ganze Körper FABCDE das Dodekaëder.

Um zu beweisen, das dieser Körper regulär ist, hat man unmittelbar aus der Construction die Gleichheit aller Kanten, woraus folgt, daß alle Seitenflächen congruente gleichseitige Dreiecke sind. Ferner hat man die Gleichheit aller Neigungswinkel an den von E und F ausgehenden Kanten; es fragt sich also nur noch, ob die Neigungswinkel an den Kanten AB, BC, CD und DA jenen Neigungswinkeln gleich sind, oder, weil der Körper aus zwei congruenten Theilen besteht, ob in der Pyramide ABCDE der Neigungswinkel ψ an jeder Grundkante halb so groß ist, als der Neigungswinkel φ an jeder Seitenkante. Betrachtet man aber die dreikantige körperliche Ecke CBDE, so erhält man aus ihr:

$$\cos 90^\circ = (\cos 60^\circ)^2 + (\sin 60^\circ)^2 . \cos\varphi.$$

Hieraus folgt $\cos\varphi = -(\operatorname{cotg} 60^\circ)^2 = -\frac{1}{3}$, daher

$$(1.)\quad \cos\frac{\varphi}{2} = +\sqrt{\tfrac{1}{3}} \quad (\text{§. 215. Nr. 4.}).$$

Ferner erhält man aus derselben körperlichen Ecke:

$$\cos 60^\circ = \cos 90^\circ . \cos 60^\circ + \sin 90^\circ . \sin 60^\circ . \cos\psi.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$(2.)\quad \cos\psi = \operatorname{cotg} 60^\circ = +\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Aus (1.) und (2.) folgt $\frac{\varphi}{2} = \psi$, also $\varphi = 2\psi$.

III. Das Ikosaëder

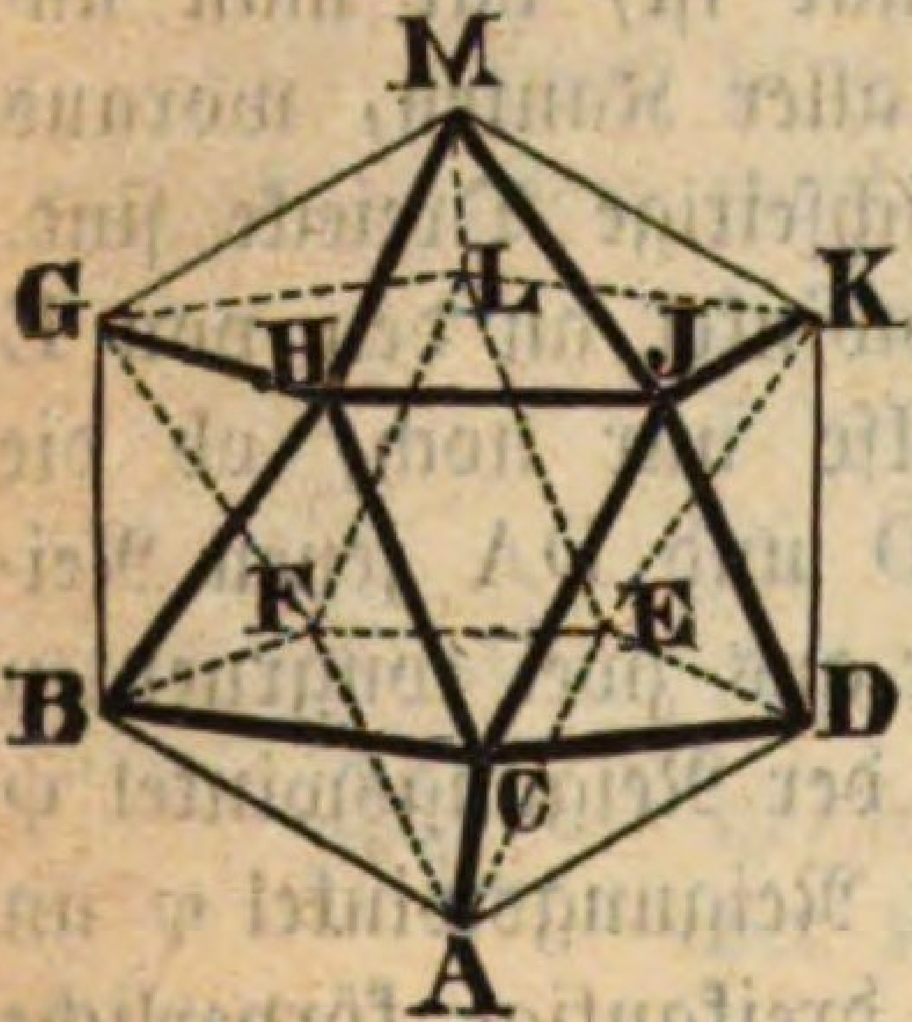
ist ein von zwanzig congruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzter regulärer Körper mit 12 Ecken und 30 Kanten, von denen fünf in jeder Ecke zusammenstoßen.

Das Ikosaëder kann auf folgende Art gebildet werden. Man construire eine reguläre fünfseitige Pyramide ABCDEF mit lauter gleichen Kanten, indem man ein reguläres Fünfeck BCDEF, dessen Seite a sein mag, zu ihrer Grundfläche und die Länge $a . \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$

zu ihrer Höhe macht. Da der Radius des Kreises um die Grundfläche $= a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ ist, so ergiebt sich jede Seitenkante

$$=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}\cdot a^2+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\cdot a^2}=a.$$

Nach dieser Construction ist die fünfkantige körperliche Ecke bei A regulär; denn jede ihrer Seiten ist gleich 60°, und ihre Winkel sind einander gleich, aus Congruenz der dreikantigen körperlichen Ecken bei B, C, D, E und F. Jede dieser dreikantigen körperlichen Ecken läßt sich aber wieder zu einer regulären fünfkantigen körperlichen Ecke ergänzen, z. B. die Ecke, deren Kanten CB, CA und CD sind; denn zwei Seiten dieser Ecke sind = 60° und bilden bereits den Neigungswinkel der regulären fünfkantigen körperlichen Ecke A mit einander. Man kann also die gleichseitigen Dreiecke CBH, CHI und CID so ansetzen, daß die neu entstandene Ecke C der Ecke A congruent wird. Eben so kann man bei den andern Ecken D, E, F und B verfahren, wobei dann immer zwei Dreiecke, die an eine Ecke angesetzt sind, mit zwei Dreiecken der beiden benachbarten Ecken zusammenfallen müssen, so daß also im Ganzen 10 Dreiecke an BCDEF angesetzt sind. Durch diese Dreiecke ist oben die Figur GHIKL erzeugt worden, welche ein ebenes Fünfeck und dem Fünfeck BCDEF congruent ist. Um dies zu beweisen, denke man sich die ganze Raum-Figur, welche aus den angeführten 10 Dreiecken besteht, aus der Lage, welche sie jetzt hat, fortgenommen und so umgedreht, daß das Fünfeck GHIKL unten, das andere also oben liegt. Man kann dann diese Raum-Figur so an die fünfseitige Pyramide ABCDEF ansetzen, daß die gebrochene Linie GHIKL den Umfang CBFED der Grundfläche der Pyramide deckt, die Raum-Figur selbst aber genau dieselbe Lage erhält, welche sie ursprünglich hatte, d. h. diese Figur deckt sich selbst in umgekehrter Lage oder es ist (der Leser achte auf die Folge der Buchstaben):



$$GHIKLFBCDE \cong CBFEDIHGLK.$$

Man lege nämlich die Raumfigur in der umgekehrten Lage so auf diese Figur in der ursprünglichen Lage, daß G in C, GH entlang CB und das Δ GHB auf das Δ CBH fällt, so muß auch H in B fallen, und die Dreiecken müssen sich decken. Dann fällt aber weiter das Δ HBC auf das Δ BHG, weil der Neigungswinkel in der Kante

HB und der Neigungswinkel in der Kante BH derselbe ist, und es deckt auch △ HBC das △ BHG, weil diese Dreiecke congruent und gleichseitig sind. Weiter decken sich aber wegen Gleichheit aller Neigungswinkel und Congruenz aller gleichseitigen Dreiecke jede zwei folgenden Dreiecke beider Figuren (zunächst deckt △ HIC das △ BFG), woraus schließlich folgt, daß GHIKL mit CBFED zusammenfällt, also ein reguläres ebenes Fünfeck ist. An dieses Fünfeck kann man nun eine reguläre Pyramide GHIKL mit lauter gleichen Kanten ansetzen, welche bei der angenommenen Lage die Pyramide CBFEDA deckt, und bringt man dann die zwischen beiden Fünfecken liegende Raumfigur mit der angesetzten Pyramide wieder in ihre ursprüngliche Lage, so erhält man einen von 20 regulären congruenten Dreiecken begrenzten Raum, der das Ikosaëder ist. Aus der Congruenz aller Ecken dieses Körpers — namentlich folgt aus dem Beweise, daß die Ecken G, H u. s. w den Ecken C, B u. s. w. congruent sind — ergiebt sich die Gleichheit aller Neigungswinkel des Körpers.

Der Beweis kann auch ohne das Umkehren der aus 10 Dreiecken bestehenden Raum-Figur, welches dem Leser vielleicht Schwierigkeit machen könnte, aber übend ist, geführt werden. — Vorausgeschickt sei der leicht durch Decken zu beweisende Satz, daß zwei vierkantige körperliche Ecken congruent sind, wenn sie in drei auf einander folgenden Seiten und den beiden eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen; nur müssen in beiden Ecken die gleichen Stücke nach derselben Richtung hin auf einander folgen. Diese letzte Bedingung fällt aber fort, wenn in jeder Ecke nicht nur die drei Seiten einander gleich sind, sondern auch die beiden Winkel.

Wenn der Beweis wie oben so weit geführt ist, daß die fünfseitige Figur GHIKL erzeugt ist, so hat man zunächst zu zeigen, daß diese Figur ein ebenes reguläres Fünfeck ist. Daß die Seiten einander gleich sind, folgt unmittelbar aus der Construction; es fragt sich nur noch, ob das Fünfeck eben ist und lauter gleiche Winkel hat. Eben ist es, weil seine Ecken G, H, I, K und L in einer Ebene liegen, denn sie sind gleich weit von der Ebene BCDEF entfernt. Fällt man nämlich von der Ecke H eine Senkrechte auf diese Ebene und eine zweite auf die Linie BC und verbindet die Fußpunkte beider mit einander, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, und dieses ist jedem der vier andern Dreiecke congruent, die man erzeugen kann, wenn man bei den andern Ecken eben so verfährt. Das Fünfeck hat aber auch gleiche Winkel, weil die fünf vierkantigen körperlichen Ecken bei G, H, I, K und L nach dem oben angeführten Satz einander congruent sind. Setzt man nun an GHIKL die reguläre Pyramide GHIKLM mit lauter gleichen Kanten an, die der Pyramide BCDEFA congruent wird, so ist das Ikosaëder erzeugt. Daß die fünfkantigen körperlichen Ecken G, H, I, K und L den andern Ecken des Körpers congruent sind, folgt leicht. Jede wird durch die Ebene GHIKL in eine vierkantige und eine dreikantige Ecke zerlegt; die vierkantige ist der vierkantigen Ecke B, deren Kanten BC, BF, BG

und BH sind, congruent, die dreiseitige aber der dreiseitigen Ecke B, deren Kanten BA, BC und BF sind; die körperlichen Fünfecke sind daher leicht zum Decken zu bringen.

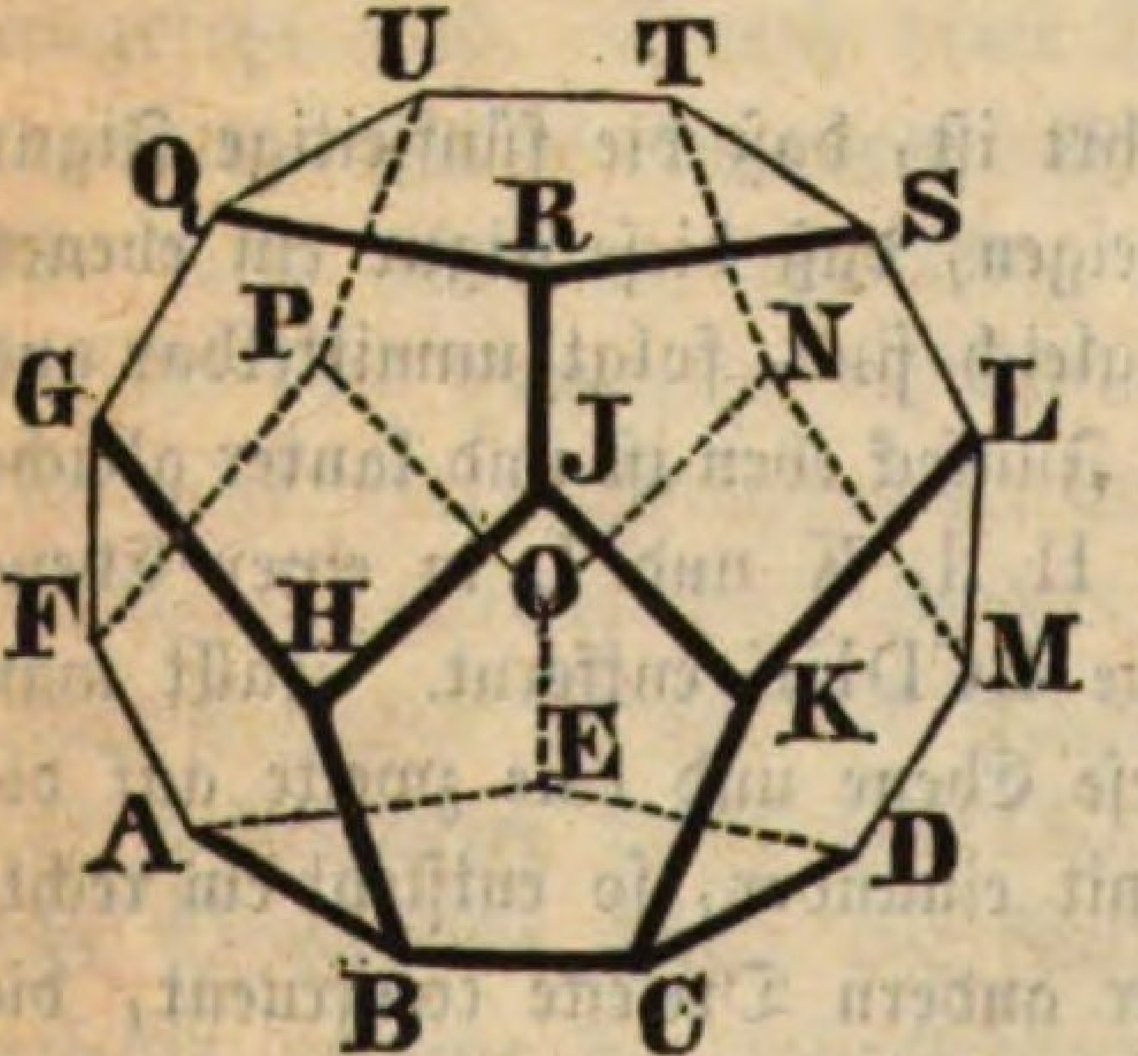
IV. Das Hexaëder

ist der schon bekannte Kubus oder Würfel (vergl. §. 285. und die Figur in §. 291.); es ist ein von sechs congruenten Quadraten begrenzter regulärer Körper mit 8 Ecken und 12 Kanten, von denen drei in jeder Ecke zusammenstoßen.

V. Das Dodekaëder

ist ein von zwölf congruenten regulären Fünfecken begrenzter regulärer Körper mit 20 Ecken und 30 Kanten, von denen drei in jeder Ecke zusammenstoßen.

Das Dodekaëder kann auf folgende Art construirt werden: ABCDE sei ein reguläres Fünfeck; man setze an AB und BC Fünfecke an, welche dem ersten Fünfeck congruent sind und eine gemeinschaftliche Kante (Seite) BH haben. Die körperliche Ecke B ist dann regulär. Setzt man weiter an CD und DE solche Fünfecke an, von denen jedes mit dem vorhergehenden wieder in einer gemeinschaftlichen Kante zusammenstößt, so entstehen die regulären Ecken C und D. Man hat also jetzt das Fünfeck ABCDE und vier angesetzte ihm congruente Fünfecke; es fragt sich, ob an EA ein sechstes reguläres



Fünfeck so angesetzt werden kann, daß es sich an die Fünfecke über ED und AB anschließt. Die Frage läuft darauf hinaus, ob EO und AF in einer Ebene liegen oder nicht. Denkt man sich aber zunächst durch EO und EA eine Ebene gelegt, so wird die dreikantige körperliche Ecke E der Ecke B congruent (§. 281. Nr. 1.), und denkt man sich dann durch AF und AE eine Ebene gelegt, so wird auch die Ecke A der Ecke B congruent; folglich bilden die beiden Ebenen OEA und FAE mit ABCDE gleiche Neigungswinkel, d. h. sie fallen in einander. Weil aber die Linien-Winkel OEA und FAE dem Winkel HBA gleich sind, also jeder 108°, so kann man zwischen die Linien OE, EA und AF ein reguläres Fünfeck einfügen und hat nun sechs congruente reguläre Fünfecke, die zusammen die halbe Oberfläche des Dodekaëders ausmachen. Die andere Hälfte, in der Figur die obere, könnte man nun auf dieselbe Weise construiren und dann

beide zusammensetzen; bequemer aber für den Beweis ist das folgende weitere Verfahren.

Legt man durch HG und HI eine Ebene, so wird die dreikantige körperliche Ecke H der Ecke B congruent, daher ist $\measuredangle$ GHI $= 108°$, und weil HG $=$ HI ist, so kann man in H wieder ein dem Fünfeck ABCDE congruentes, nämlich GHIRQ ansetzen, und dasselbe bildet dann mit ABHGF und BHIKC wieder denselben Neigungswinkel, welchen die bisher construirten Fünfecke mit einander bilden. Man kann nun fortfahren, auch an K, M und O reguläre Fünfecke anzusetzen, wobei man jedesmal nur noch zwei neue Seiten hinzuzufügen hat. Endlich erzeugt man durch die Linie QU auch noch ein fünftes reguläres Fünfeck, welches zur Ecke F gehört. Daß aber dieses Fünfeck GFPUQ eben und regulär ist, folgt ähnlich wie oben bei dem Fünfeck AEOPF. Legt man nämlich durch QG und GF, durch GF und FP, endlich durch FP und PU eine Ebene, so werden die drei Ecken G, F und P der Ecke B congruent; folglich bilden die beiden ersten Ebenen mit GFABH, die zweite und dritte aber mit FPOEA gleiche Neigungswinkel, woraus folgt, daß alle drei Ebenen in einander fallen, also GFPUQ eine ebene Figur ist. Daß diese Figur aber regulär ist, folgt, weil die Linien-Winkel bei G, F und P gleich 108° sind, aus Congruenz dieses Fünfecks mit jedem der bisher construirten (§. 39. Nr. 1.). Die zuletzt angesetzten fünf regulären Fünfecke erzeugen aber wieder ein ihnen congruentes Fünfeck QRSTU, welches mit jedem wieder unter demselben Neigungswinkel zusammenstößt, den je zwei benachbarte aller bisher construirten Fünfecke mit einander bilden. Man lege nur wieder durch je zwei an einander stoßende Seiten des Fünfecks QRSTU eine Ebene, so wird jede der fünf Ecken Q, R, S, T und U jeder bisher erzeugten Ecke, z. B. der Ecke B, congruent, woraus wie vorher folgt, daß alle diese Ebenen zusammenfallen, und jeder Winkel des jetzt ebenen Fünfecks QRSTU gleich 108° ist. Da auch alle Seiten einander gleich sind, so ist das Fünfeck regulär. Der ganze Körper ist also von lauter congruenten regulären Fünfecken begrenzt, und alle Neigungswinkel desselben sind einander gleich; der Körper ist also regulär.

Anmerkung 1. Bezeichnet S die Anzahl der Seitenflächen, E die Anzahl der Ecken und K die Anzahl der Kanten eines von Ebenen begrenzten Körpers, so findet man, daß immer

$$S + E = K + 2$$

ist, z. B. bei dem Dodekaëder $12 + 20 = 30 + 2$. Dies Gesetz ist aber deshalb wichtig, weil es von jedem Körper, der durch Ebenen begrenzt ist, gilt, d. h. es ist bei jedem Polyeder (vieleckigen Körper, Vielfach) die

Summe der Anzahl der Seitenflächen und der Anzahl der Ecken um 2 größer als die Anzahl der Kanten. Dies Gesetz ist von Euler gefunden worden und heißt nach ihm der Euler'sche Satz.

Bew. Ein zusammenhängender Theil der Oberfläche des Polyeders (wobei vorausgesetzt wird, daß keine Seitenfläche getheilt sei) bestehe aus s Seitenflächen mit k Kanten und e Ecken. In s und e sollen auch die Kanten, welche den Theil begrenzen, und die Ecken, in welchen solche begrenzenden Kanten zusammenstoßen, eingerechnet sein, s aber sei wenigstens um 2 kleiner als S, d. h. als die Anzahl aller Seitenflächen. Nimmt man nun zu diesem Theil der Oberfläche noch eine Seitenfläche hinzu, welche m Kanten und m — 1 Ecken, die zwischen den Kanten liegen, mit dem Theile nicht gemein haben mag, und bezeichnen s', k' und e' für den um eine Seitenfläche vermehrten Theil dasselbe, was s, k und e für den nicht vermehrten Theil bedeuten: so ist

$$s' = s + 1$$
$$e' = e + m - 1$$
$$k' = k + m.$$

Zieht man die dritte Gleichung von der Summe der beiden ersten ab, so entsteht:

(1.) $s' + e' - k' = s + e - k$,

woraus folgt, daß für jeden beliebigen zusammenhängenden Theil der Oberfläche eines jeden beliebigen Polyeders, wenn er auch nur eine Seitenfläche weniger als die ganze Oberfläche hat, die algebraische Summe

$$s + e - k$$

immer dieselbe Zahl, d. h. constant ist. Nehmen wir aber, um diese Zahl zu finden, ein beliebiges Polyeder, z. B. eine vierseitige Pyramide, und lassen die Grundfläche fort, so ist

$$s = 4, \quad e = 5 \quad \text{und} \quad k = 8,$$

folglich $s + e - k = 4 + 5 - 8$ oder

(2.) $s + e - k = 1$,

d. h. die Summe der Anzahl der Seitenflächen und der Anzahl der Ecken übertrifft die Anzahl der Kanten um 1. (Dieser Satz ist von Cauchy gefunden worden.)

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man zwei, oder drei, oder auch vier Seitenflächen der Pyramide fortläßt.

Lassen wir nun bei dem Polyeder, welches S Seitenflächen, E Ecken und K Kanten hat, eine Seitenfläche fort, so ändert sich nur die Zahl der Seitenflächen, während die Zahl der Ecken und Kanten unverändert bleibt. Es ist also in diesem Falle

$$s = S - 1, \quad e = E \quad \text{und} \quad k = K,$$

daher entsteht aus (2.):

$$S - 1 + E - K = 1.$$

Hieraus folgt aber:

(3.) $S + E = K + 2$,

wodurch der Euler'sche Satz bewiesen ist.

Der Leser sei noch besonders darauf aufmerksam gemacht, daß der Satz von Cauchy nur für einen Theil der Oberfläche eines Polyeders gilt (auch für jede ebene Figur, welche aus einzelnen geradlinigen Figuren zusammengesetzt ist), der Euler'sche Satz aber für die ganze Oberfläche.

Anmerkung 2. Zwei reguläre Körper derselben Gattung sind auch einander ähnlich, z. B. zwei Dodekaëder; denn man dehnt den Begriff der Aehnlichkeit auf beliebige Polyeder aus und nennt solche zwei Polyeder einander ähnlich, welche von gleich vielen ähnlichen Figuren in derselben Ordnung so begrenzt werden, daß auch je zwei gleichliegende Flächenwinkel beider Körper einander gleich sind. — Der Hauptsatz über ähnliche Polyeder heißt: ähnliche Polyeder verhalten sich zu einander, wie die Kuben gleichliegender Kanten; er kann durch Zerlegen beider Körper in ähnliche dreiseitige Pyramiden bewiesen werden. Für reguläre Körper geht die Richtigkeit des Satzes auch aus der Formel für ihren Inhalt (§. 371.) hervor.

§. 369.

Aufgabe.

Den Flächenwinkel δ jedes regulären Körpers zu bestimmen.

Aufl. Da jede Ecke eines regulären Körpers regulär ist, die Seiten dieser Ecke aber bekannt sind, so ergiebt sich die Auflösung aus §. 361. IV. Man erhält δ aus der Gleichung

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\frac{180^\circ}{p}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

wenn p die Anzahl der Kanten, die in jeder Ecke zusammenstoßen, und α den Umfangswinkel jeder Seitenfläche bezeichnet. Hieraus folgt der Flächenwinkel

des Tetraëders	=	70° 31′ 43,6″
» Octaëders	=	109° 28′ 16,4″
» Ikosaëders	=	138° 11′ 22,7″
» Hexaëders	=	90°
» Dodekaëders	=	116° 33′ 54,1″.

Anmerkung. Man kann alle diese Winkel aus rationalen Werthen berechnen. Aus $\sin\frac{\delta}{2}$ kann man $\cos\frac{\delta}{2}$, dann $\sin\delta$ und $\cos\delta$ finden, und erhält (§. 210. Beisp. 7. und §. 238. I. Anmerk.):

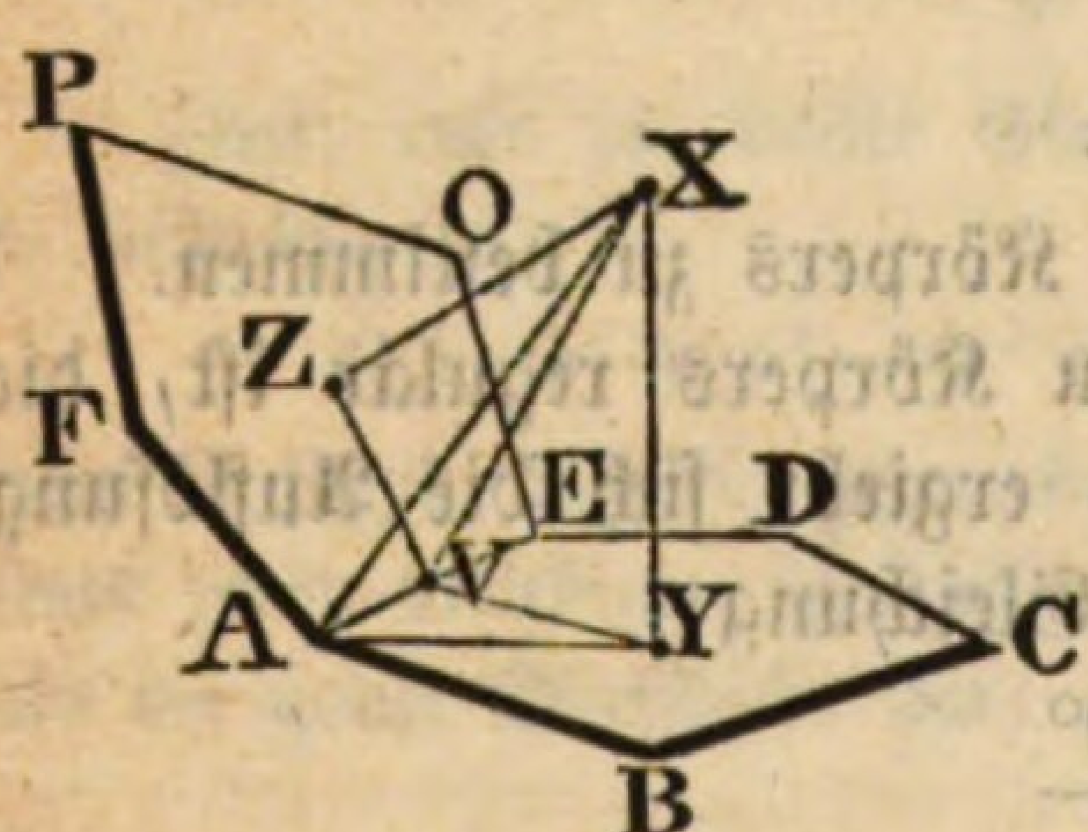
bei dem Tetraëder	$\cos\delta$	$= \frac{1}{3}$
» » Octaëder	$\cos\delta$	$= -\frac{1}{3}$
» » Ikosaëder	$\sin\delta$	$= \frac{2}{3}$
» » Hexaëder	$\sin\delta$	$= 1$
» » Dodekaëder	$\operatorname{tg}\delta$	$= -2.$

§. 370.

Lehrsatz.

Um jeden regulären Körper läßt sich eine Kugel beschreiben, deren Oberfläche durch alle Ecken des Körpers geht; eine zweite Kugel läßt sich in jeden Körper einschreiben, deren Oberfläche alle Seiten des Körpers berührt. Beide Kugeln sind concentrisch, und ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt wird der **Mittelpunkt** des regulären Körpers genannt. Dieser Mittelpunkt ist also von allen Ecken des Körpers gleich weit entfernt, und auch von allen Seitenflächen.

Beweis. Die Figur zeigt zwei an einander stoßende Seitenflächen des Körpers; man lege durch den Mittelpunkt V der gemeinschaftlichen Kante AE eine diese Kante senkrecht schneidende Ebene, so steht letztere auf beiden Seitenflächen senkrecht (§. 265.), und in ihren Durchschnittslinien mit den Seitenflächen liegen die Mittelpunkte



derselben; es mögen Y und Z diese Mittelpunkte sein. Errichtet man nun in Y auf ABCDE, und in Z auf AEOPF eine Senkrechte, so liegen diese in der erwähnten Ebene und müssen sich schneiden; ihr Durchschnittspunkt X ist der Mittelpunkt des regulären Körpers. Denn zunächst ist X von allen Ecken der beiden Seitenflächen gleich weit entfernt (§. 261.), dann aber auch von diesen Flächen selbst, weil aus der Congruenz der Dreiecke XYV und XZV (§. 25. V.) folgt: XY = XZ. Ferner ist nach der Construction $\measuredangle$ YVZ der Flächenwinkel δ des regulären Körpers, folglich ist $\measuredangle$ XVY = $\measuredangle$ XVZ der halbe Flächenwinkel, und bezeichnet man den kleinen Radius jeder Seitenfläche (z. B. YV) mit ϱ', so folgt

$$XY = XZ = \varrho' . \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}.$$

Was aber bisher von den beiden Seitenflächen ABCDE und AEOPF gezeigt worden ist, gilt von je zwei an einander stoßenden Seitenflächen. Nimmt man also etwa die an CD anstoßende Seitenfläche, so kann man auf dieselbe Weise zeigen, daß die in ihrem Mittelpunkte W errichtete Senkrechte und YX sich schneiden müssen, und bezeichnet man den Durchschnittspunkt mit X', so findet man wieder

$$X'Y = X'W = \varrho' . \operatorname{tg} \frac{\delta}{2},$$

d. h. es ist X'Y = XY; folglich fällt X' mit X zusammen, es geht auch die in W errichtete Senkrechte durch X, und X ist jetzt schon

von drei Seitenflächen gleich weit entfernt, und auch von allen ihren Ecken. Da man so fortfahren und nach und nach zu allen übrigen Seitenflächen übergehen kann, so ergiebt sich hieraus die Richtigkeit des Satzes.

§. 371.

Aufgabe.

Die Kante eines regulären Körpers, welcher von n congruenten m-Ecken so begrenzt ist, daß in jeder Ecke p Kanten zusammenstoßen, sei gleich a; man soll den Inhalt K des Körpers, seine Oberfläche O, den Radius r der umschriebenen Kugel und den Radius ρ der eingeschriebenen Kugel finden.

Auflösung. Legt man durch jede Kante und den Mittelpunkt des regulären Körpers eine Ebene, so wird durch diese Ebenen der Körper in n congruente reguläre m-seitige Pyramiden zerlegt. In der vorhergehenden Figur (§. 370.) würde ABCDEX eine solche Pyramide sein, und aus ihr sind die gesuchten Stücke zu berechnen. Denn nimmt man ihren Inhalt nmal, so erhält man K; nimmt man ihre Grundfläche nmal, so erhält man O; endlich ist r ihre Seitenkante XA, ρ ihre Höhe XY.

Zunächst ist der Inhalt der Grundfläche der m-seitigen Pyramide (§. 238. V.) $= m \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{m}$, folglich ist

$$\text{I. die Oberfläche } O = \frac{nma^2}{4} \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{m}.$$

Ferner ist der Neigungswinkel XVY der Seitenfläche der Pyramide zur Grundfläche die Hälfte des Flächenwinkels δ des regulären Körpers, und bezeichnet α den Umfangswinkel der Grundfläche, so war (§. 361. IV.)

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \frac{180^\circ}{p}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Weil aber $\frac{\alpha}{2}$ das Complement des halben, zur Seite des regulären m-Ecks gehörigen Centriwinkels ist, so folgt $\cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{180^\circ}{m}$, folglich

$$\text{II.} \qquad \sin \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \frac{180^\circ}{p}}{\sin \frac{180^\circ}{m}}.$$

Um ϱ zu finden, hat man aus dem rechtwinkligen ΔXYV:

$$\varrho = VY . \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}, \text{ oder}$$

$$\text{III. } \varrho = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{m}\cdot\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}.$$

Aus ϱ und der Grundfläche der Pyramide folgt nun ihr Inhalt, und aus diesem Inhalt der des ganzen Körpers:

$$\text{IV. Inhalt } K = \frac{nma^3}{24}\cdot\left(\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{m}\right)^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}.$$

Endlich findet man r aus dem rechtwinkligen ΔXVA. Es ist

$$VX = VY . \sec\frac{\delta}{2} = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{m}\cdot\sec\frac{\delta}{2}; \text{ folglich}$$

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{m}\cdot\sec\frac{\delta}{2}\right)^2, \text{ also}$$

$$(1.)\quad r = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{1+\left(\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{m}\cdot\sec\frac{\delta}{2}\right)^2}.$$

Um diesem Ausdrucke eine zur Berechnung geeignetere Form zu geben, wollen wir die Bezeichnung einführen:

$$(2.)\quad \frac{180^\circ}{m} = \varphi \text{ und } \frac{180^\circ}{p} = \psi;$$

dann ist aus II.:

$$(3.)\quad \left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2 = \frac{\cos\psi^2}{\sin\varphi^2}, \text{ folglich}$$

$$(4.)\quad \left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2 = \frac{\sin\varphi^2 - \cos\psi^2}{\sin\varphi^2}$$

$$(5.)\quad \left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)^2 = \frac{\cos\psi^2}{\sin\varphi^2 - \cos\psi^2}.$$

Aus (1.) folgt nun

$$r = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{1+\operatorname{cotg}\varphi^2 . \left(\sec\frac{\delta}{2}\right)^2},$$

und setzt man den reciproken Werth von $\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2$ aus (4.) statt $\left(\sec\frac{\delta}{2}\right)^2$ ein, so entsteht

$$r = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi^2 - \cos\psi^2}}$$

$$r = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\psi^2}{\sin\varphi^2 - \cos\psi^2}}$$

$$r = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sin \psi^2}{\sin \varphi^2 - \cos \psi^2}}$$

$$r = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sin \psi^2}{\cos \psi^2} \cdot \frac{\cos \psi^2}{\sin \varphi^2 - \cos \psi^2}}.$$

Hieraus folgt mit Hülfe von (5.):

$$r = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \psi^2 \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}\right)^2} \text{ oder}$$

$$r = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \psi \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}.$$

Setzt man wieder aus (2.) $\frac{180^\circ}{p}$ statt ψ, so folgt:

$$\text{V.} \quad r = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{p} \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}.$$

Bei der Anwendung der Formeln III. bis V. würde man zuerst $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$ berechnen müssen; aus (5.) folgt aber

$$(6.) \quad \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \frac{180^\circ}{p}}{\sqrt{\left(\sin \frac{180^\circ}{m}\right)^2 - \left(\cos \frac{180^\circ}{p}\right)^2}}$$

und dieser Werth ist in die angeführten Formeln einzusetzen. Es ergeben sich die nachfolgenden Werthe.

Für das Tetraëder:

Inh. $= \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$; Oberfl. $= a^2 \sqrt{3}$.

Für das Octaëder:

Inh. $= \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$; Oberfl. $= 2 a^2 \sqrt{3}$.

Für das Ikosaëder:

Inh. $= \frac{5}{12} a^3 (3 + \sqrt{5})$; Oberfl. $= 5 a^2 \sqrt{3}$.

Für das Hexaëder:

Inh. $= a^3$; Oberfl. $= 6 a^2$.

Für das Dodekaëder:

Inh. $= \frac{1}{4} a^3 (15 + 7 \sqrt{5})$; Oberfl. $= 3 a^2 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}$.

Anmerkung. Auch aus den für K, r und ϱ gefundenen Formeln folgt, daß es nur fünf reguläre Körper geben kann. Wendet man auf den Radicand im Nenner des Ausdrucks für $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$ (6.) die Formel §. 216, XVIII. an, so entsteht

$$\left(\sin\frac{180^\circ}{m}\right)^2 - \left(\cos\frac{180^\circ}{p}\right)^2 = -\cos\left(\frac{180^\circ}{p}+\frac{180^\circ}{m}\right)\cdot\cos\left(\frac{180^\circ}{p}-\frac{180^\circ}{m}\right),$$

und setzt man diesen Werth in (6.) ein, so folgt:

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\frac{180^\circ}{p}}{\sqrt{-\cos\left(\frac{180^\circ}{p}+\frac{180^\circ}{m}\right)\cdot\cos\left(\frac{180^\circ}{p}-\frac{180^\circ}{m}\right)}}.$$

Durch Substitution des Werthes von $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$ in III. erhält man den

Inhalt des regulären Körpers

$$= \frac{nma^3}{24}\cdot\frac{\left(\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{m}\right)^2\cdot\cos\frac{180^\circ}{p}}{\sqrt{-\cos\left(\frac{180^\circ}{p}+\frac{180^\circ}{m}\right)\cdot\cos\left(\frac{180^\circ}{p}-\frac{180^\circ}{m}\right)}}.$$

Weil aber p und m größer als 2 sein müssen, so sind $\frac{180^\circ}{p}$ und $\frac{180^\circ}{m}$ spitze Winkel; folglich ist $\cos\left(\frac{180^\circ}{p}-\frac{180^\circ}{m}\right)$ immer positiv. Soll also der vorstehende Ausdruck nicht imaginär werden, so muß nothwendig $\frac{180^\circ}{p}+\frac{180^\circ}{m}$ stumpf sein, oder:

$$\frac{180^\circ}{p}+\frac{180^\circ}{m} > 90^\circ, \text{ also}$$
$$2m + 2p > mp,$$

woraus (wie in §. 368.) das Weitere folgt.

Fünftes Kapitel.

Die beschreibende Geometrie.

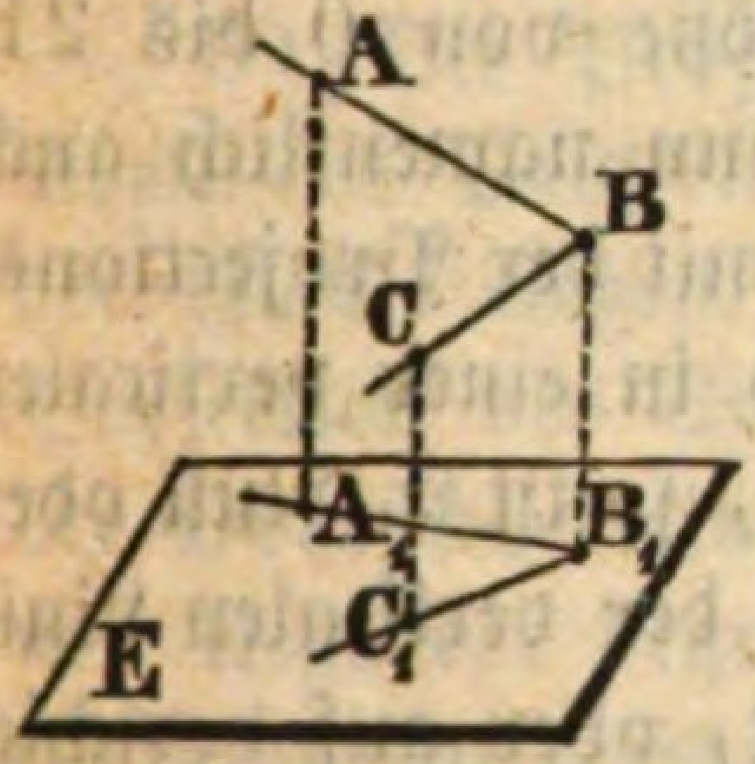
§. 372.

Erklärung.

Fällt man von einem Punkte A im Raume eine Senkrechte AA_1 auf eine beliebige Ebene E, so nennt man ihren Fußpunkt A_1 die **Projection** des Punktes A auf die Ebene E. Diese Ebene E heißt dann die **Projections-Ebene**, und die Linie AA_1 wird die (den Punkt A) **projicirende Linie** genannt, oder auch die **Ordinate** des Punktes A in Bezug auf die Ebene E.

Projicirt man die Endpunkte einer Linie AB im Raume auf eine Projections-Ebene E, und sind A_1 und B_1 die Projectionen der Endpunkte A und B, so heißt die Linie A_1B_1 die **Projection** der Linie AB auf die Ebene E. Die Ebene, welche man durch AB und

A_1B_1 legen kann, und welche nach §. 265. auf der Ebene E senkrecht steht, wird die (die Linie AB) projicirende Ebene genannt; in ihr liegen alle Linien, welche Punkte der Linie AB auf E projiciren, während ihre Fußpunkte in A_1B_1 fallen müssen (§. 266. Nr. 3. Anm.). — Das Gesagte gilt für jede gerade Linie, gleichviel, ob A und B auf derselben Seite, oder auf verschiedenen Seiten der Ebene E liegen; eben so, wenn einer dieser Punkte in E liegt.



Projicirt man die Schenkel eines Winkels ABC im Raume auf eine Ebene E, so nennt man den Winkel $A_1B_1C_1$, welchen die Projectionen in E mit einander bilden, die Projection des Winkels ABC auf die Ebene E. Zur Erzeugung dieser Projection hat man nur nöthig, den Scheitel des Winkels und einen Punkt jedes Schenkels auf E zu projiciren.

Projicirt man alle Seiten einer geradlinigen ebenen Figur F auf eine Ebene E, so bilden alle Projectionen zusammen die Projection des Umfanges der Figur F; die von ihnen eingeschlossene Ebene enthält die Projectionen aller Punkte der Figur F und wird die Projection der Figur F auf die Ebene E genannt.

Die Projection eines Körpers auf eine Ebene E ist der Theil von E, in welcher die Projectionen aller Punkte des Körpers liegen. Projicirt man alle Kanten eines von Ebenen begrenzten Körpers auf E, so erhält man die Projection des Körpers, welche zugleich Projection seiner Oberfläche ist.

§. 373.

Folgerungen.

1) Die Projection eines Punktes A auf eine Projectionsebene E ist wieder ein Punkt. Liegt A in E, so ist A seine eigene Projection.

2) Die Projection einer geraden Linie AB ist dann ein Punkt, wenn AB, nöthigenfalls verlängert, E senkrecht trifft. In allen andern Fällen ist diese Projection eine gerade Linie, und zwar ist sie gleich und parallel AB, wenn AB ⫲ E ist, hingegen kleiner als AB, wenn AB nicht parallel E ist. — Zum Beweise ziehe man in der projicirenden Ebene durch den einen Endpunkt von AB eine Parallele mit ihrer Projection und verlängere sie bis zu ihrem Durchschnittspunkt mit der den andern Endpunkt projicirenden Linie. Man erhält so ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem AB die Hypotenuse, eine Kathete aber der Projection von AB gleich ist.

3) Liegt ein Punkt A in einer Linie BC, so liegt die Projection A_1 dieses Punktes in der Projection B_1C_1 der Linie BC.

4) Sind beide Schenkel eines Winkels α mit der Projectionsebene parallel, so ist die Projection α_1 des Winkels α dem Winkel gleich; denn α und α_1 haben dann parallele Schenkel. In den andern Fällen hängt die Größe der Projection α_1 weniger von der Größe, als von der Lage des Winkels α ab. Ist α concav, so kann α_1 je nach der Lage des Winkels α jede beliebige Größe von 0 bis 2R haben; wenn α convex ist, von 2R bis 4R; es kann namentlich auch $\alpha_1 = \alpha$ sein, ohne daß die Ebene des Winkels α mit der Projectionsebene parallel ist. Denken wir uns α concav und in einer verticalen Ebene liegend, die Projectionsebene aber horizontal, so ist α_1 Null oder 2R, je nachdem beide Schenkel auf derselben Seite der verticalen Linie liegen, welche durch den Scheitel des Winkels geht, oder auf verschiedenen Seiten. In dem zweiten Falle können wir uns aber die Ebene des Winkels α um den einen Schenkel bewegt denken, bis sie eine halbe Umdrehung beschrieben hat, wo dann beide Schenkel wieder in der verticalen Ebene, aber auf derselben Seite der verticalen Linie liegen. Die Projection α_1 geht während dieser Bewegung, bei welcher der andere Schenkel von α einen halben Kegelmantel beschreibt, stetig aus 2R in 0 über, muß also auch einmal die Größe des Winkels α annehmen.

Auch die Figur in §. 372. kann dem Leser zur Erläuterung dienen. Der Winkel $A_1B_1C_1$ ist in dieser Figur die Projection des Winkels ABC auf die Ebene E; man kann aber die Lage der Schenkel des Winkels ABC beliebig ändern, also auch die Größe des Winkels, während $\measuredangle A_1B_1C_1$ immer seine Projection bleibt, wenn man nur den Scheitel in BB_1 und die Schenkel BA und BC resp. in den projicirenden Ebenen BAA_1B_1 und BCC_1B_1 und links von BB_1 liegen läßt. Legt man beide Schenkel nahe an BB_1, so weicht $\measuredangle ABC$ wenig von Null ab, und läßt man dann den einen Schenkel in dieser Lage, bewegt aber den andern Schenkel um B, bis er nahe an die Verlängerung der Linie BB_1 über B hinaus fällt, so wächst $\measuredangle ABC$ stetig bis nahe an 180°; er muß also während dieser Bewegung auch einmal dem Winkel $A_1B_1C_1$ gleich werden.

5) Die Projection eines ebenen n-Ecks ist im Allgemeinen wieder ein n-Eck; nur wenn seine Ebene senkrecht zur Projectionsebene liegt, wird die Projection eine gerade Linie.

§. 374.

Krumme Linien und Flächen.

1) Die Projection einer krummen Linie AB auf eine Ebene E wird erzeugt, wenn man jeden Punkt der AB auf E projicirt; die

Linie, in welcher die Projectionen aller Punkte liegen, ist die Projection der krummen Linie AB.

2) Ist die krumme Linie einfach gekrümmt (§. 2.), und steht die Ebene, in welcher sie liegt, auf der Projections-Ebene senkrecht, so ist die Projection der Linie eine gerade Linie; in allen andern Fällen, namentlich bei allen Linien von doppelter Krümmung, ist die Projection eine krumme Linie.

3) Die Projection einer begrenzten krummen Fläche ist der Theil der Projectionsebene, in welcher die Projectionen aller Punkte der Fläche liegen. Der Umfang der Projection ist nicht immer die Projection des Umfanges der Fläche. Wird z. B. der krumme Theil der Oberfläche einer Halbkugel auf eine horizontale Ebene projicirt, und liegt der begrenzende größte Kugelkreis (die Grundfläche) in einer horizontalen Ebene, so ist die Projection ein Kreis und jenem Kreise congruent; liegt aber die Grundfläche in einer verticalen Ebene, so ist die Projection ein Halbkreis.

4) Die Projection der von beliebigen Flächen begrenzten Oberfläche eines Körpers erhält man, wenn man alle begrenzenden Flächen projicirt; die Projection fällt mit der Projection des Körpers selbst zusammen, denn sie enthält die Projectionen aller Punkte des Körpers.

Beispiel. Wie groß ist der Theil der krummen Oberfläche einer Halbkugel, dessen Projection auf den begrenzenden größten Kugelkreis das in denselben eingeschriebene Quadrat ist?

Auflösung. Bei der Auflösung geht man zweckmäßig von dem Quadrate aus und denkt sich durch jede Seite desselben eine Ebene gelegt, welche auf dem Quadrat, also auf der Grundfläche der Halbkugel, senkrecht steht; zwischen diesen vier Ebenen liegt der gesuchte Theil der krummen Oberfläche. Weil aber jede dieser vier Ebenen von der krummen Oberfläche der Halbkugel eine halbe Kalotte abschneidet, welche die Differenz des großen und kleinen Radius des Quadrats zur Höhe hat, so folgt der gesuchte Inhalt F, wenn r den Radius der Halbkugel bezeichnet:

$$F = 2r^2\pi - 4 \cdot \frac{2r\pi(r - r\cos 45^\circ)}{2} \quad \text{oder}$$

$$F = 2r^2\pi(-1 + \sqrt{2}).$$

§. 375.

Erklärung.

Die Linie, in welcher eine ebene oder krumme Fläche F eine Projectionsebene E schneidet, heißt der Grundschnitt oder die Spur der Fläche F.

Ist die Fläche F eine Ebene, so ist der Grundschnitt eine gerade Linie; ist F eine krumme Fläche, so ist der Grundschnitt in den meisten Fällen eine krumme Linie; er kann aber auch eine gerade Linie sein, z. B. wenn eine cylindrische oder konische Fläche von der Projectionsebene in einer Seite geschnitten wird.

Auch der Punkt, in welcher eine gerade oder krumme Linie eine Projectionsebene schneidet, wird der Grundschnitt oder die Spur der Linie genannt.

Anmerkung. Liegt eine Linie a in einer Ebene F, so liegt die Spur der Linie a in der Spur der Ebene F (§. 248. Anmerk.)

§. 376.

Erklärung.

Die beschreibende Geometrie, welche ihre Entstehung und Entwicklung dem französischen Mathematiker Monge (lebte 1746 bis 1818) verdankt, hat den Zweck, Raumgrößen durch Construction in der Ebene zu bestimmen. Die Vermittlung zwischen den Raumgrößen und der Ebene bilden Projectionen und Grundschnitte; daher ist die Projectionslehre die Grundlage der beschreibenden Geometrie. Dem angegebenen Zwecke gemäß lehrt die beschreibende Geometrie einerseits, die wahre Größe und Lage von Gegenständen im Raume aus gegebenen Projectionen und Grundschnitten durch Construction zu bestimmen, andrerseits, Projectionen und Grundschnitte so zu zeichnen, daß sie Raumgrößen entsprechen, welche ihrer Lage und Größe nach gegeben sind. In dem vorliegenden Kapitel sollen in Verbindung mit der Projectionslehre nur die einfachsten elementaren Constructionen der beschreibenden Geometrie gelehrt werden.

Zum Verständniß des Folgenden möge der Leser sich die in den nächsten beiden §§. angegebene Bezeichnung fest einprägen.

§. 377.

Beziehung der Raumgrößen auf zwei Projectionsebenen.

Wir denken uns zwei Projectionsebenen, eine horizontale, welche wir mit E_1 bezeichnen und die erste oder horizontale Projectionsebene nennen, und eine verticale, also auf E_1 senkrechte, welche mit E_2 bezeichnet werden und die zweite oder verticale Projectionsebene heißen soll. Die Durchschnittslinie beider Projectionsebenen nennen wir die Projectionsaxe und bezeichnen sie mit E_0.

Bezeichnet A einen Punkt im Raume, so soll seine Projection auf E_1 mit A_1 bezeichnet und seine erste oder seine Horizontal-Projection genannt werden; seine Projection auf E_2 werden wir

mit A_2 bezeichnen und seine zweite oder seine Vertical-Projection nennen. Die Linie AA_1 soll die horizontal-projicirende, AA_2 die vertical-projicirende Linie heißen; beide Linien nennt man auch die Coordinaten des Punktes A.

Aehnlich bezeichnen wir die Projectionen von Linien, Winkeln, Ebenen u. s. w. auf beide Projectionsebenen. Bezeichnet AB oder a eine Linie, ABC oder α einen Winkel, F eine Ebene u. s. w., so sind resp. A_1B_1 oder a_1, $A_1B_1C_1$ oder α_1, F_1 u. s. w. die Horizontal-Projectionen, aber A_2B_2 oder a_2, $A_2B_2C_2$ oder α_2, F_2 u. s. w. die Vertical-Projectionen dieser Größen. Die Horizontal-Projection heißt auch der Grundriß, die Vertical-Projection der Aufriß. — Projicirende Ebenen sind horizontal- oder vertical-projicirende, je nachdem sie auf der horizontalen oder verticalen Projectionsebene senkrecht stehen.

In den beiden Projectionsebenen führen wir alle Constructionen aus und denken uns zu diesem Zwecke die horizontale Projectionsebene so um ihre Axe gedreht, bis sie neben der verticalen Projectionsebene mit ihr in einer Ebene liegt. Da man aber jede Projectionsebene über ihre Axe verbreitet sich denken muß, so fällt bei dieser Lage der vordere Theil der horizontalen Projectionsebene mit dem unteren Theil der verticalen zusammen, und eben so der hintere Theil der horizontalen Projectionsebene mit dem oberen Theil der verticalen.

Die Lage, welche die beiden Projectionsebenen ursprünglich, also im Raume, haben, soll ihre normale Lage heißen, während wir die Lage, wenn beide Ebenen neben einander in eine Ebene gelegt sind, ihre flache Lage nennen wollen.

In Bezug auf die Lage, welche Projectionen bei flacher Lage der Projectionsebenen annehmen, ist die Lage der Projectionen eines Punktes hervorzuheben.

Projicirt man einen Punkt A im Raume auf beide Projectionsebenen (Fig. 1.) und legt durch die projicirenden Linien AA_1 und AA_2 eine Ebene, welche die Projectionsaxe E_0 in A_0 schneiden mag, so sind A_1A_0 und A_2A_0 die Durchschnittslinien dieser Ebene mit den Projectionsebenen. Die Figur $AA_1A_0A_2$ ist ein Rechteck und steht auf der Projectionsaxe senkrecht (vergl. den Beweis zu §. 267. Nr. 2.), woraus folgt:

Fig. 1.

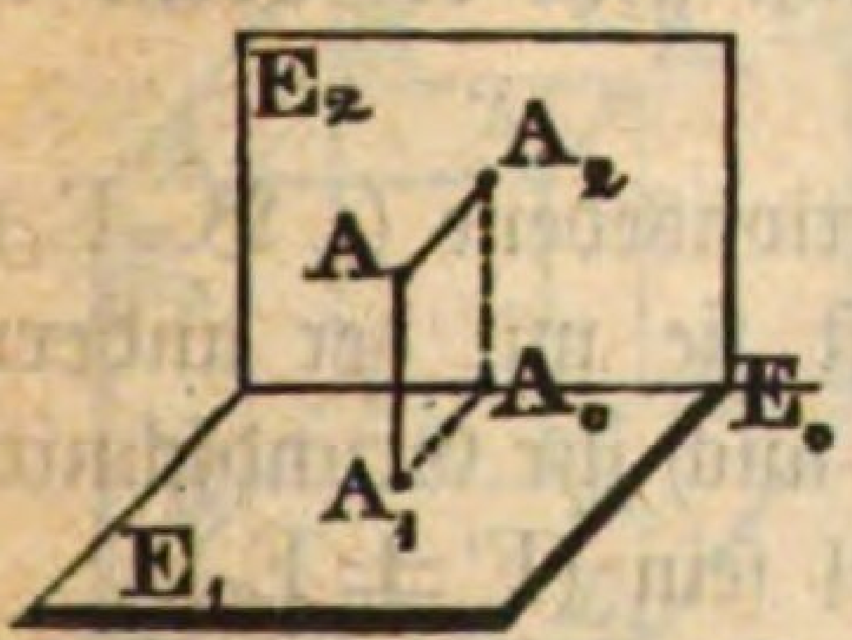
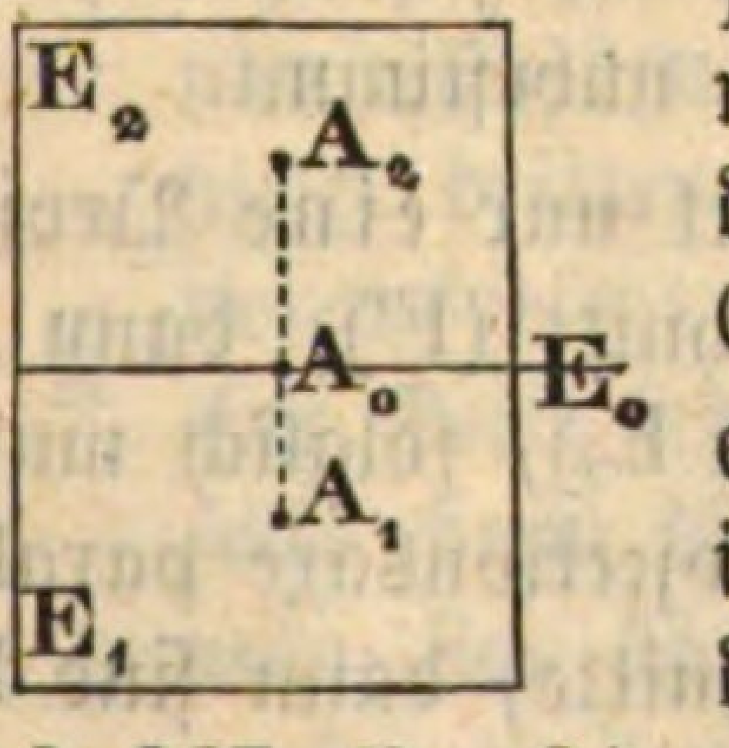


Fig. 2.



$$(1.)\quad A_2A_0 = AA_1 \quad \text{und} \quad A_1A_0 = AA_2$$
$$(2.)\quad A_2A_0 \perp E \quad \text{und} \quad A_1A_0 \perp E.$$

Bringt man nun die Projectionsebenen in ihre flache Lage (Fig. 2.), so behalten A_1A_0 und A_2A_0 ihre relative Lage zur Projectionsaxe E_0; folglich wird $A_1A_0A_2$ eine gerade Linie. Hieraus folgt also für die flache Lage der Projectionsebenen:

die Verbindungslinie der beiden Projectionen eines Punktes schneidet die Projectionsaxe senkrecht.

Den Durchschnittspunkt dieser Linie mit der Projectionsaxe werden wir immer durch den Index 0 markiren. Sind also P_1 und P_2 die Projectionen des Punktes P, so schneidet P_1P_2 die Projectionsaxe in P_0. — Es ist ferner hervorzuheben, daß die Fig. 2. auch die projicirenden Linien in ihrer wahren Länge enthält; denn es ist A_2A_0 der horizontal-projicirenden und A_1A_0 der vertical projirenden Linie gleich.

Anmerkung 1. Ist nur eine Projection eines Punktes A gegeben (etwa A_1), so ist die Richtung der von dieser Projection (A_1) auf die Projectionsaxe gefällten Senkrechten ein geometrischer Ort der andern Projection (A_2).

Anmerkung 2. Liegt ein Punkt in einer Projectionsebene, so liegt seine Projection auf die andere Projectionsebene in der Axe E_0, und umgekehrt liegt ein Punkt in einer Projectionsebene, wenn seine Projection auf die andere Projectionsebene in der Axe E_0 liegt.

§. 378.

Die Grundschnitte einer Ebene.

Die gerade Linie, in welcher eine Ebene F die horizontale Projectionsebene E_1 schneidet, nennen wir ihren horizontalen Grundschnitt (Horizontal-Spur) und bezeichnen diesen Schnitt mit F'; der Grundschnitt der Ebene F mit der verticalen Projectionsebene wird ihr verticaler Grundschnitt (Vertical-Spur) genannt und soll mit F'' bezeichnet werden. Schneidet F die Projectionsaxe E_0, so soll der Durchschnittspunkt mit F° bezeichnet werden.

Die verschiedenen Lagen, welche die Grundschnitte einer Ebene F haben können, ergeben sich aus §. 249. und sind folgende:

1) F' und F'' fallen mit E_0 zusammen; dann geht die Ebene F durch E_0; sonst ist ihre Lage unbestimmt.

2) Die Ebene F schneidet nur eine Projectionsebene (z. B. E_1), hat also nur einen Grundschnitt (F'); dann ist sie mit der andern Projectionsebene parallel (mit E_2), folglich muß auch ihr Grundschnitt nach §. 249. II. mit der Projectionsaxe parallel sein ($F' \mathrel{\#} E_0$).

3) F hat beide Grundschnitte; dann sind F, E_1 und E_2 drei sich schneidende Ebenen, daher können ihre drei Durchschnittslinien nur

entweder alle drei parallel sein, oder es müssen alle drei sich in einem Punkt schneiden. Man hat also eine der beiden Lagen:

a) $F' \nparallel F'' \nparallel E_0$, oder

b) F', F'' und E_0 schneiden sich in F°.

Ist F eine krumme Fläche, so können ihre beiden Grundschnitte gerade und krumm sein, sie müssen aber beide, wenn F die Projectionsaxe schneidet, durch F° gehen. Es gilt dies für jeden Durchschnittspunkt, wenn F die Axe mehr als einmal schneidet.

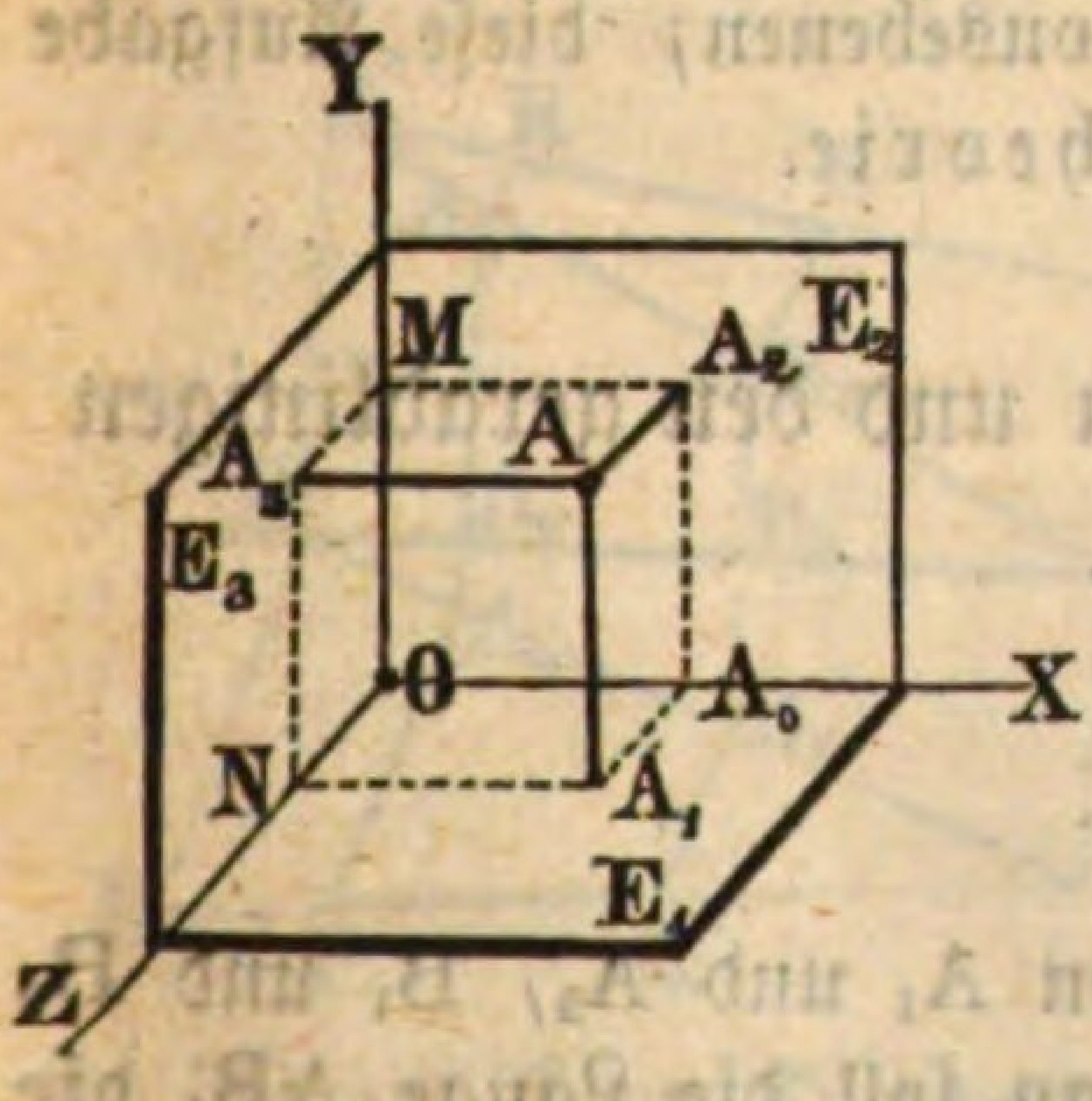
Mit Ausnahme des in 1) angegebenen Falles ist die Lage jeder Ebene durch ihre Grundschnitte vollkommen bestimmt.

Die Grundschnitte einer Linie a bezeichnen wir entsprechend mit a' und a''.

§. 379.

Die dritte Projectionsebene.

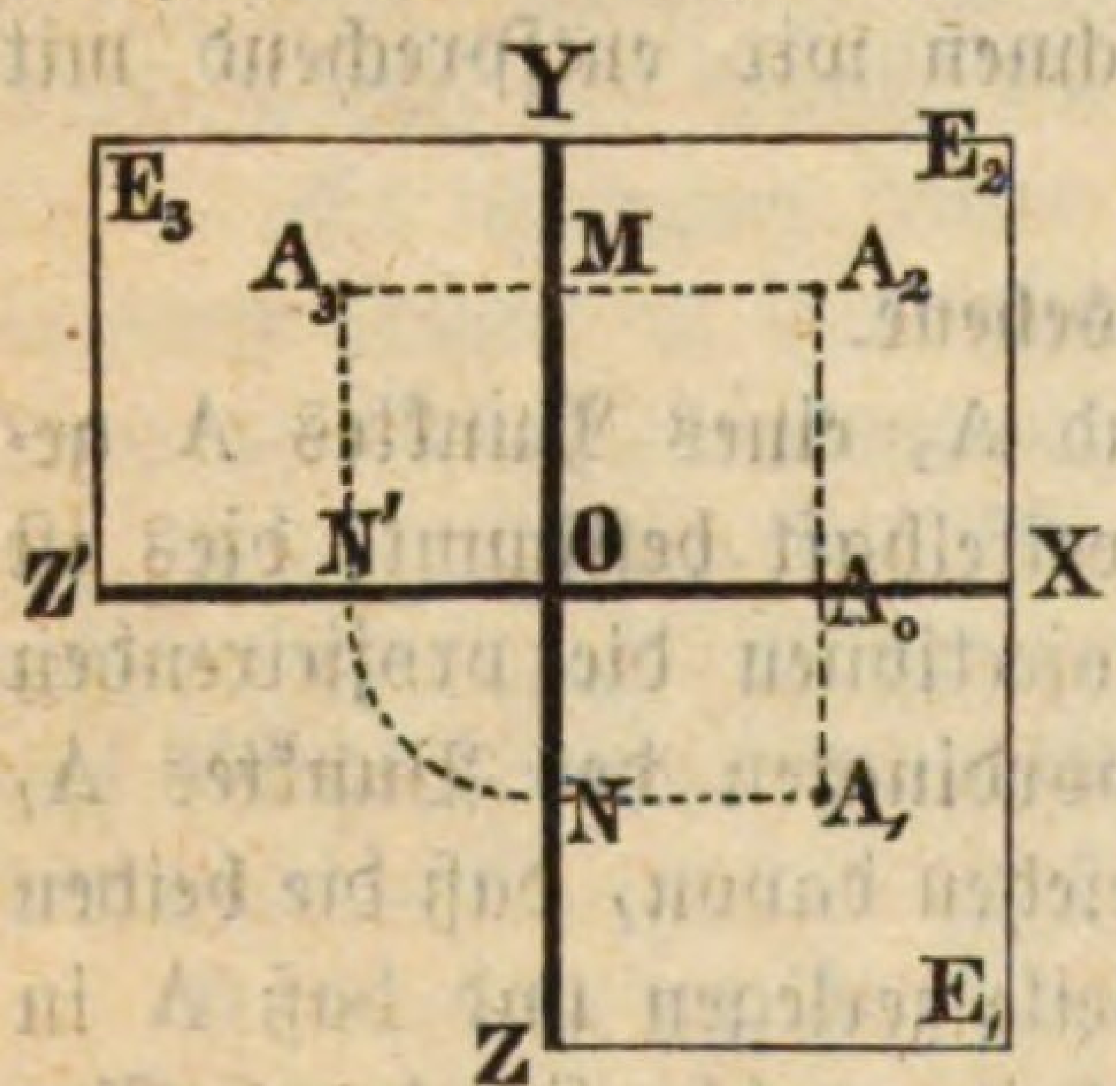
Sind die beiden Projectionen A_1 und A_2 eines Punktes A gegeben, so ist hierdurch der Punkt A unzweifelhaft bestimmt; dies ist aber nicht der Fall, wenn statt der Projectionen die projicirenden Linien AA_1 und AA_2, also die beiden Coordinaten des Punktes A, ihrer Länge nach gegeben sind. Denn abgesehen davon, daß die beiden Projectionsebenen den Raum in vier Theile zerlegen und daß A in jedem Theile liegen kann, eine Unbestimmtheit, welche sich durch Einführung positiver und negativer Coordinatenwerthe beseitigen läßt, so ist auch A in einem dieser Theile nicht bestimmt, weil alle Punkte einer mit der Axe E_0 parallelen Linie von jeder Projectionsebene gleich weit entfernt sind. Die Coordinaten AA_1 und AA_2 bestimmen daher nur eine solche mit E_0 parallele Linie, nämlich die Durchschnittslinie zweier Ebenen, von denen die eine mit E_1 parallel ist und von ihr den Abstand AA_1 hat, während die andere mit E_2 parallel ist und in der Entfernung AA_2 von E_2 liegt. Soll nun ein Punkt A dieser Linie bestimmt werden, so dient hierzu eine **dritte Projectionsebene** E_3, welche man senkrecht auf E_0, also auch senkrecht auf E_1 und E_2, wählt. Diese drei Projectionsebenen schneiden sich in drei



auf einander senkrechten Axen OX, OY und OZ, von denen OX die bisher durch E_0 bezeichnete Projectionsaxe ist. Giebt man nun noch den Abstand des Punktes A von dieser dritten Ebene E_3, so ist A bestimmt, vorausgesetzt daß man weiß, auf welcher Seite jeder Projectionsebene A liegen soll; denn die Projectionsebenen, welche man sich über die Axen verbreitet denken muß, theilen den Raum in acht Theile,

und in jedem derselben kann A liegen. Projicirt man nun A auf E_3 und bezeichnet A_3 die Projection, so ist die projicirende Linie AA_3 der Abstand des Punktes A von E_3, und durch die drei Coordinaten AA_1, AA_2 und AA_3 ist A bestimmt. Legt man durch je zwei dieser Coordinaten eine Ebene, so erscheint A als Ecke eines rechtwinkligen Parallelepipedons, dessen gegenüberliegende Ecke der Durchschnittspunkt O der drei Axen ist.

Aus dem Gesagten geht nun hervor, daß in der beschreibenden Geometrie, in welcher man Raumgrößen aus Projectionen construiren will, die dritte Projectionsebene im Allgemeinen nicht gebraucht wird; in einzelnen Fällen aber, die später folgen, ist sie nöthig, in anderen ihr Gebrauch bequem. Wenn man sie benutzt, so denkt man sich dieselbe um die Axe OY so weit herumgedreht, bis sie neben E_2 und mit E_2 in eine Ebene fällt. Bei flacher Lage liegen dann alle drei Projectionsebenen in der Ebene des Papieres, und A_2MA_3 ist eine gerade Linie und steht auf der Axe OY senkrecht,



welche E_2 von E_3 trennt. Der Punkt N in der vorhergehenden Figur erscheint jetzt zweimal (N und N'); daher ist $ON' = ON$.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, wie man die dritte Projection A_3 eines Punktes A zeichnet, wenn die beiden Projectionen A_1 und A_2 gegeben sind; es ist

$$N'A_3 = A_0A_2 \text{ und } MA_3 = A_0A_1.$$

Man fällt $A_2M \perp OY$ und macht die Verlängerung $MA_3 = A_0A_1$. — Daß $MA_3 = A_0A_1$ und $N'A_3 = A_0A_2$ ist, folgt aus der vorhergehenden Figur. Diese Linien sind einander gleich als gegenüberliegende Kanten eines Parallelepipedons.

Sollen Raumgrößen aus Coordinaten berechnet werden, dann braucht man alle drei Projectionsebenen; diese Aufgabe ist aber Gegenstand der Coordinaten-Theorie.

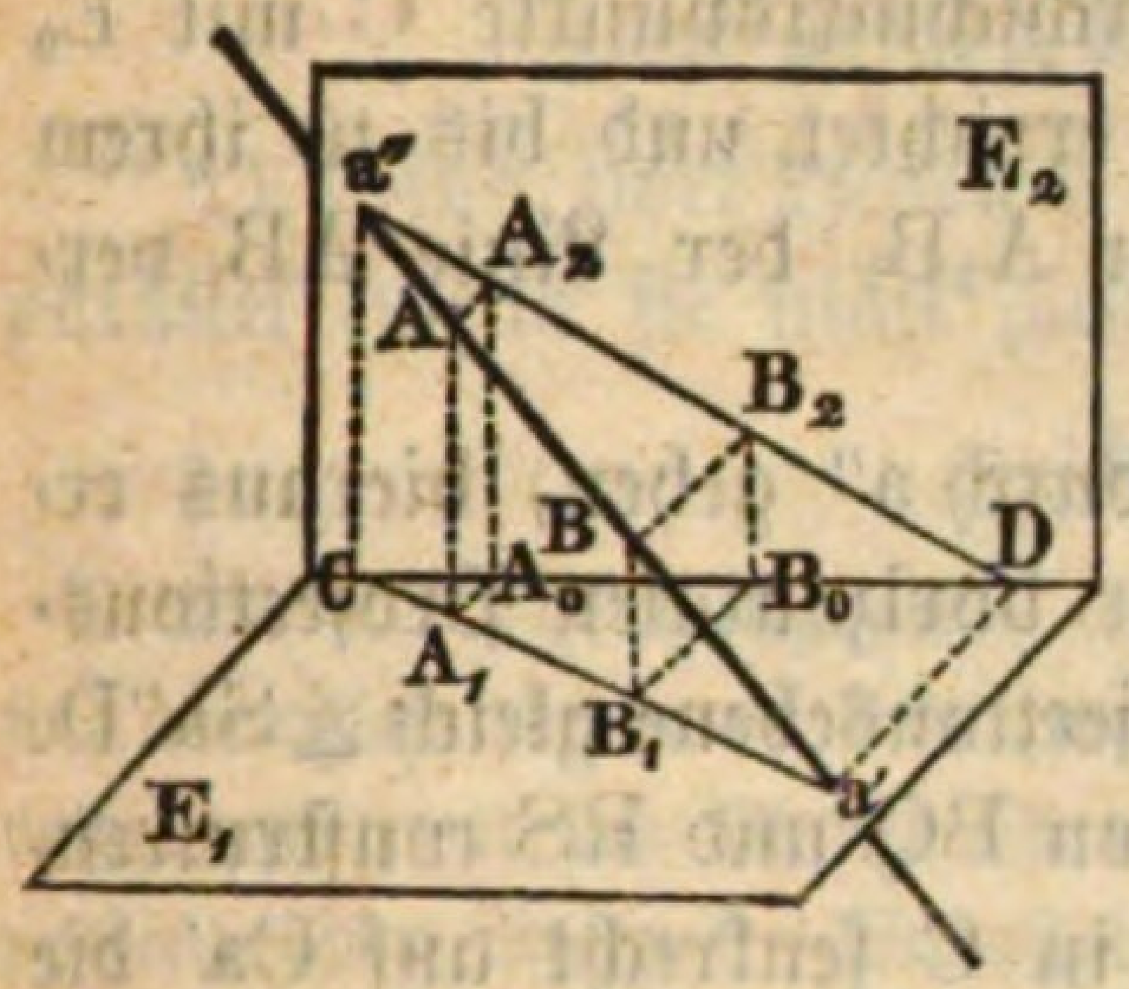
Von den geraden Linien, den Winkeln und den geradlinigen ebenen Figuren.

§. 380.

Aufgabe.

Eine Linie a ist durch die Projectionen A_1 und A_2, B_1 und B_2 zweier ihrer Punkte A und B gegeben; man soll die Länge AB, die

Grundschnitte a' und a'' der Linie a und die Winkel construiren, welche die Linie mit den beiden Projectionsebenen bildet.

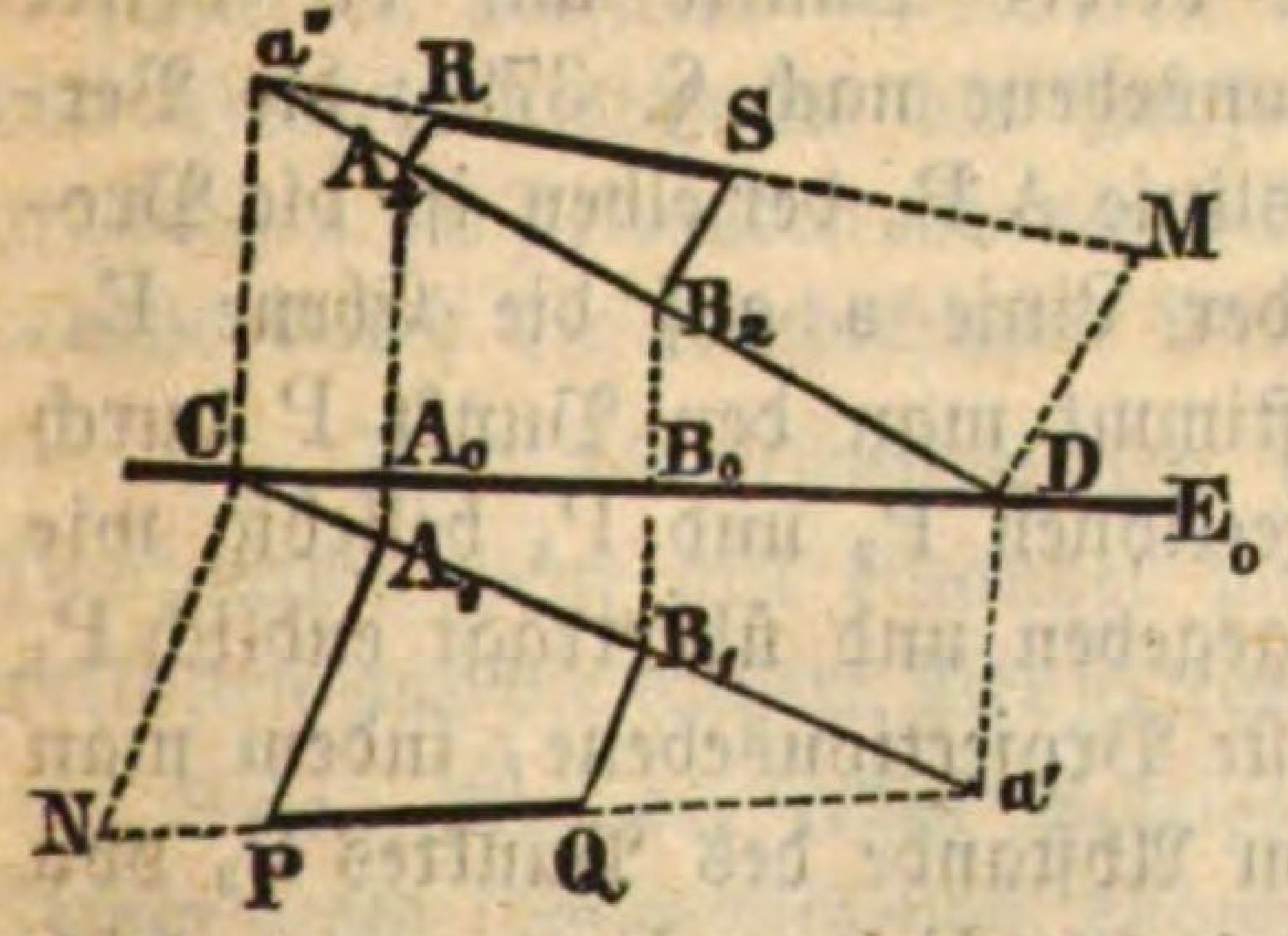


Analysis. AB läßt sich aus dem Paralleltrapez ABB_1A_1 construiren; denn man kennt A_1B_1, die rechten Winkel bei A_1 und B_1 und die projicirenden Linien AA_1 und BB_1, welche den Abständen der Projectionen A_2 und B_2 von der Projectionsaxe gleich sind. — Auf dieselbe Weise kann man AB aus dem Paralleltrapez ABB_2A_2 zeichnen.

Um den Grundschnitt a' zu finden, urtheilt man so: es liegt a' in E_1; folglich ist a' seine eigene horizontale Projection, also auch ein Punkt der horizontalen Projection von a, während die verticale Projection von a' in der verticalen Projection der Linie a und in der Projectionsaxe (§. 377. Anm. 2.) liegen, also der Durchschnittspunkt D beider Linien sein muß. Eben so liegt a'' in der verticalen Projection der Linie a, und die horizontale Projection von a'' ist der Durchschnittspunkt C der horizontalen Projection von a mit der Projectionsaxe.

Sind aber a' und a'' construirt, so findet man leicht die Neigungswinkel der Linie a mit E_1 und E_2. Diese Winkel sind a''a'C und a'a''D, und sie sind aus den rechtwinkligen Dreiecken a''a'C und a'a''D zu construiren, etwa in der Lage, welche entsteht, wenn man diese Dreiecke um a'C und a''D herumlegt, bis sie resp. in die horizontale und verticale Projectionsebene fallen. Uebrigens sind diese Winkel auch in den Paralleltrapezen ABB_1A_1 und ABB_2A_2 zu construiren, wenn man durch B mit B_1A_1 und durch A mit A_2B_2 eine Parallele zieht.

Construction. 1) Man errichte senkrecht auf A_1B_1 in A_1 und B_1 Perpendikel, mache $A_1P = A_0A_2$ und $B_1Q = B_0B_2$ und ziehe PQ, so ist PQ der gesuchten Linie AB gleich. Oder: man errichte senkrecht auf A_2B_2 in A_2 und B_2 Perpendikel, mache $A_2R = A_0A_1$ und $B_2S = B_0B_1$, so ist RS der gesuchten Linie AB gleich.



2) Um die Grundschnitte der Linie a zu finden, verlängere man A_2B_2, bis sie in D die Projectionsaxe schneidet, errichte in D auf diese Axe eine Senkrechte und verlängere sie bis zu ihrem Durchschnittspunkt mit der verlängerten Horizontal-

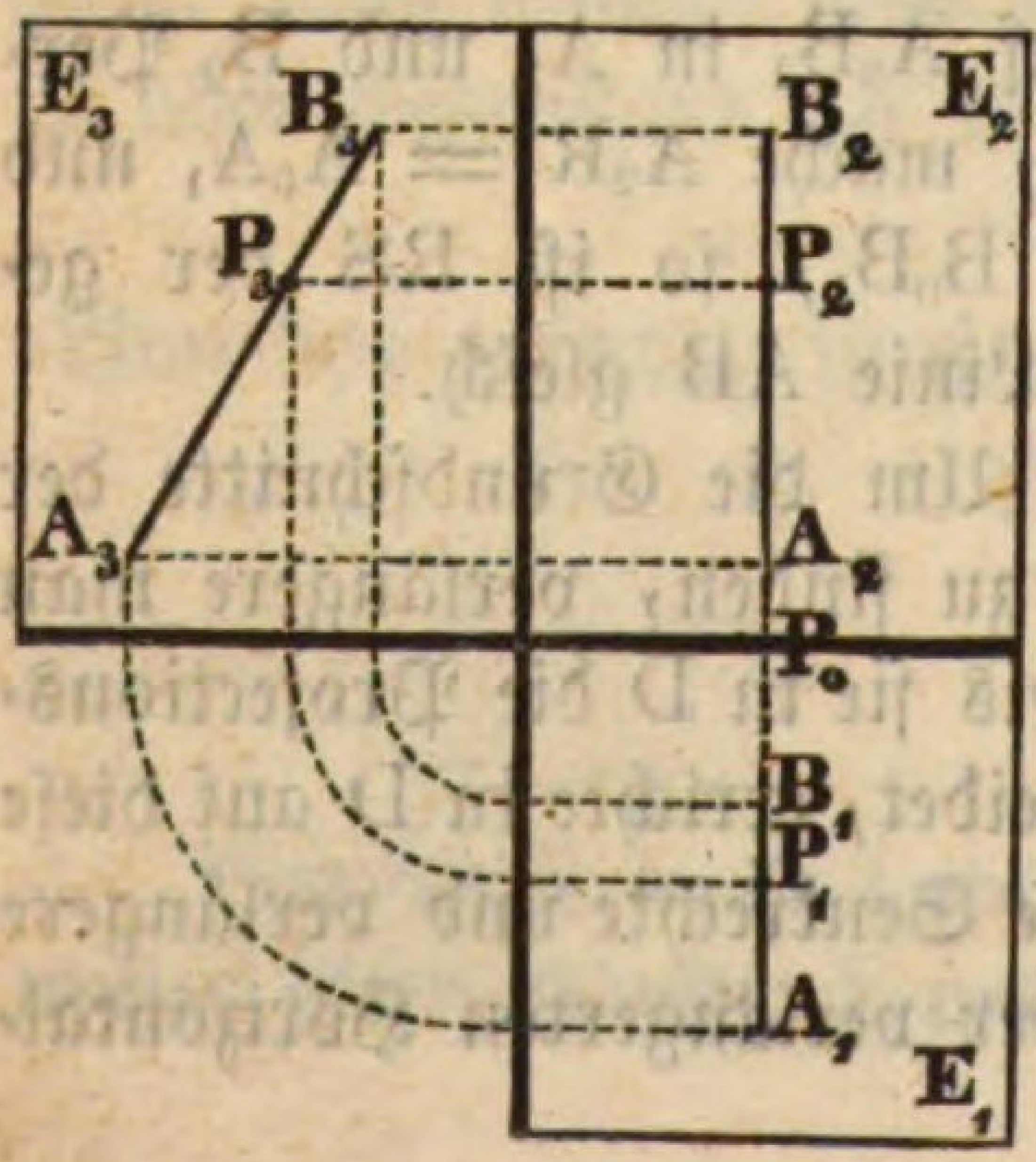
Projection A_1B_1 der Linie AB; dieser Durchschnittspunkt ist der horizontale Grundschnitt a' der Linie a. Den verticalen a'' findet man analog, wenn man A_1B_1 bis zu ihrem Durchschnittspunkte C mit E_0 verlängert und in C auf E_0 eine Senkrechte errichtet und bis zu ihrem Durchschnitt mit der verticalen Projection A_2B_2 der Linie AB verlängert; der Durchschnittspunkt ist a''.

3) PQ muß verlängert durch a', RS durch a'' gehen; hieraus ergiebt sich der Neigungswinkel der Linie a zur horizontalen Projectionsebene gleich $\measuredangle$ Pa'C, und zur verticalen Projectionsebene gleich $\measuredangle$ Sa''D. Will man aber diese Winkel unabhängig von PQ und RS construiren, so suche man zunächst a' und a'', errichte in C senkrecht auf Ca' die Linie CN, mache sie gleich Ca'' und ziehe Na'; ferner errichte man in D senkrecht auf Da'' die Linie DM, mache sie gleich Da' und ziehe Ma''. Die Winkel Na'C und Ma''D sind dann die gesuchten; Na' und Ma'' fallen resp. mit PQ und RS zusammen.

Anmerkung 1. Ist die Linie a mit einer Projectionsebene parallel, so hat sie nur einen Grundschnitt, den man auf die oben angegebene Art findet. Diese Lage der Linie a geht aus ihren gegebenen Projectionen hervor; die eine Projection ist dann mit der Projectionsaxe parallel.

Anmerkung 2. Sind die Projectionen einer Linie a gegeben, und will man die Projectionen eines beliebigen Punktes P dieser Linie zeichnen, so schneide man die Axe an einer beliebigen Stelle senkrecht durch eine Linie. Die Durchschnittspunkte dieser Linie mit den Projectionen von a sind P_1 und P_2.

Diese Construction ist nicht ausführbar, wenn die Projectionen der Linie a auf der Projectionsaxe senkrecht stehen, wenn also a in einer Ebene liegt, welche die Axe senkrecht schneidet. In diesem Falle muß man die dritte Projectionsebene E_3 zur Construction benutzen. Aus den Projectionen zweier Punkte A und B der Linie a auf E_1 und E_2 (solche zwei Punkte müssen durch ihre Projectionen gegeben sein, wenn die Lage der Linie nicht unbestimmt sein soll) construirt man die Projectionen beider Punkte auf die dritte Projectionsebene nach §. 379.; die Verbindungslinie A_3B_3 derselben ist die Projection der Linie a auf die Ebene E_3. Jetzt bestimmt man den Punkt P durch die Projectionen P_2 und P_3 beliebig wie oben angegeben und überträgt endlich P_3 in die erste Projectionsebene, indem man P_0P_1 dem Abstande des Punktes P_3 von der Axe, welche E_2 von E_3 trennt, gleich macht.



§. 381.
Zwei gerade Linien und ihre Projectionen.

1) Sind zwei Linien a und b parallel, so sind ihre Projectionen parallel (wenn sie nicht ganz in einander fallen), d. h. es ist

$$a_1 \nparallel b_1 \text{ und } a_2 \nparallel b_2.$$

Bew. Die horizontal- und dann auch die vertical-projicirenden Ebenen sind parallel; denn es sind zwei sich schneidende Linien in der einen Ebene parallel mit zwei sich schneidenden Linien in der andern (a und b und ein Paar projicirender Linien). Parallele Ebenen werden aber von einer dritten Ebene in parallelen Durchschnittslinien geschnitten.

2) Ist $a_1 \nparallel b_1$ und zugleich auch $a_2 \nparallel b_2$, so muß $a \nparallel b$ sein.

Bew. Die beiden horizontal projicirenden Ebenen sind mit einander parallel (§. 268. Nr. 3.), und ebenso die vertical projicirenden Ebenen; hieraus folgt unmittelbar $a \nparallel b$ nach §. 269. Nr. 15.

3) Schneiden sich zwei Linien a und b im Punkte P, so müssen sich a_1 und b_1 in P_1 schneiden, und a_2 und b_2 in P_2, so daß also bei flacher Lage der Projectionsebenen die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte P_1 und P_2 auch die Projectionsaxe senkrecht schneiden muß. — Nur wenn die durch a und b gehende Ebene auf einer Projectionsebene senkrecht steht, fallen die Projectionen auf diese Ebene in eine Linie zusammen.

Bew. P ist ein Punkt beider Linien, folglich muß die Projection von P ein Punkt der Projectionen beider Linien sein.

4) Sind a und b windschief, so schneiden sich im Allgemeinen a_1 und b_1, so wie a_2 und b_2. Geschieht dies resp. in N und M, so kann bei flacher Lage der Projectionsebenen NM die Axe nicht senkrecht schneiden, weil in diesem Falle N und M Projectionen desselben Punktes im Raume wären, woraus folgen würde, daß sich a und b schneiden müßten. — Nur in dem Falle können in einer von beiden Projectionsebenen die Projectionen parallel sein, wenn die zugehörigen projicirenden Ebenen das eine Paar paralleler Ebenen bilden, welche durch die windschiefen Linien a und b gelegt werden können.

5) Sind die Projectionen zweier Linien a und b auf die eine Projectionsebene mit einander parallel, schneiden sich aber ihre Projectionen auf die andere Projectionsebene: so sind a und b windschief.

Bew. Aus der ersten Bedingung folgt, daß die Linien in parallelen Ebenen liegen (den projicirenden Ebenen), aus der zweiten indirect, daß sie nicht parallel sind (Nr. 1.).

6) Schneiden sich sowohl die horizontalen, als auch die verticalen Projectionen zweier Linien a und b, etwa a_1 und b_1 in N und a_2 und b_2 in M, so hat man zwei Fälle zu unterscheiden:

α) schneidet bei flacher Lage der Projectionsebenen die Linie NM die Projectionsaxe schief, so sind a und b windschief (folgt indirect aus Nr. 1. und 3.);

β) schneidet NM die Projectionsaxe senkrecht, so schneiden sich a und b in einem Punkte dessen Projectionen N und M sind.

§. 382.

Aufgaben.

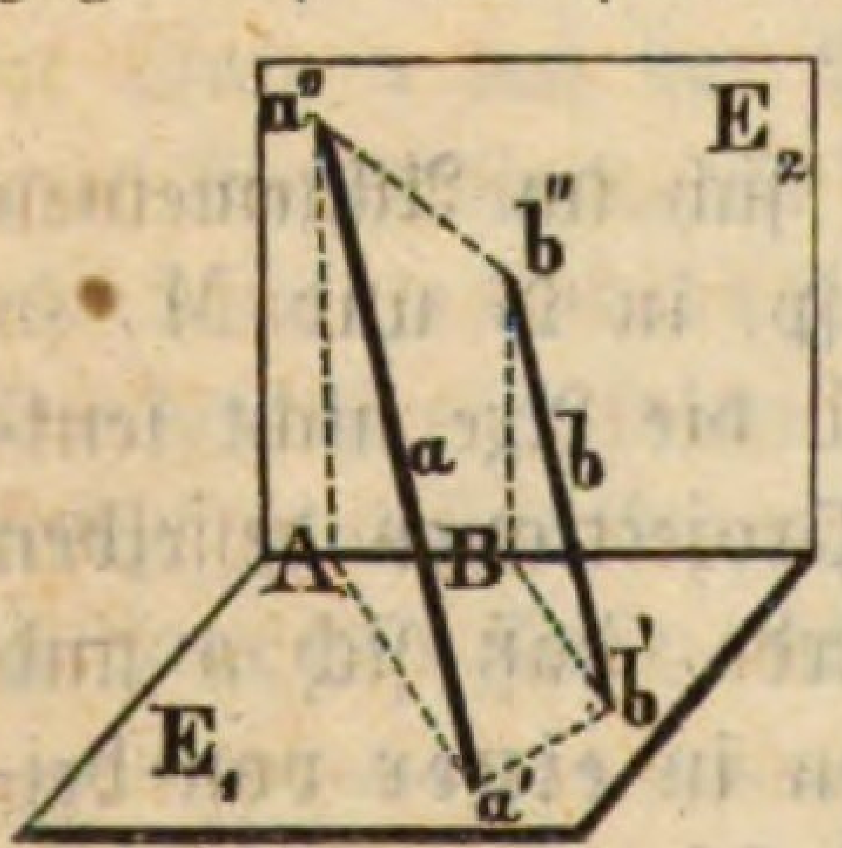
1) Eine Linie a und ein Punkt P sind durch ihre Projectionen gegeben; man soll durch P eine Linie legen, welche a schneidet.

Aufl. Man schneide die Axe E_0 an beliebiger Stelle senkrecht durch eine Linie, welche a_1 in Q_1 und a_2 in Q_2 schneiden mag, und ziehe P_1Q_1 und P_2Q_2; diese Linien sind dann die Projectionen einer Linie, welche durch P geht und die Linie a (in Q) schneidet.

2) Eine Linie a und ein Punkt P sind durch ihre Projectionen gegeben; man soll durch P eine mit a parallele Linie legen.

Auflösung. Zieht man durch P_1 eine Parallele mit a_1 und durch P_2 eine Parallele mit a_2, so sind diese Parallelen die Projectionen der gesuchten Linie.

3) Zwei parallele Linien a und b sind durch ihre Projectionen gegeben, man soll den Abstand dieser Linien von einander construiren.



Auflösung. Man construire zunächst die Grundschnitte der Linien a und b, dann aber das Paralleltrapez a'b'b''a'' aus seinen vier Seiten (§. 178. Aufg. 10.). Die Seiten a'a'' und b'b'' kann man aus den rechtwinkligen Dreiecken a'Aa'' und b'Bb'' zeichnen, in welchen die Katheten a''A und b''B die Linien sind, welche a'' und b'' horizontal projiciren. Der gesuchte Abstand ist die Höhe des Paralleltrapezes.

4) Eine Linie a und ein Punkt P sind durch ihre Projectionen gegeben; man soll die Länge des Abstandes des Punktes P von der Linie a finden.

Auflösung. Man lege durch P eine mit a parallele Linie (Nr. 2.), so ist die Aufgabe auf Nr. 3. zurückgeführt; denn der Abstand beider Parallelen von einander ist der Entfernung des Punktes P von der Linie a gleich.

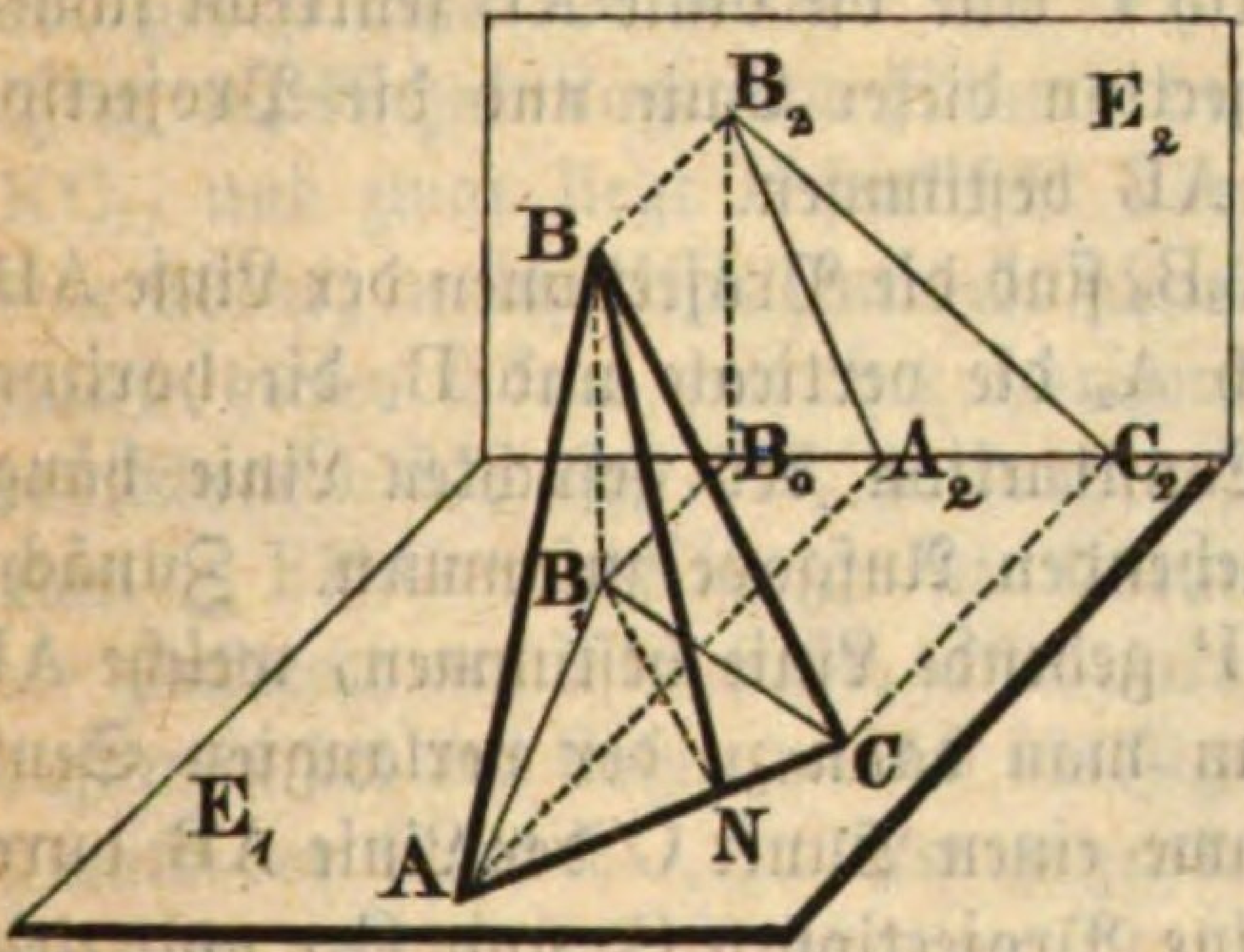
§. 383.

Aufgabe.

Zwei sich schneidende Linien a und b sind durch ihre Projectionen gegeben; man soll den Winkel α construiren, unter welchem sie sich schneiden. (Einen Winkel aus seinen Projectionen zu construiren.)

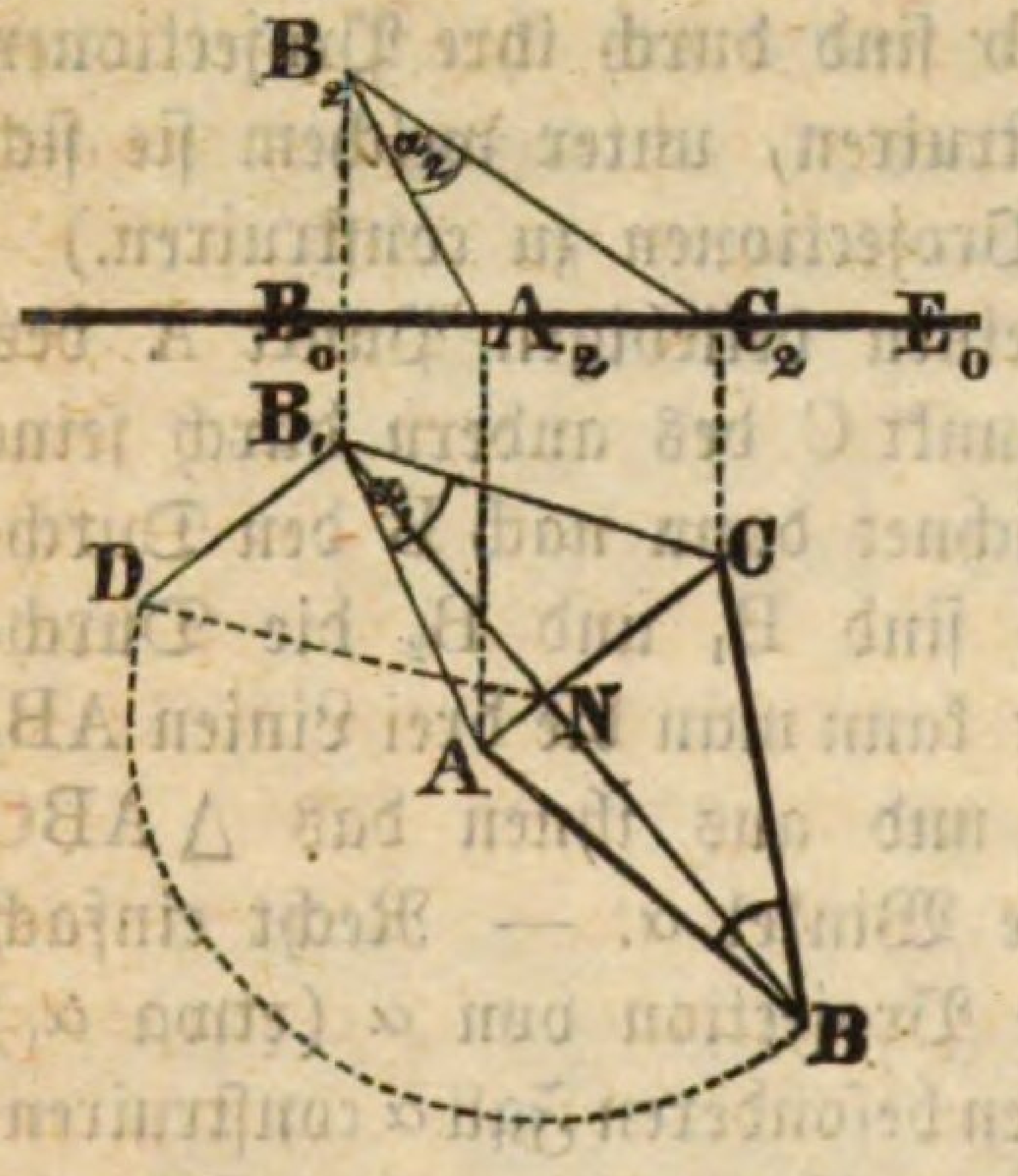
Auflösung 1. Man bestimme einen beliebigen Punkt A des einen Schenkels und einen beliebigen Punkt C des andern durch seine Projectionen (§. 380. Anmerk. 2.); bezeichnet dann nach B den Durchschnittspunkt der Linien a und b, so sind B_1 und B_2 die Durchschnittspunkte ihrer Projectionen; daher kann man die drei Linien AB, BC und AC nach §. 380. construiren und aus ihnen das Δ ABC zusammensetzen; $\measuredangle$ ABC ist der gesuchte Winkel α: — Recht einfach wird diese Construction, wenn die eine Projection von α (etwa α_1) gleich Null ist; der Leser möge auch für diesen besonderen Fall α construiren.

Auflösung 2. Durch die gegebenen Projectionen der Schenkel des Winkels α sind die Spuren dieser Schenkel als bekannt anzusehen. Wir wollen uns daher die Schenkel bis zu ihren Durchschnittspunkten mit der horizontalen Projectionsebene verlängert denken, und $\measuredangle$ ABC sei bei normaler Lage der Projectionsebenen der Winkel α. Ferner sei $BB_1 \perp E_1$ und $BB_2 \perp E_2$, auch B_1B_0, AA_2 und CC_2 senkrecht auf die Projectionsaxe gefällt. Es ist dann $\measuredangle AB_1C = \alpha_1$ die horizontale und $\measuredangle A_2B_2C_2 = \alpha_2$ die verticale Projection des Winkels α.



Die Construction des Winkels α erfolgt nun aus dem ΔABC. Man kennt zunächst die Seite AC ihrer Größe und Lage nach, dann aber auch die zugehörige Höhe und den Fußpunkt dieser Höhe; denn fällt man $B_1N \perp AC$ und zieht BN, so ist auch $BN \perp AC$, also die Höhe des ΔABC zur Grundlinie AC. Diese Höhe ist aber aus dem rechtwinkligen $\Delta\ BB_1N$ construirbar, denn B_1N ist unmittelbar zu zeichnen, BB_1 aber ist gleich B_2B_0; der Punkt N ergiebt sich bei der Construction der Linie B_1N. Um das Δ ABC zu construiren, denke man sich dasselbe um AC nach vorn herumgedreht und in die Ebene E_1 gelegt; NB fällt dann in die Verlängerung von B_1N, weil beide Linien auf AC senkrecht stehen und NB bei dieser Bewegung seine relative Lage zu AC nicht ändert, sich also in einer Ebene bewegt, welche AC in N senkrecht schneidet (vergl. §. 253. II.). Hieraus ergiebt sich nachstehende Construction:

Man verlängere die Schenkel der Projection α_2 bis zur Projectionsaxe, errichte in ihren Durchschnittspunkten A_2 und C_2 mit dieser Axe Perpendikel auf E_0 und verlängere sie bis zu ihren Durchschnittspunkten A und C mit den correspondirenden Schenkeln des Winkels α_1. Dann ziehe man AC, fälle $B_1N \perp AC$ und verlängere B_1N über N hinaus; ferner errichte man $B_1D \perp B_1N$, mache $B_1D = B_0B_2$ und ziehe die Hypotenuse ND. Macht man endlich die Verlängerung der Linie B_1N, nämlich NB, gleich ND und verbindet B mit A und C: so ist $\measuredangle$ ABC der verlangte Winkel α.

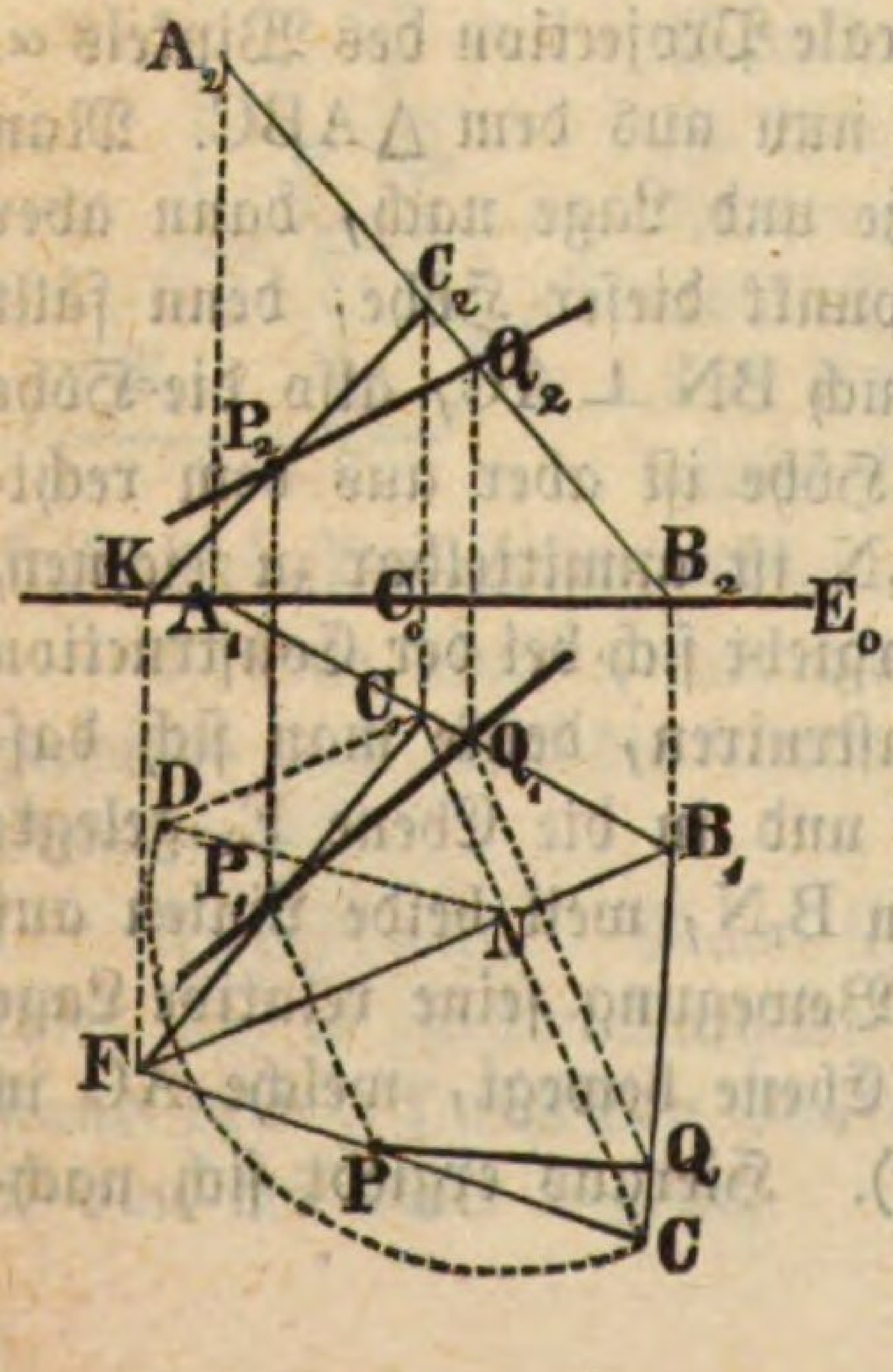


§. 384.

Aufgabe.

Eine gerade Linie AB und ein Punkt P sind durch ihre Projectionen gegeben; man soll durch P eine die Linie AB senkrecht schneidende Linie legen und die Projection dieser Linie und die Projection ihres Durchschnittspunktes mit AB bestimmen.

Auflösung. A_1B_1 und A_2B_2 sind die Projectionen der Linie AB; nach der Zeichnung ist zugleich A_2 die verticale und B_1 die horizontale Spur dieser Linie. Die Construction der gesuchten Linie hängt mit der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe zusammen. Zunächst kann man eine beliebige durch P gehende Linie bestimmen, welche AB schneidet; von dieser Linie kann man dann zu der verlangten Senkrechten übergehen. Man bestimme einen Punkt C der Linie AB durch seine Projectionen C_1 und C_2, und ziehe P_1C_1 und P_2C_2, so sind diese Linien die Projectionen einer durch P gehenden Linie PC, welche AB in C schneidet. Construirt man jetzt die horizontale Spur F der Linie PC und zieht FB_1, so kann man den Winkel im Raume, dessen Projectionen $\measuredangle\, FC_1B_1$ und $\measuredangle\, KC_2B_2$ sind, construiren, indem man sich die Ebene dieses Winkels um FB_1 gedreht und in die Ebene E_1 gelegt denkt. Man fällt $C_1N \perp FB_1$, errichtet $C_1D \perp C_1N$, macht $C_1D = C_0C_2$ und verbindet N mit D. Macht man endlich die Verlängerung von C_1N, nämlich NC, gleich ND und zieht



FC und B_1C, so ist $\measuredangle FCB_1$ der Winkel, unter welchem AB und PC sich schneiden. — Um die weitere Construction zu verstehen, muß man nun Folgendes beachten: Alle Linien, welche den Punkt P im Raume mit einem Punkte der Linie AB verbinden, liegen in derselben Ebene, also in der Ebene des ΔFB_1C, wenn man bei normaler Lage der Projectionsebenen dieses ΔABC wieder durch eine drehende Bewegung um FB_1 in seine eigentliche Lage im Raume zurückgelegt sich denkt, so daß also der Punkt C senkrecht über C_1 fällt. Die Linie FC liegt dann senkrecht über FC_1, und B_1C senkrecht über B_1C_1; B_1C aber ist ein Theil der Linie AB. In dieser Ebene des ΔFB_1C liegt nun auch die gesuchte Senkrechte, welche man von P auf AB fällen soll, und wenn man nur den Punkt P selbst construiren kann, so läßt sich diese Senkrechte unmittelbar zeichnen, und zwar im ΔFB_1C bei der Lage, welche dieses Dreieck in der Figur hat; denn die Seiten dieses Dreiecks haben ihre relative Lage zu einander dadurch nicht geändert, daß man das Dreieck in die horizontale Projectionsebene legte. Der Punkt P liegt aber in FC, denn die horizontale Projection von FC (wenn man sich diese Linie in ihrer wirklichen Lage im Raume denkt) ist FC_1, und die verticale KC_2, und zwar liegt P senkrecht über P_1. Legt man nun durch PP_1 eine Ebene, welche FB_1 senkrecht schneidet, so stehen die Durchschnittslinien dieser Ebene mit der horizontalen Projectionsebene und mit der Ebene FB_1C auf FB_1 senkrecht; folglich fallen diese Linien, wenn man ΔFB_1C um FB_1 in die Ebene E_1 legt, in eine gerade Linie, die senkrecht auf FB_1 steht, also parallel mit C_1C ist. Hieraus folgt, daß man bei der Lage, welche die Figur zeigt, sehr einfach von jedem Punkt der Linie FC_1 zu dem zugehörigen Punkt der Linie FC, von welchem ersterer die Projection ist, übergehen kann, und umgekehrt von jedem Punkt der Linie FC zu seiner Projection in FC_1: man zieht durch den Punkt eine Parallele mit C_1C. Dasselbe gilt von zusammengehörigen Punkten der Linien B_1C_1 in B_1C.

Aus dem Gesagten folgt nun die weitere Construction. Zieht man durch P_1 eine Parallele mit C_1C, welche FC in P schneidet, und fällt von P eine Senkrechte PQ auf B_1C, so ist diese die gesuchte Senkrechte. Um Q durch seine Projectionen zu bestimmen, ziehe man durch Q eine Parallele mit CC_1, welche B_1C_1 in Q_1 schneidet; ferner fälle man von Q_1 eine Senkrechte auf die Projectionsaxe E_0 und verlängere sie bis zu ihrem Durchschnittspunkte Q_2 mit A_2B_2; Q_1 und Q_2 sind dann die Projectionen des Fußpunktes (Q) der auf AB senkrechten Linie PQ. Zieht man noch P_1Q_1 und P_2Q_2, so hat man in diesen Linien die Projectionen der Linie PQ.

Anmerkung. Soll man durch P eine Linie legen, welche AB nicht senkrecht, sondern unter einem gegebenen Winkel α schneidet, so bleibt die Construction mit der einzigen Abweichung ganz unverändert, daß man PQ nicht senkrecht auf B_1C fällt, sondern sie so legt, daß sie mit B_1C den Winkel α einschließt.

§. 385.

Aufgabe.

Die Projectionen einer geradlinigen ebenen Figur sind gegeben; man soll die Figur construiren.

Auflösung. Man kann alle Seiten und Winkel der Figur nach den vorigen §§. construiren, und aus ihnen die Figur zusammensetzen; statt der Winkel kann man auch die Diagonalen der Figur benutzen.

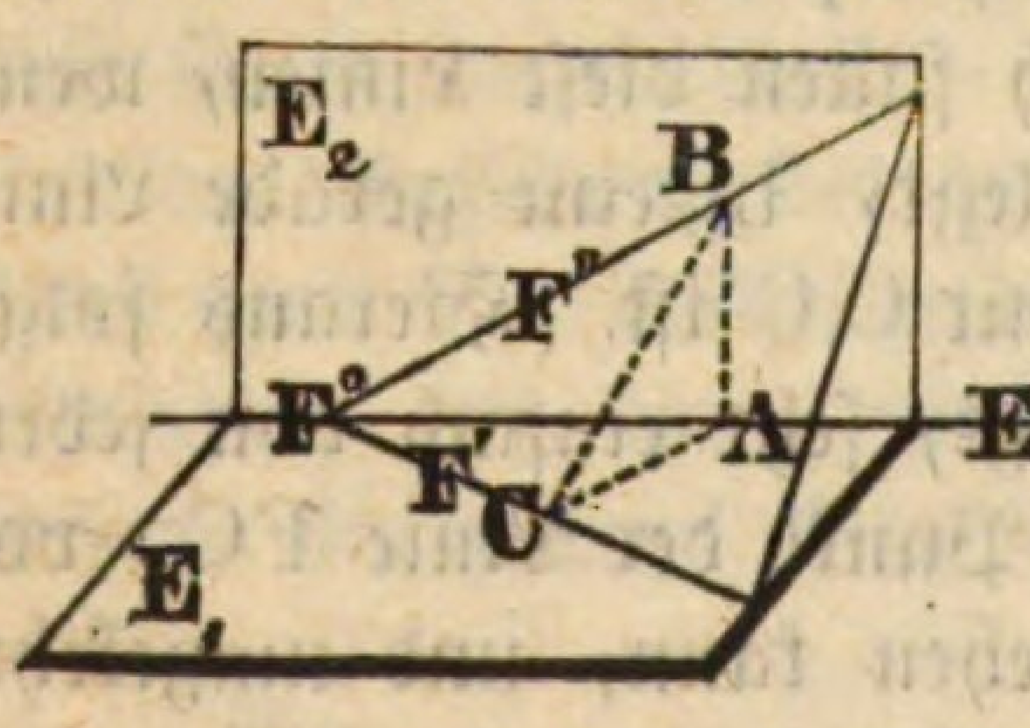
Von den unbegrenzten Ebenen.

§. 386.

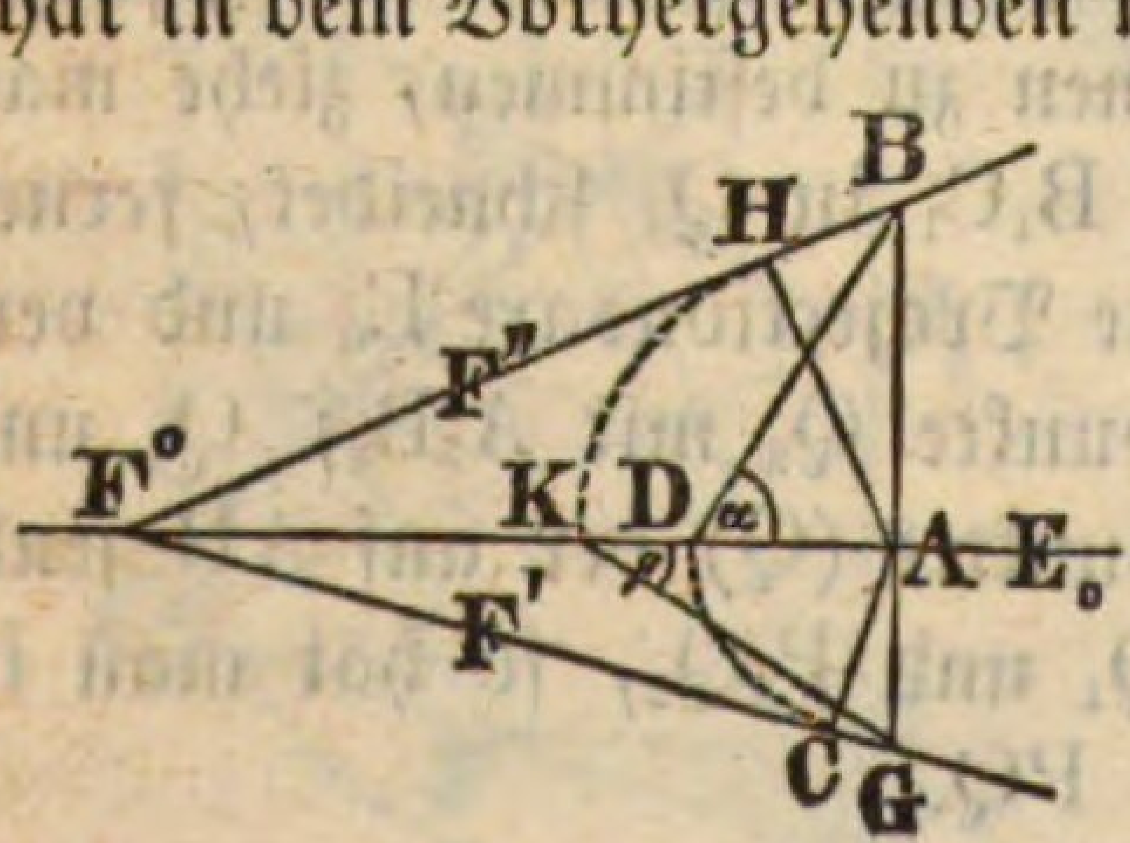
Aufgabe.

Eine Ebene F ist durch ihre Spuren (Grundschnitte) F′ und F″ gegeben; man soll die Winkel α und β zeichnen, welche sie mit den Projectionsebenen E_1 und E_2 bildet.

Auflösung. Errichtet man in der Ebene E_2 in einem beliebigen Punkte A der Projectionsaxe E_0 eine Senkrechte auf E_0 und verlängert sie bis zu ihrem Durchschnittspunkte B mit der Vertical-Spur F″, fällt man dann von A noch eine Senkrechte AC auf die Horizontal-Spur F′ und verbindet B mit C: so steht $BC \perp F'$ und $\measuredangle ACB$ ist der Neigungswinkel α der Ebene F zur horizontalen Projectionsebene. Die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks BAC sind aber bei flacher Lage der Projectionsebenen leicht zu construiren; aus ihnen ist das Dreieck zu zeichnen, welches den Neigungswinkel α enthält. — Den Neigungswinkel β der Ebene F gegen die verticale Projectionsebene findet man analog; man hat in dem Vorhergehenden nur E_1 mit E_2 und F′ mit F″ zu vertauschen.



Construction. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt A der Axe E_0 eine auf E_0 senkrechte Linie, welche F″ und F′ resp. in B und G schneidet, fälle $AC \perp F'$ und $AH \perp F''$, mache $AD = AC$ und $AK = AH$, ziehe BD und GK: so ist $\measuredangle BDA = \alpha$ und $\measuredangle GKA = \beta$.



Anmerkung. Sind die Grundschnitte F' und F'' parallel E_0, so fällt AC mit AG und AH mit AB zusammen, und das rechtwinklige Dreieck BAD enthält dann beide Winkel α und β, welche in diesem Falle Complemente sind. Bei normaler Lage der Projectionsebenen steht dann ΔBAC auf der Projectionsaxe senkrecht; weil nun auch die dritte Projectionsebene E_3 auf E_0 senkrecht steht, so ist dieses Dreieck in der Projectionsebene E_3 unmittelbar vorhanden, sobald der Grundschnitt F''' der Ebene F in E_3 construirt ist. Verlängert man aber F' und F'' bis zu der Axe, welche resp. E_1 und E_2 von E_3 trennt, so hat man zwei Punkte der Spur F'''; nur muß man noch bei flacher Lage der Projectionsebenen den einen Punkt aus der Axe OZ in OZ' übertragen. Die zweite Figur im nächsten §. zeigt die Construction; es ist $\measuredangle$ BCO $= \alpha$ und $\measuredangle$ CBO $= \beta$.

Stehen beide Grundschnitte auf E_0 senkrecht, so sind beide Neigungswinkel rechte Winkel; steht nur der eine Grundschnitt (z. B. der horizontale) auf E_0 senkrecht, der andere nicht, so ist der eine Neigungswinkel gleich 90° (der, welchen F mit der verticalen Projectionsebene bildet), den anderen enthält die Figur unmittelbar (er ist der Winkel, welchen F'' mit E_0 bildet).

§. 387.

Lage des Punktes und der Linie zu einer Ebene.

I. Um zu untersuchen, ob ein durch seine Projectionen gegebener Punkt P in einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene F liegt, wollen wir von der Annahme ausgehen, P läge in F. Wir unterscheiden folgende Fälle:

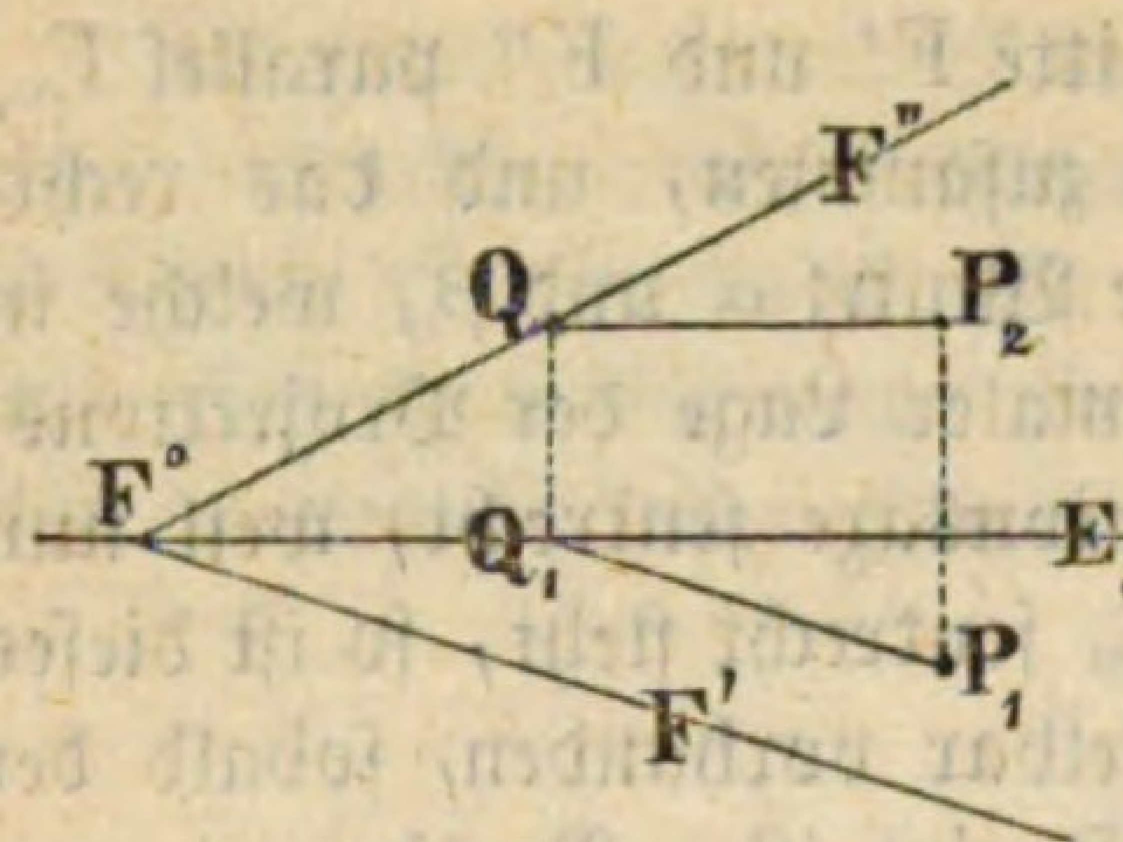
a) Wenn F die Projectionsaxe schief schneidet.

Denkt man sich dann durch P in der Ebene F eine mit der Horizontal-Spur F' parallele Linie PQ gelegt, so ist PQ $\ddagger$ E_1 und es muß

1) die horizontale Projection $P_1Q_1 \ddagger$ F' (§. 257. Nr. 2.) und

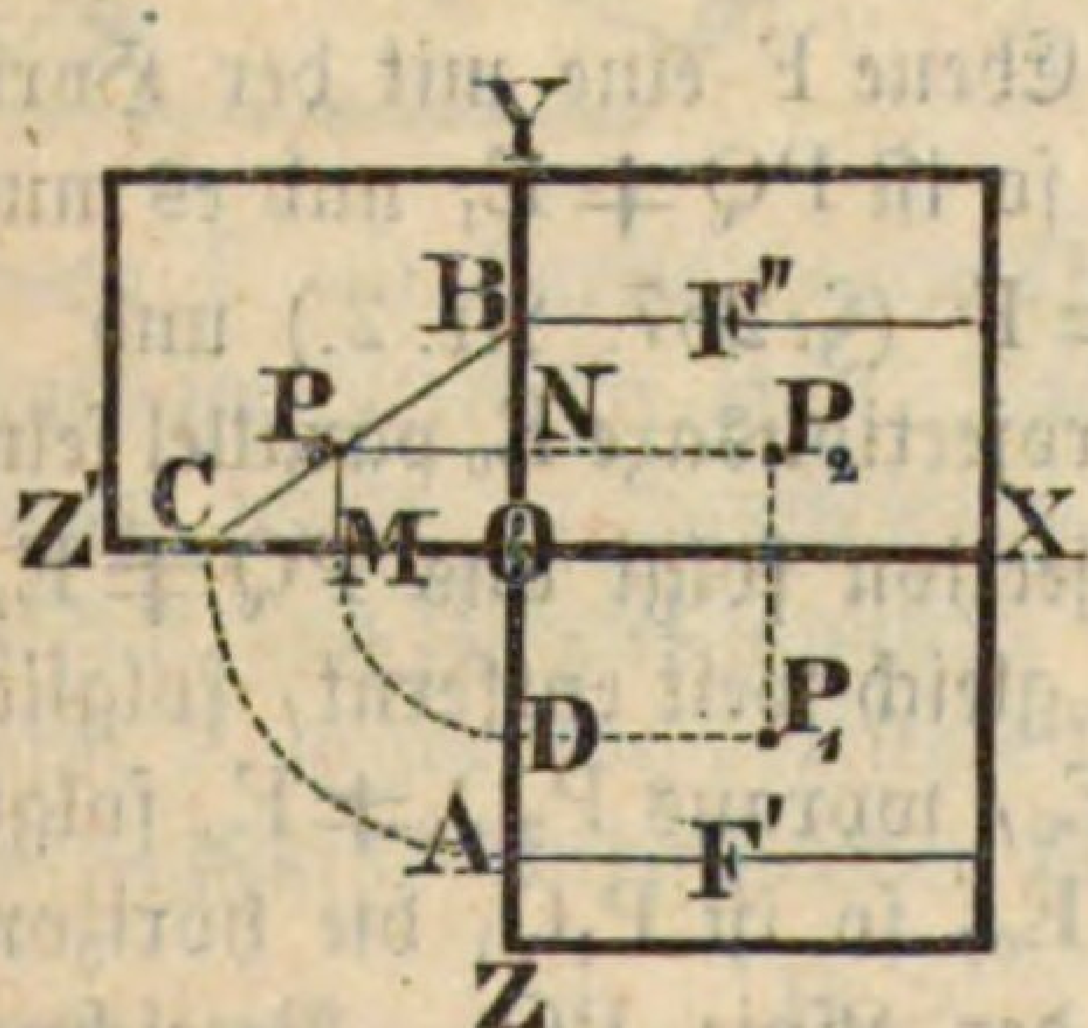
2) die verticale Projection P_2Q_2 der Projectionsaxe E_0 parallel sein.

Diese Eigenschaft der verticalen Projection folgt aus PQ $\ddagger$ E_1; es sind alle Punkte der Linie PQ von E_1 gleich weit entfernt, folglich auch alle Punkte der Projection P_2Q_2 von E_0, woraus $P_2Q_2 \ddagger E_0$ folgt. Zieht man also $P_1Q_1 \ddagger$ F' und $P_2Q_2 \ddagger E_0$, so ist P_1Q_1 die horizontale und P_2Q_2 die verticale Projection der Linie PQ. Bezeichnet nun Q den Durchschnittspunkt der Linie PQ mit der verticalen Projectionsebene, so muß Q in F'' liegen und seine eigne verticale Projection sein, also mit Q_2 zusammenfallen, und die horizontale Projection von Q muß in E_0 fallen, also der Durchschnittspunkt Q_1 der horizontalen Projection P_1Q_1 mit E_0 sein. Hieraus folgt:



Um zu untersuchen, ob ein durch seine Projectionen P_1 und P_2 gegebener Punkt P in einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene F liegt, ziehe man durch P_1 eine Parallele mit F' und verlängere sie bis zu ihrem Durchschnittspunkte Q_1 mit der Projectionsaxe E_0; dann ziehe man durch P_2 eine Parallele mit der Projectionsaxe E_0 und verlängere sie, bis sie F'' in Q schneidet. Steht QQ_1 senkrecht auf E_0, so liegt P in F, sonst nicht.

b) Ist die Ebene F der Projectionsaxe parallel, in welchem Falle auch die Spuren von F parallel E_0 sind, und wird wieder angenommen, P läge in F, so schneide man bei normaler Lage der Projectionsebenen die ganze Figur durch eine Ebene, welche durch P geht und auf der Projectionsaxe senkrecht steht. Diese Ebene erzeugt mit F, E_1 und E_2 Durchschnittslinien, welche ein rechtwinkliges Dreieck bilden, das bei flacher Lage der Projectionsebenen aus seinen Katheten leicht zu construiren ist. In der Hypotenuse liegt P, und das Rechteck $PP_1P_0P_2$ ist ein in dieses Dreieck eingeschriebenes Rechteck. Zur Construction dieses Rechtecks hat man P_1, P_0 und P_2, und fällt P in die Hypotenuse, so liegt P in F. Da die dritte Projectionsebene aber die Axe E_0 senkrecht schneidet, so erzeugt sie ein jenem Dreieck congruentes Dreieck, und in demselben ergiebt sich ein dem Rechteck $PP_1P_0P_2$ congruentes, wenn man sich alle Ecken des letzteren auf E_3 projicirt denkt. Mit Benutzung der dritten Projectionsebene hat man daher folgende Construction: Man verlängere die Spuren F' und F'', bis



sie die Axen OZ und OY in A und B schneiden, und übertrage A in die Axe OZ', indem man OC = OA macht; BC ist dann der Grundschnitt der Ebene F in der dritten Projectionsebene. Construirt man ferner aus P_1 und P_2 die dritte Projection P_3 (durch das Rechteck $NOMP_3$), so liegt P in F, wenn die dritte Projection P_3 in die dritte Spur BC fällt, sonst nicht.

c) Steht die Ebene F auf einer Projectionsebene senkrecht, z. B. auf E_1, so liegt P in F, wenn P_1 in F' liegt; die Lage von P_2 ist beliebig, nur muß natürlich P_1P_2 bei flacher Lage der Projectionsebenen auf der Projectionsaxe E_0 senkrecht stehen.

II. Ist eine Ebene F durch ihre Grundschnitte gegeben, und will man einen Punkt P durch seine Projectionen bestimmen, der in F liegt, so hat man nur die oben angegebenen Constructionen in einer andern Folge auszuführen. Wir wollen nur den Fall berücksichtigen, wenn F die Axe E_0 schief schneidet; die übrigen Fälle mögen dem Leser überlassen bleiben. Man wähle in F″ einen beliebigen Punkt Q, ziehe $QP_2 \nparallel E_0$, fälle $QQ_1 \perp E_0$ und ziehe $Q_1P_1 \nparallel F'$. In QP_2 und Q_1P_1 bestimme man nun zwei zusammengehörige Punkte P_2 und P_1 (so daß also $P_2P_1 \perp E_0$ ist), dann sind P_2 und P_1 die Projectionen eines Punktes P, der in F liegt. — Ist in einer Projectionsebene ein Punkt gegeben, z. B. in E_1 der Punkt P_1, und will man den Theil der in P_1 auf E_1 errichteten Senkrechten construiren, welcher zwischen E_1 und F liegt, so ergiebt sich die Construction auch leicht aus der Figur in I. a); Q_1Q ist die gesuchte Länge.

III. Soll untersucht werden, ob eine durch ihre Projectionen gegebene Linie in F liegt, so untersuche man, ob zwei beliebige Punkte derselben in F liegen. — Soll eine Linie durch ihre Projectionen bestimmt werden, die in F liegt, so construire man zwei Punkte durch ihre Projectionen, die in F liegen, und verbinde die horizontalen Projectionen und dann auch die verticalen durch gerade Linien; diese sind die Projectionen der verlangten Linie.

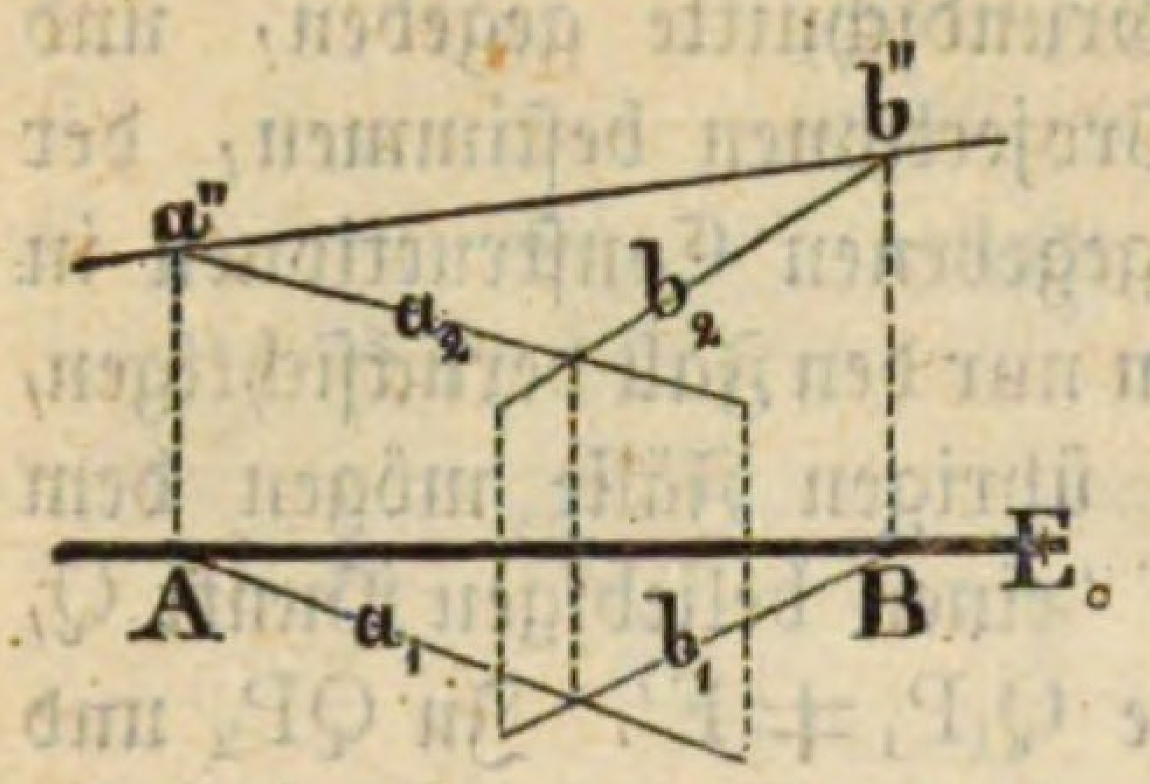
IV. Soll untersucht werden, ob eine durch ihre Projectionen gegebene Linie PQ der Ebene F parallel ist, oder nicht, so bestimme man einen Punkt A, der in F liegt, durch seine Projectionen, und ziehe durch A eine mit PQ parallele Linie AB (man ziehe $A_1B_1 \nparallel P_1Q_1$ und $A_2B_2 \nparallel P_2Q_2$); liegt AB in F, so ist $PQ \nparallel F$ (§. 257. Nr. 1.), sonst nicht. — Ist ein Punkt P gegeben, der nicht in F liegt, und soll man durch P eine Linie PQ legen, die parallel F ist, so bestimme man eine Linie AB, die in F liegt, und construire dann PQ (durch ihre Projectionen) parallel AB. — Soll aber PQ die Ebene F schneiden, so braucht man nur P mit einem Punkt A der Ebene F zu verbinden, wobei natürlich die Construction wieder durch die Projectionen ausgeführt wird.

§. 388.

Construction der Ebene aus Linien und Punkten.

1) Zwei sich schneidende oder parallele Linien a und b sind gegeben; man soll die Ebene F (durch ihre Spuren) construiren, welche durch a und b geht.

Auflösung. Liegt eine Linie in einer Ebene, so liegt jede Spur der Linie in der entsprechenden Spur der Ebene. Construirt man also die Spuren von a und b, so ist a′b′ die horizontale und a″b″



die verticale Spur der Ebene F. — Die Figur zeigt nur die verticale Spur. Es sind a_1 und b_1 verlängert worden, bis sie die Axe E_0 resp. in A und B schneiden; dann sind in A und B Perpendikel auf E_0 errichtet und bis zu ihren Durchschnittspunkten (a'' und b'') mit a_2 und b_2 verlängert worden; $a''b''$ ist die gesuchte Vertical-Spur. Ganz analog kann man die Horizontal-Spur $a'b'$ construiren; zur Controle der Construction weiß man, daß $a''b''$ und $a'b'$ entweder beide mit E_0 parallel werden, oder sich mit E_0 in demselben Punkt (F°) schneiden müssen.

2) Sind die Projectionen der Linien a und b mit E_0 parallel, so benutzt man am bequemsten die dritte Projectionsebene. Die Projectionen der Linien a und b sind in dieser Ebene ihre Spuren a''' und b''' und ergeben sich aus a_1 und a_2, b_1 und b_2 als Ecken zweier Rechtecke, wenn man einen Punkt jeder Linie (a und b) auf E_3 projicirt, gerade so, wie in der Figur §. 387. I. b) aus P_1 und P_2 die dritte Projection P_3 construirt wurde. Die Linie $a'''b'''$ ist die Spur der Ebene F in der dritten Projectionsebene, und verlängert man diese Linie $a'''b'''$ bis zu den Axen OZ' und OY, und überträgt man noch ihren Durchschnittspunkt mit OZ' in die Axe OZ, so hat man einen Punkt jedes Grundschnittes F' und F'' und braucht nur noch durch diese Punkte Parallelen mit E_0 zu ziehen. — Uebrigens kann man in diesem Falle die Construction der Ebene F auf 1) zurückführen; denn aus den Projectionen der mit E_0 parallelen Linien a und b kann man die Projectionen beliebig vieler Linien zeichnen, die nicht parallel E_0 sind, aber mit jenen parallelen Linien in derselben Ebene liegen.

3) Soll eine Ebene construirt werden (durch ihre Spuren), welche durch eine Linie a und durch einen Punkt P geht, der nicht in a liegt, so kann man durch P eine Linie PQ legen, welche a schneidet (§. 382. 1.), und nun nach Nr. 1. eine Ebene durch a und PQ legen. — Soll eine Ebene durch drei Punkte A, B, C gelegt werden, die durch ihre Projectionen gegeben sind, so hat man durch sie auch die Projectionen der Linien AB und BC und kann wieder nach Nr. 1. verfahren.

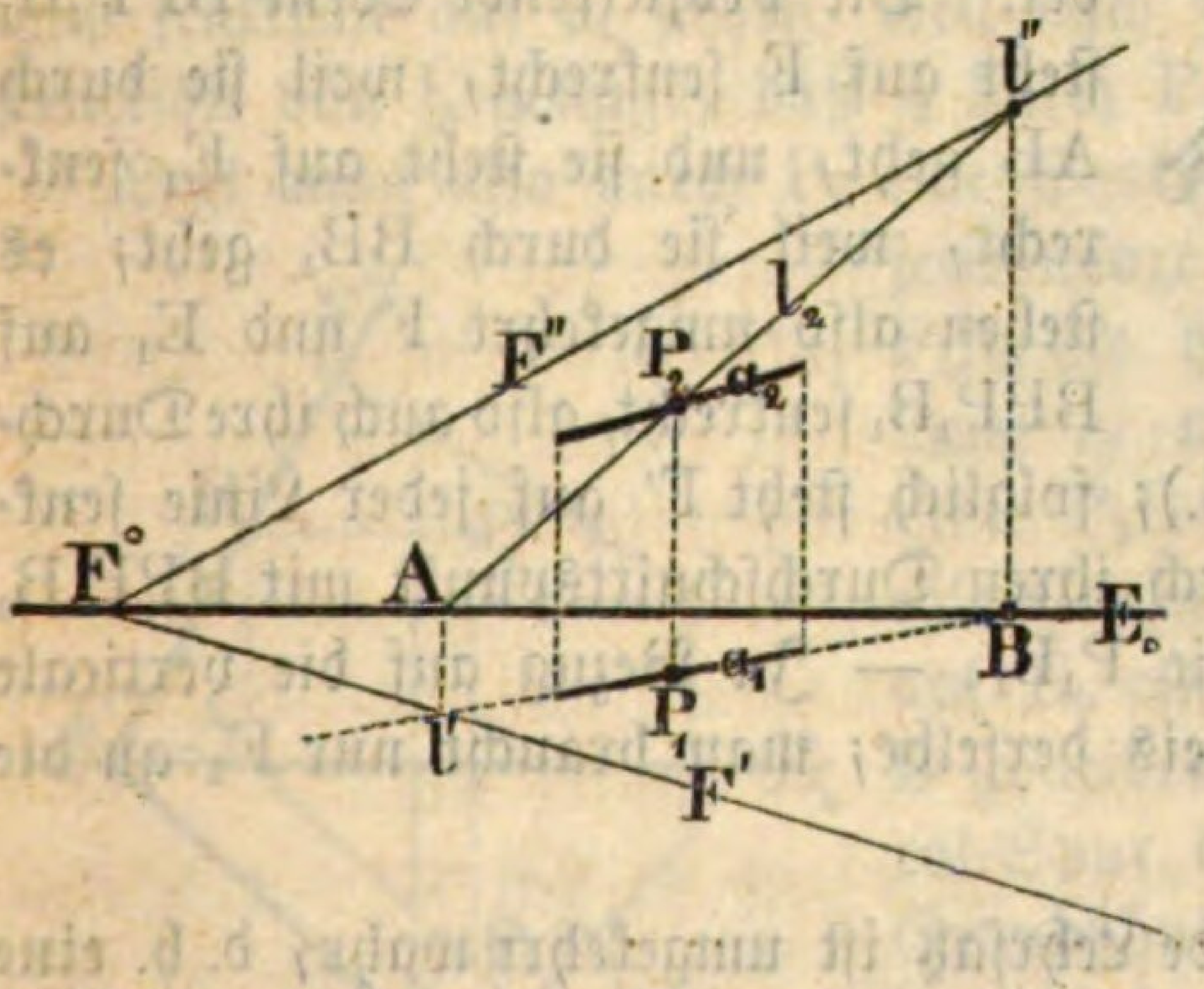
4) Um durch einen Punkt P eine Ebene zu legen, welche mit zwei windschiefen Linien a und b parallel ist, lege man durch P eine Linie p parallel mit a, und eine zweite q parallel mit b, und construire endlich die Ebene, welche durch p und q geht. — Es ergiebt sich hieraus auch, wie man durch jede zweier windschiefen Linien a und b eine Ebene legen kann, die mit der anderen parallel ist (vgl. §. 271. Nr. 1.).

§. 389.

Aufgabe.

Eine Ebene F ist durch ihre Spuren und eine sie schneidende Linie a durch ihre Projectionen gegeben; man soll den Durchschnittspunkt P der Linie a mit der Ebene F bestimmen.

Auflösung. Kann man eine zweite Linie l bestimmen, welche auch durch P geht, so ist die Aufgabe gelöst; denn der Durchschnittspunkt der Linien a und l ist dann P. Eine solche Linie findet sich leicht; sie ist die Durchschnittslinie der Ebene, welche a auf eine Projectionsebene — wir wollen annehmen, auf E_1 — projicirt, mit der Ebene F. Diese projicirende Ebene muß F schneiden, weil sie durch P geht, und nennen wir die Durchschnittslinie l, so ist zunächst ihre horizontale Projection l_1 bekannt; denn diese fällt mit der Projection a_1 zusammen, weil a und l in derselben projicirenden Ebene liegen. Man hat sonach nur noch die verticale Projection l_2 zu suchen, und auch diese ist leicht zu construiren. Weil nämlich l in F liegt, müssen die Spuren l' und l'' resp. in den Spuren F' und F'' liegen; verlängert man also a_1 bis F', so ist l' der Durchschnittspunkt, und fällt man von l' eine Senkrechte auf die Axe E_0, so ist ihr Fußpunkt A die verticale Projection eines Punktes (l') der Linie l, folglich ein Punkt ihrer verticalen Projection l_2. Ein zweiter Punkt dieser Projection ist l''; denn l'' fällt mit seiner Projection auf E_2 zusammen. Für l'' hat man daher zwei geometrische Oerter: erstens die Spur F'' und zweitens die Linie l''B, welche l'' horizontal projicirt; denn diese Linie



ist bekannt, sie steht senkrecht auf E_0, und ihr Fußpunkt B ist, weil er in der horizontalen Projection der Linie l, also in a_1 liegen muß, der Durchschnittspunkt der Linie a_1 mit der Projectionsaxe. Nachdem aber A und l'' gefunden sind, zieht man Al'', und diese Linie ist die verticale Projection l_2 der Linie l, während l'B die horizontale ist. Der Durchschnittspunkt P_2 der Projectionen l_2 und a_2 ist die verticale Projection des gesuchten Punktes P, und fällt man von P_2 ein Loth auf E_0 und verlängert es bis zu seinem Durchschnittspunkt P_1 mit a_1, so ist P_1 die horizontale Projection von P; P ist also gefunden.

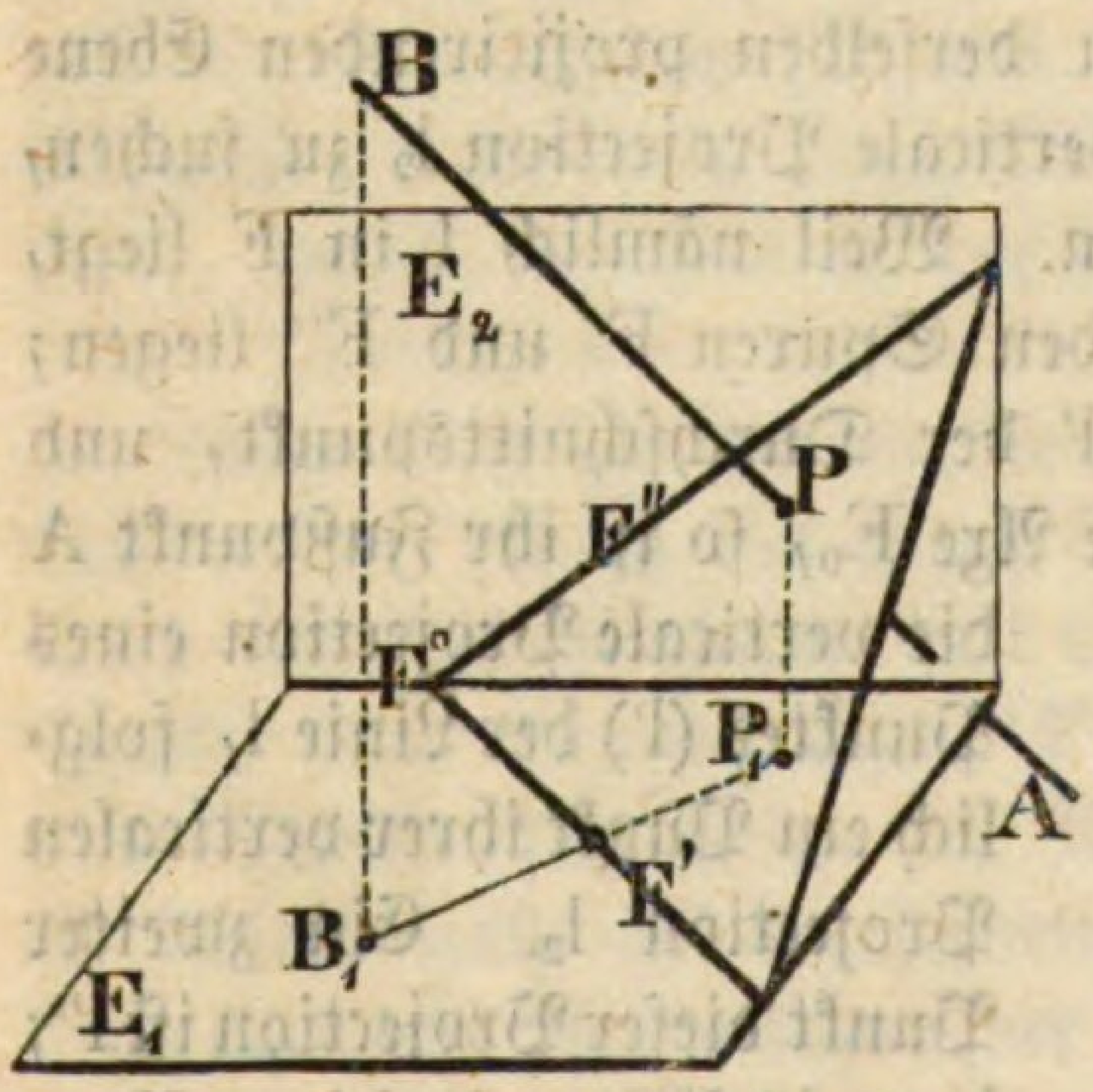
Anmerkung. Um durch einen Punkt P eine gerade Linie zu legen, welche zwei windschiefe Linien a und b schneidet, wenn P, a und b durch ihre Projectionen gegeben sind, lege man durch P und a eine Ebene und construire den Durchschnittspunkt Q der Linie b mit dieser Ebene (durch seine Projectionen); die Linie PQ ist dann die gesuchte. (Determination?)

§. 390.

Lehrsatz.

Steht eine Linie AB auf einer Ebene F im Raume senkrecht, so steht die horizontale Projection von AB auf dem horizontalen Grundschnitt der Ebene F und die verticale Projection von AB auf dem verticalen Grundschnitt der Ebene F senkrecht.

Beweis. P sei der Durchschnittspunkt der Linie AB mit der Ebene F; fällt man PP_1 und BB_1 senkrecht auf die Projectionsebene E_1, so ist P_1B_1 die Projection von AB auf E_1, und es soll nun bewiesen werden, daß P_1B_1 die Horizontal-Spur F' der Ebene F senkrecht schneidet. Die projicirende Ebene BPP_1B_1 steht auf F senkrecht, weil sie durch AB geht, und sie steht auf E_1 senkrecht, weil sie durch BB_1 geht; es stehen also umgekehrt F und E_1 auf BPP_1B_1 senkrecht, also auch ihre Durchschnittslinie F' (§. 266. Nr. 4.); folglich steht F' auf jeder Linie senkrecht, die in F liegt und durch ihren Durchschnittspunkt mit BPP_1B_1 geht, also auch auf der Linie P_1B_1. — In Bezug auf die verticale Projectionsebene ist der Beweis derselbe; man braucht nur E_2 an die Stelle von E_1 zu setzen.



Zusatz. Der vorstehende Lehrsatz ist umgekehrt wahr, d. h. eine Linie a steht auf einer Ebene F senkrecht, wenn a_1 auf F' und zugleich a_2 auf F'' senkrecht steht. Der Grund liegt darin, daß die Lage von a durch a_1 und a_2 völlig bestimmt ist. Nimmt man an, a wäre nicht auf F senkrecht, so könnte man von einem Punkte P der Linie a (dessen Projectionen also in a_1 und a_2 liegen müssen) auf F eine Senkrechte b fällen. Es müßte dann b_1 auf F' und b_2 auf F'' senkrecht stehen; weil aber b_1 und b_2 resp. durch P_1 und P_2 gehen und durch diese Punkte bereits a_1 und a_2 senkrecht zu F' und F'' liegen, so muß b_1 mit a_1 und b_2 mit a_2, also auch b mit a zusammenfallen.

§. 391.

Aus dem vorhergehenden §. ergeben sich aber folgende Constructionen:

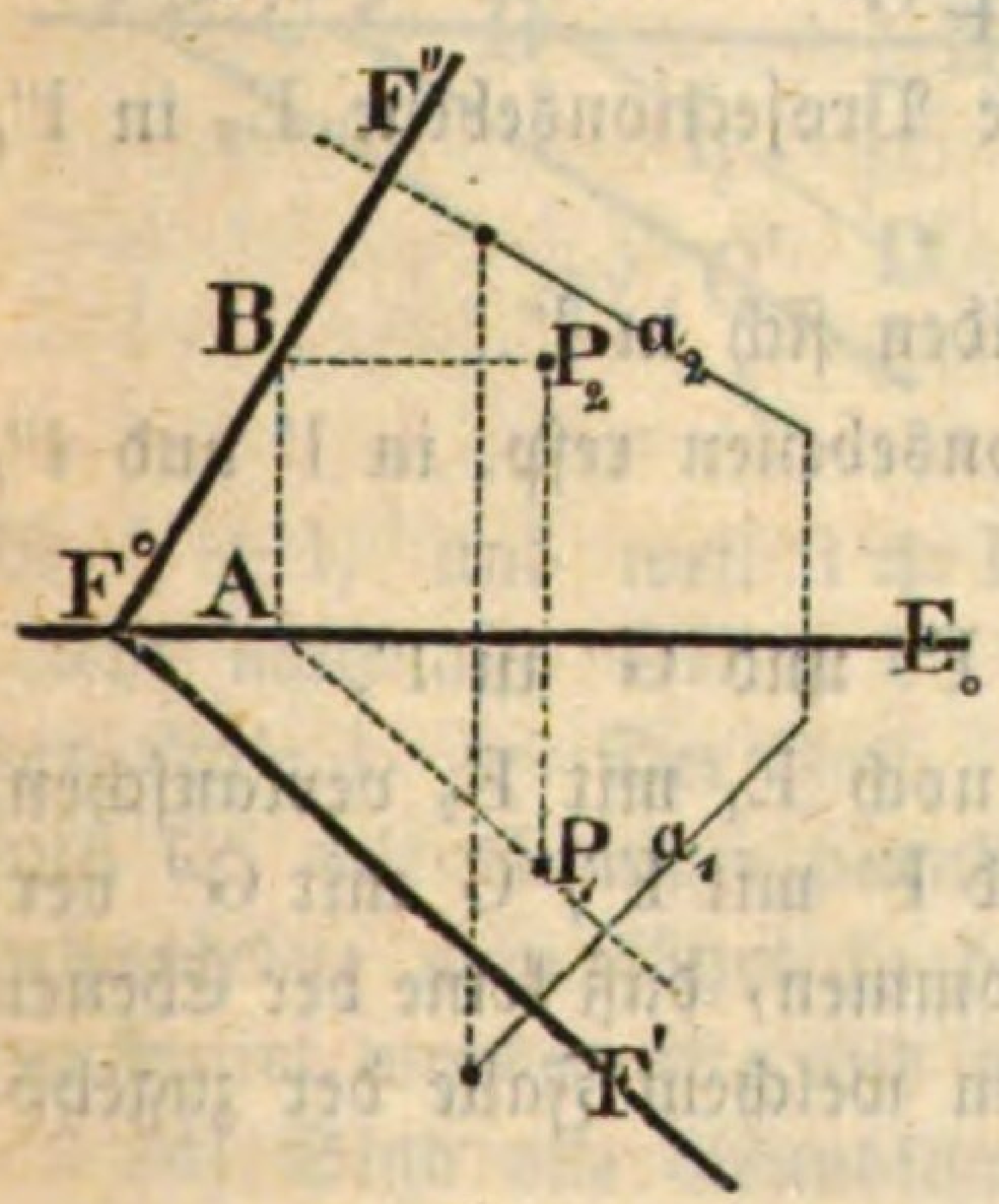
1) Ein Punkt P ist durch seine Projectionen, eine Ebene F durch ihre Spuren gegeben; man soll durch P eine Linie legen, welche F senkrecht schneidet.

Auflösung. Zieht man durch P_1 eine Senkrechte zu F', und durch P_2 eine Senkrechte zu F'', so sind diese Senkrechten die Projectionen der gesuchten Linie. — Sucht man den Durchschnittspunkt Q dieser Linie mit F nach §. 389., so kann man auch die Länge des von P auf F gefällten Lothes PQ nach §. 380. construiren.

2) Ein Punkt P und eine Linie a sind durch ihre Projectionen gegeben; man soll durch P eine Ebene F legen (und durch ihre Spuren bestimmen), welche a senkrecht schneidet.

Auflösung. Die Auflösung ergiebt sich durch die nachfolgende Betrachtung, für welche neben §. 390. das in §. 387. I. Gesagte die Grundlage bildet. Denkt man sich in der Ebene F durch P eine Parallele l mit F' gelegt, so ist die horizontale Projection dieser Parallelen auch parallel F', die verticale aber parallel der Axe E_0. Beide Projectionen kann man zeichnen; denn l_1 geht durch P_1 und muß senkrecht auf a_1 stehen, weil nach §. 390. $F' \perp a_1$ ist; zur Construction von l_2 genügt, daß l_2 durch P_2 geht und parallel E_0 ist.

Legt man also durch P_1 eine Senkrechte zu a_1, welche die Projectionsaxe in A schneiden mag, so ist P_1A die horizontale Projection l_1 der Linie l, und zieht man durch P_2 die Linie $P_2B \mathrel{+\!\!\!=} E_0$, so ist P_2B die verticale Projection l_2. Errichtet man in A auf E_0 eine Senkrechte, welche P_2B in B schneiden mag, so muß B (als Vertical-Spur der Linie l) in dem verticalen Grundschnitt der Ebene F liegen, und weil dieser Grundschnitt auf a_2 senkrecht stehen muß, so braucht man nur durch B eine auf a_2 senkrechte Linie zu legen, um F'' zu erhalten. Schneidet F'' die Axe E_0 in F°, so ist F° auch ein Punkt des horizontalen Grundschnitts der Ebene F, und da dieser auf a_1 senkrecht stehen muß, so hat man nur durch F° eine Parallele zu AP_1 zu ziehen, um F' zu erhalten.



3) Um den Neigungswinkel einer Linie a gegen eine Ebene F zu bestimmen, wenn a durch ihre Projectionen und F durch

ihre Spuren gegeben ist, fälle man von einem beliebigen Punkte P der Linie a eine Senkrechte b auf F (nach Nr. 1.) und construire nach §. 383. den spitzen Winkel unter welchem a und b sich schneiden; der gesuchte Neigungswinkel ist das Complement dieses Winkels.

Zwei Ebenen.

§. 392.

Wir wollen zunächst von der Lage zweier Ebenen auf die Lage ihrer Spuren schließen. Die Ebenen mögen F und G heißen; sie sind entweder parallel, oder sie schneiden sich; im letzteren Falle soll ihre Durchschnittslinie durch l bezeichnet werden. Da l in beiden Ebenen liegt, so muß die Horizontal-Spur von l in der Horizontal-Spur sowohl von F, als auch von G liegen, d. h. es muß l' der Durchschnittspunkt von F' und G' sein. Gleiches gilt von den Vertical-Spuren.

Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

1) Ist $F \nparallel G$, so folgt (§. 249. II.):

$$F' \nparallel G' \text{ und } F'' \nparallel G''.$$

2) Schneiden sich F und G in l, und ist

a) $l \nparallel E_1$ und $l \nparallel E_2$ (also auch $l \nparallel E_0$), so folgt (§. 249. III. Nr. 2. a):

$$F' \nparallel G' \text{ und } F'' \nparallel G''.$$

b) Ist $l \nparallel E_1$, schneidet aber l die Projectionsebene E_2 in l'', so folgt (§. 249. III. Nr. 2.):

$$F' \nparallel G',\ F'' \text{ und } G'' \text{ schneiden sich in } l''.$$

c) Schneidet l die beiden Projectionsebenen resp. in l' und l'', so folgt:

$$F' \text{ und } G' \text{ schneiden sich in } l',\ F'' \text{ und } G'' \text{ in } l''.$$

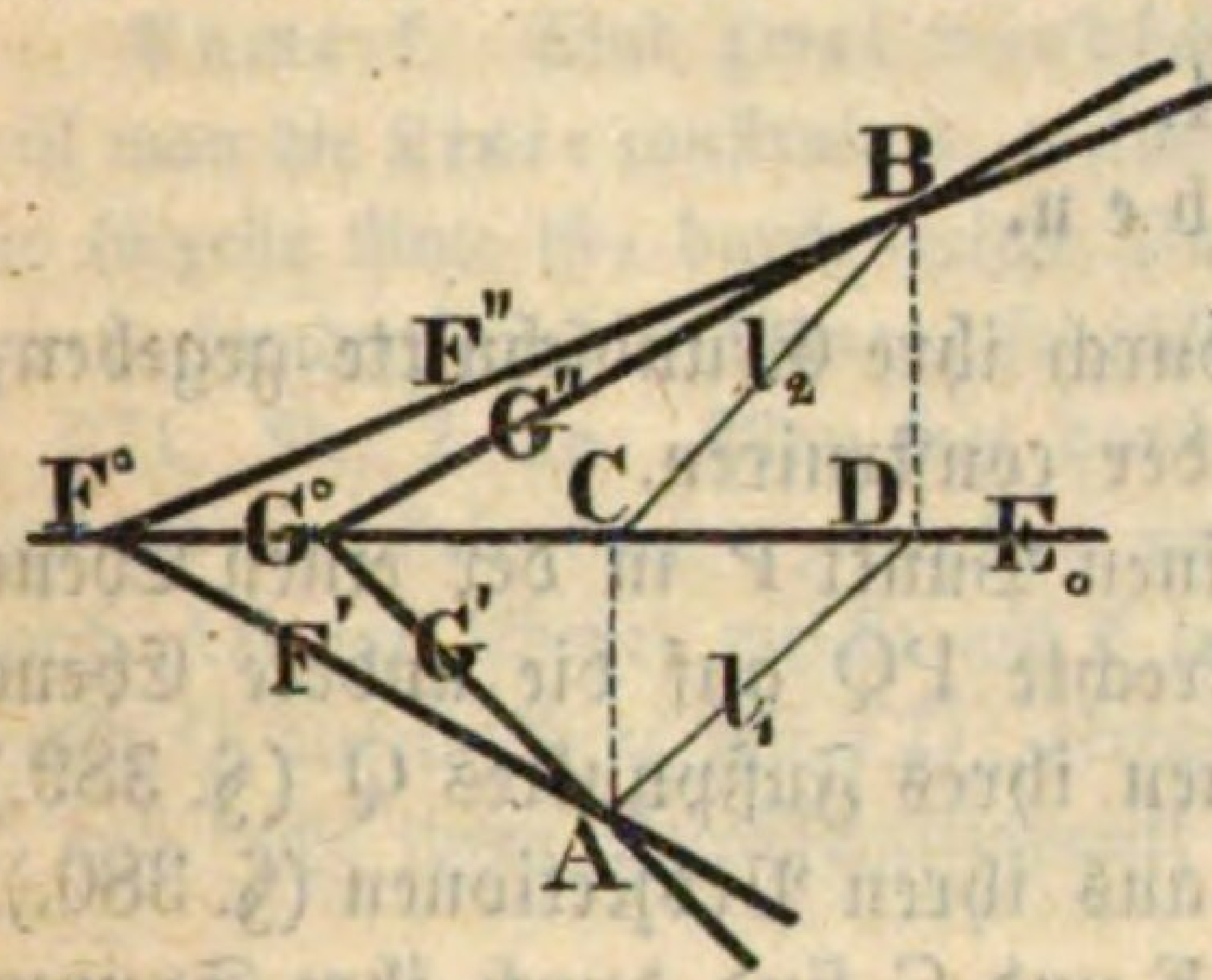
In dem Falle Nr. 2. b) kann man noch E_1 mit E_2 vertauschen, muß aber dann auch l' statt l'' setzen und F' mit F'', G' mit G'' vertauschen. — In allen Fällen wird angenommen, daß keine der Ebenen mit einer Projectionsebene parallel ist, in welchem Falle der zugehörige Grundschnitt fehlen würde.

§. 393.

Der vorige §. setzt uns in den Stand, von den Grundschnitten zweier Ebenen F und G auf die Lage dieser Ebenen zu schließen und, wenn sie sich schneiden, ihre Durchschnittslinie l durch deren Projectionen zu construiren.

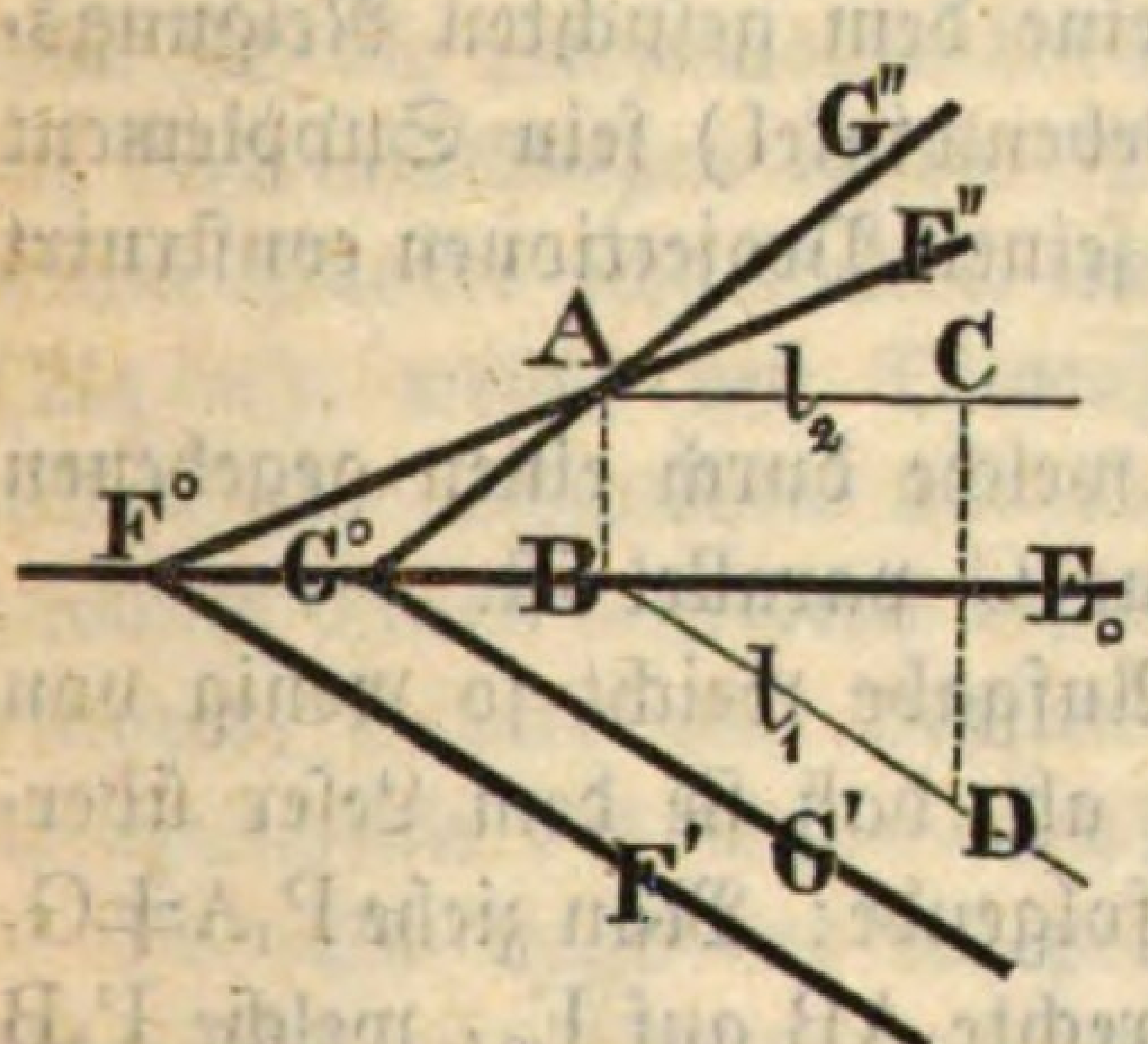
1) Ist $F' \ddagger G'$ und zugleich $F'' \ddagger G''$, und convergiren alle diese Grundschnitte mit der Projectionsaxe E_0, so ist $F \ddagger G$ (§. 268. Nr. 3.).

2) Schneiden sich F' und G' in A, und F'' und G'' in B, so schneiden sich F und G in einer geraden Linie, deren Spuren A und B sind; denn A und B liegen in den Spuren beider Ebenen, folglich auch in den Ebenen selbst; sie müssen daher Punkte der Durchschnittslinie dieser Ebenen sein, also ihre Spuren, weil sie auch in E_1 und E_2 liegen.



Um die Durchschnittslinie l zu construiren, kann man B horizontal projiciren, indem man $BD \perp E_0$ fällt; D und A sind dann Punkte der horizontalen Projection von l, also ist AD diese Projection l_1. Eben so kann man A vertical projiciren, indem man $AC \perp E_0$ fällt; CB ist dann die verticale Projection l_2 der Linie l.

3) Ist $F' \ddagger G'$, schneiden sich aber F'' und G'' in A, so müssen sich F und G in einer Linie l schneiden, welche durch A geht und der Ebene E_1 parallel ist. Es ist hiernach A die verticale Spur l'' der Linie l, und die verticale Projection l_2 erhält man, wenn man AC parallel E_0 zieht. Um die horizontale Projection l_1 zu erhalten, kann man zunächst den Punkt A horizontal projiciren, indem man $AB \perp E_0$ fällt; B ist dann ein Punkt von l_1. Ferner



ist $l_1 \ddagger l$, und weil $l \ddagger F' \ddagger G'$ ist, so muß $l_1 \ddagger F' \ddagger G'$ sein. Zieht man also $BD \ddagger F'$, so ist BD die horizontale Projection l_1 der Linie l. — Der Fall, wenn F' und G' sich schneiden, aber F'' und G'' mit einander parallel sind, ist dem vorstehenden analog zu behandeln; man führt in der Ebene E_1 das aus, was oben in E_2 construirt worden ist, und umgekehrt.

4) Sind alle Grundschnitte der Ebenen F und G mit der Projectionsaxe parallel, so sind beide Ebenen selbst mit dieser Axe parallel; übrigens können sie mit einander parallel sein, oder auch sich schneiden. Welcher Fall Statt findet, entscheidet man am einfachsten mit Hülfe der dritten Projectionsebene. Auf dieser stehen beide Ebenen senkrecht, weil sie parallel E_0 sind, und sie sind mit einander parallel, oder nicht, je nachdem ihre Spuren in dieser dritten Projectionsebene

mit einander parallel sind, oder nicht. — Bemerkt sei noch, daß diese dritte Projectionsebene unmittelbar den Winkel zeigt, unter welchem sich F und G schneiden; es ist der Winkel, den ihre Spuren mit einander bilden (§. 263. Nr. 2.)

§. 394.

Aufgaben.

1) Zwei parallele Ebenen sind durch ihre Grundschnitte gegeben; man soll ihre Entfernung von einander construiren.

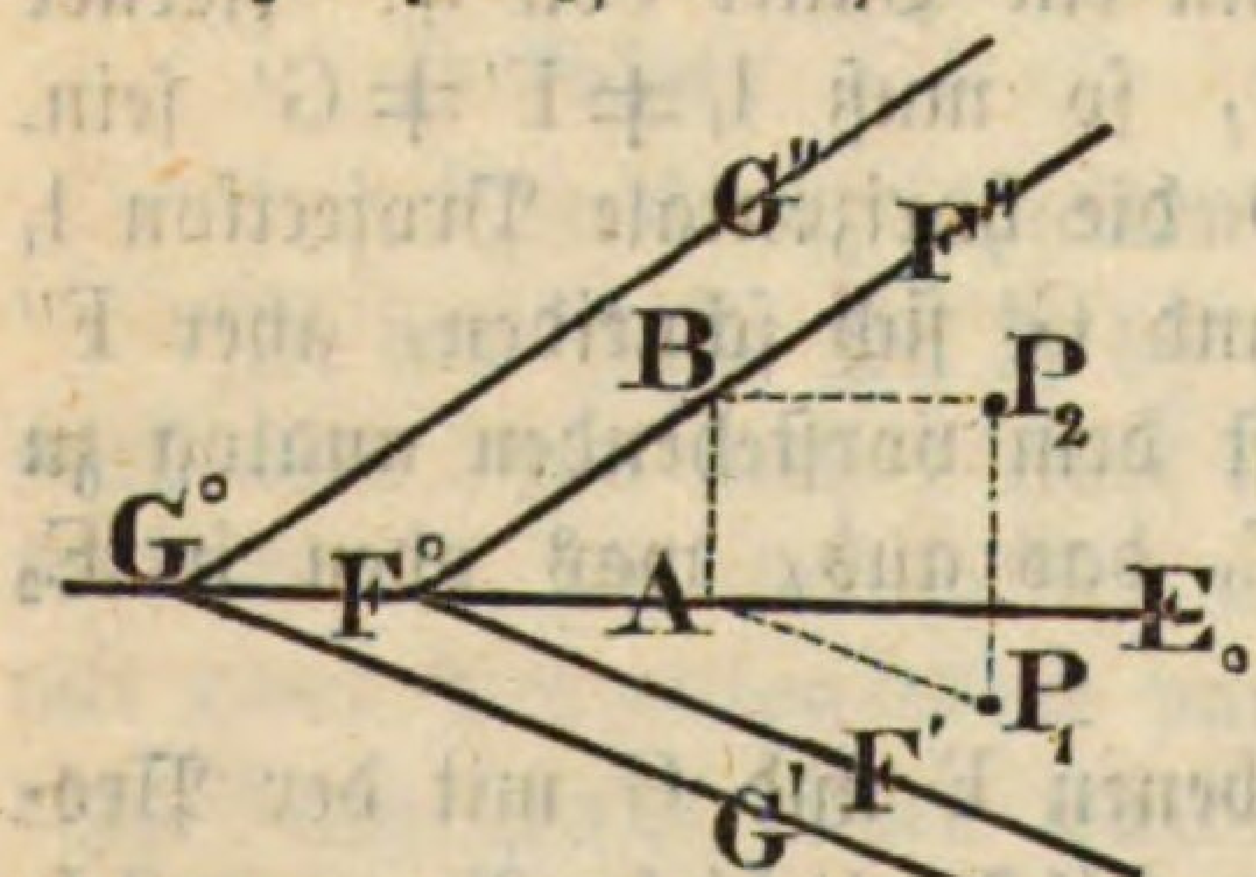
Auflösung. Man bestimme einen Punkt P in der einen Ebene (§. 387. II.), fälle von P eine Senkrechte PQ auf die andere Ebene (§. 391. Nr. 1.), suche die Projectionen ihres Fußpunktes Q (§. 389.) und construire endlich die Länge PQ aus ihren Projectionen (§. 380.).

2) Zwei sich schneidende Ebenen F und G sind durch ihre Spuren gegeben, man soll ihren Neigungswinkel construiren.

Auflösung. Fällt man von einem beliebigen Punkte P eine Senkrechte auf jede Ebene (indem man von P_1 auf F' und G', von P_2 auf F'' und G'' Perpendikel fällt), so schneiden sich diese Senkrechten unter Winkeln, von denen der eine dem gesuchten Neigungswinkel gleich, der andere (des ersten Nebenwinkel) sein Supplement ist. Der Neigungswinkel kann jetzt aus seinen Projectionen construirt werden.

3) Eine Ebene (F) zu construiren, welche durch einen gegebenen Punkt P geht und einer gegebenen Ebene G parallel ist.

Auflösung. Die Analysis dieser Aufgabe weicht so wenig von der Analysis der Aufgabe §. 391. Nr. 2. ab, daß sie dem Leser überlassen bleiben kann. Die Construction ist folgende: Man ziehe $P_1A \ddagger G_1$ und $P_2B \ddagger E_0$, errichte in A eine Senkrechte AB auf E_0, welche P_2B in B schneiden mag. Dann ziehe man durch B eine Parallele F'' zu G'', und durch ihren Durchschnittspunkt F° mit E_0 eine Parallele F' zu G' (oder zu AP_1); F' und F'' sind die Spuren der gesuchten Ebene.



4) Eine Linie a ist durch ihre Projectionen und eine Ebene G durch ihre Spuren gegeben; man soll durch a eine Ebene (F) legen, welche die Ebene G senkrecht schneidet.

Auflösung. Durch einen beliebigen Punkt P der Linie a lege man eine auf der Ebene G senkrechte Linie b; legt man dann noch durch a und b eine Ebene, so ist diese die verlangte Ebene F.

Soll man nicht durch a, sondern mit a parallel durch einen Punkt A eine auf G senkrechte Ebene legen, so ziehe man durch A eine mit a parallele Linie c und construire durch c, wie oben, eine Ebene, welche auf G senkrecht steht.

Anmerk. Sind zwei windschiefe Linien AB und CD gegeben, und will man die Linie construiren, welche auf beiden senkrecht steht, also auch die kürzeste Linie ist, durch welche Punkte beider windschiefen Linien mit einander verbunden werden können: so schließt sich die Auflösung an den Beweis in §. 271. Nr. 2. an. Man legt durch einen Punkt α der einen Linie CD eine mit AB parallele Linie a, durch a und CD aber eine Ebene F; dann legt man durch AB eine Ebene, welche auf F senkrecht steht, und sucht den Durchschnittspunkt Q dieser Ebene mit CD; errichtet man endlich in Q eine Senkrechte auf F und sucht ihren Durchschnittspunkt P mit AB, so ist PQ die gesuchte Linie.

§. 395.
Axonometrische Projection.

1) Um einen Körper, dessen Lage im Raume gegeben ist, durch seine Projectionen zu bestimmen, ist es zweckmäßig, zunächst einzelne Linien dieses Körpers, namentlich Kanten oder Axen, zu projiciren, weil sich die Projectionen der übrigen Linien und der Flächen dann leicht an diese anschließen lassen. Man wählt hierzu gewöhnlich drei sich in einem Punkte schneidende und auf einander senkrechte gerade Linien (Axen), welche den Dimensionen des Körpers nach Länge, Breite und Höhe entsprechen und Kanten des Körpers sind, oder doch bestimmte Linien desselben, die also mit dem Körper in einer festen Verbindung stehen, und projicirt nun den Körper mit Anschluß an die Projectionen des Axen-Systems, welches diese drei Linien bilden.

2) Die Lage des Körpers im Raume bedingt die Gestalt seiner Projectionen; letztere werden, je nach der Lage des Körpers, ein mehr oder weniger deutliches Bild desselben geben. Von der Lage des Körpers ist aber auch die Lage seiner drei Axen, an deren Projectionen die des Körpers sich anschließen sollen, abhängig, und umgekehrt hängt die Lage des Körpers, also auch die Gestalt seiner Projectionen, von der Lage ab, welche man den Axen zu den Projectionsebenen giebt. Ist der Körper z. B. ein rechtwinkliges Parallelepipedon, so würde man zweckmäßig drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten desselben zu seinen drei Axen wählen, und denkt man sich diese Axen mit den Projectionsaxen OX, OY und OZ (vergl. die Figur in §. 379.) parallel, so ist die Projection des Parallelepipedons auf jede der drei Projectionsebenen ein Rechteck, weil in jeder Projectionsebene die Projectionen von vier Kanten Punkte werden, die Projectionen zweier gegenüberliegenden Seiten-

flächen sich decken, die der vier übrigen aber als gerade Linien erscheinen. Ist der Körper ein senkrechter Kegel oder Cylinder, und wählt man seine Axe und die Richtungen zweier auf einander senkrechten Radien der Grundfläche zu seinen drei Axen, und denkt man sich diese Axen wieder den Projectionsaxen parallel, so ist seine Projection auf die eine Projectionsebene ein Kreis, auf jede der beiden anderen aber bei dem Kegel ein gleichseitiges Dreieck, bei dem Cylinder ein Rechteck. In allen diesen Fällen ist nun zwar der Körper durch seine Projectionen völlig bestimmt, aber selbst alle drei Projectionen zusammen gewähren doch immer erst durch Vermittlung der Phantasie ein Bild des Körpers; am wenigsten aber giebt eine Projection allein eine Anschauung von der Lage und Gestalt des Körpers. Die axonometrische Projection hat nun den Zweck, in einer Projection allein ein anschauliches Bild des Körpers hinzustellen, welches der perspectivischen Zeichnung sich nähert, zugleich aber auch gestattet, aus der Zeichnung die Abmessungen des Körpers nach einem bestimmten Maßstabe mit dem Zirkel abzunehmen. Diesen Zweck erreicht man dadurch, daß man dem Körper zu der Projectionsebene, auf welche man ihn projiciren will, eine solche Lage giebt, daß die Hauptlinien desselben, namentlich diejenigen, welche seinen drei Dimensionen entsprechen, in den Projectionen weder als Punkte erscheinen, noch sich decken oder in eine Richtung fallen. Hierzu ist aber nur nöthig, daß man das Axensystem, an dessen Projection sich die des ganzen Körpers anschließen soll, in dem Körper zweckmäßig wählt, was im Allgemeinen sehr einfach ist, wie die Beispiele oben zeigen, und daß man dann diesem Axensysteme zu der Projectionsebene auch eine solche Lage giebt, daß die Projection keiner Axe ein Punkt wird, noch die Projectionen zweier Axen in einander oder in eine gerade Linie neben einander fallen. Auf diese Weise würde man dem oben als Beispiel angeführten rechtwinkligen Parallelepipedon eine solche Lage zur Projectionsebene geben können, daß alle zwölf Kanten in der Projection als besondere Linien erscheinen, alle Ecken und Seitenflächen erkennbar sind, der Körper selbst aber durch seine Projection in Bezug auf Lage und Gestalt deutlich zur Anschauung gelangt.

Auf welche Weise kann man aber nun aus einer solchen Projection die wahre Länge der einzelnen Linien des Körpers abnehmen? Zur Beantwortung dieser Frage denke man sich eine Linie a im Raume, schief zur Projectionsebene, gleich der Längeneinheit des Maßstabes gemacht. Die Projection a_1 dieser Linie wird dann kleiner als a sein, und zwar wird die Verkürzung, welche a durch das Projiciren erleidet, von dem Winkel abhängen, welchen a, gehörig verlängert, mit

der Projectionsebene bildet. Diese Verkürzung wird sich durch Construction oder Rechnung bestimmen lassen, und hierauf werden wir weiter unten zurückkommen. Für jetzt genügt es, darauf aufmerksam zu machen, daß, wenn die Projection a_1 der Längeneinheit a gefunden ist, dann die Projection b_1 jeder mit a parallelen Linie b aus der Proportion

$$a : a_1 = b : b_1$$

zu entnehmen ist (aus ähnlichen Dreiecken, wenn man in den projicirenden Ebenen durch einen Endpunkt von a und b Parallelen mit resp. a_1 und b_1 zieht); ist $b = na$, so folgt $b_1 = na_1$. Hat man also die Projection der Längeneinheit des Maßstabes für eine bestimmte Lage gefunden, so ist diese Projection die Längeneinheit eines Maßstabes, nach welchem man die wahre Länge aller Linien, welche mit der projicirten Einheit parallel sind, aus ihren Projectionen, die wieder der Projection der Längeneinheit (in der Zeichnung) parallel sind, finden kann. Weil ferner die drei Axen des Axensystems, an dessen Projection wir die des Körpers anschließen, im Allgemeinen beim Projiciren verschiedene Verkürzungen erleiden werden, so ist es nöthig, für jede Axe, also für jede der drei Dimensionen des Körpers, einen besonderen Maßstab zu entwerfen. Diese Betrachtung führt nun zu folgendem Verfahren: Man denkt sich im Raume das Axensystem in einer solchen Lage, daß die Projectionen der drei Axen auf eine Projectionsebene als drei verschiedene Linien erscheinen. Jeder Axe giebt man dieselbe Länge, macht nämlich jede gleich der Längeneinheit des Maßstabes, welcher dem durch seine Projection darzustellenden Körper angehört, bestimmt dann die Länge der Projection jeder einzelnen Axe und nimmt jede solche Länge als Einheit eines Maßstabes, nach welchem alle mit dieser Axe parallelen Linien des Körpers (in ihren Projectionen) zu messen sind. Der Projection der Längeneinheit giebt man dieselbe Benennung, welche die Einheit selbst hat; dann erhält man durch Messen der Projectionen mit dem neuen Maßstabe unmittelbar die wahre Länge der Linie, deren Projection man gemessen hat. Von der Lage des Axensystems im Raume hängt aber nicht nur die Größe der Projectionen der Axen ab, sondern auch die Größe der Winkel, welche sie mit einander bilden; daher sind aber auch diese Winkel von der Länge der Projectionen der Axen abhängig, und man wird sie so bestimmen können, daß die Projectionen der Axen zu einander ein gegebenes Verhältniß haben. Um hierbei allgemein zu verfahren, wollen wir uns zuerst das Axensystem in der Lage denken, daß seine Axen mit den Projectionsaxen parallel sind; dann wollen wir dasselbe durch eine doppelte

Drehung in eine unserer Absicht entsprechende Lage zur Projectionsebene bringen. Die Ausführung des Gesagten macht aber eine Erläuterung nöthig, die jetzt folgen soll.

3) Durch einen Körper denken wir uns eine mit dem Körper fest verbundene gerade Linie gelegt (eine Axe), und diese Axe denken wir uns auf der einen Projectionsebene, etwa auf E_1, senkrecht. Die Projection der Axe auf E_1 ist ein Punkt; wir wollen ihn A_1 nennen, P aber sei ein beliebiger Punkt des Körpers, der nicht in der Axe liegt. Wenn nun der Körper drehend um seine Axe bewegt wird, wobei jeder Punkt des Körpers seine relative Lage zur Axe behält, weil letztere mit dem Körper fest verbunden sein soll, so bewegt sich P in einer Kreisperipherie; denn fällt man PA senkrecht auf die Axe, so bleibt PA auch während der Bewegung auf ihr senkrecht, bewegt sich also in einer Ebene, welche auf der Axe senkrecht steht (§. 253. II.) und mit E_1 parallel ist, und in dieser Ebene beschreibt P einen Kreisbogen. Von besonderer Wichtigkeit ist es nun, zu beurtheilen, welche Bewegung hierbei die Projection des Punktes P auf jede Projectionsebene in dieser Ebene annimmt, und da findet man:

in der Projectionsebene, auf welcher die Axe senkrecht steht, bewegt sich die Projection des Punktes P, also P_1, in einem Kreisbogen, welcher dem Kreisbogen congruent ist, in welchem sich P bewegt; in den beiden anderen Projectionsebenen bewegen sich die Projectionen von P, also P_2 und P_3, in geraden Linien, welche resp. den Projectionsaxen parallel sind, durch welche diese Projectionsebenen von der ersten getrennt sind.

Der Grund ist leicht einzusehen. Die Projection des Punktes A ist A_1, und weil PA in jeder Lage während der Bewegung parallel E_1 ist, so muß ihre Projection P_1A_1 immer gleich und parallel PA sein; die projicirende Ebene, das Rechteck PAA_1P_1, beschreibt also einen senkrechten Cylinder-Ausschnitt. Was die beiden anderen Projectionen des Punktes P betrifft, so ist die Ebene, in welcher PA sich bewegt, zugleich für E_2 und für E_3 die projicirende Ebene; folglich fällt bei jeder Lage des Punktes P seine Projection auf E_2 und E_3 in die Durchschnittslinie jener Ebene mit E_2 und E_3; diese Durchschnittslinie ist aber gerade und mit den erwähnten Projectionsaxen parallel, weil jene Ebene parallel E_1 ist.

Hieraus folgt nun, wie man aus den Projectionen eines Körpers die Projectionen desselben Körpers finden kann, nachdem derselbe durch Drehung um eine Axe, welche auf einer Projectionsebene senkrecht steht, in eine andere Lage gebracht ist. Ist α der Drehungswinkel,

d. h. beschreibt jeder Punkt des Körpers einen Kreisbogen, dessen Centriwinkel α ist, ist E_1 die Projectionsebene, auf welcher die Axe senkrecht steht, ist A_1 die Projection dieser Axe auf E_1, P_1 aber die Projection eines Punktes P des Körpers auf E_1 in seiner ursprünglichen Lage: so schlägt man in E_1 nach der Richtung hin, nach welcher der Körper gedreht ist, mit A_1P_1 um A_1 einen Kreisbogen, der dem Centriwinkel α zugehört; der Endpunkt dieses Bogens ist die Projection des Punktes P bei der neuen Lage des Körpers. Aus dieser Projection findet man auf die bekannte Weise die andern Projectionen, welche in den geraden Linien liegen, die in den Ebenen E_2 und E_3 durch P_2 und P_3 resp. parallel mit OX und OZ gehen.

4) Wir denken uns im Raume drei sich in einem Punkte A schneidende, auf einander senkrechte und gleich lange Linien AU, AV und AW; jede sei gleich der Einheit des Maßstabes für die Abmessungen des Körpers, dem diese drei Linien als seine Axen angehören, also 1 Ruthe oder 1 Fuß u. s. w. Wir bringen dieses Axensystem in drei verschiedene Lagen; aus der Projection desselben in der ersten Lage leiten wir seine Projection in der zweiten Lage, aus dieser seine Projection in der dritten Lage ab. Zur größeren Deutlichkeit ist für jede Lage eine besondere Figur construirt (Fig. 1. bis 3.); wir rathen dem Leser, in größerem Maßstabe diese Constructionen in einer Figur, also in denselben drei Projectionsebenen, auszuführen.

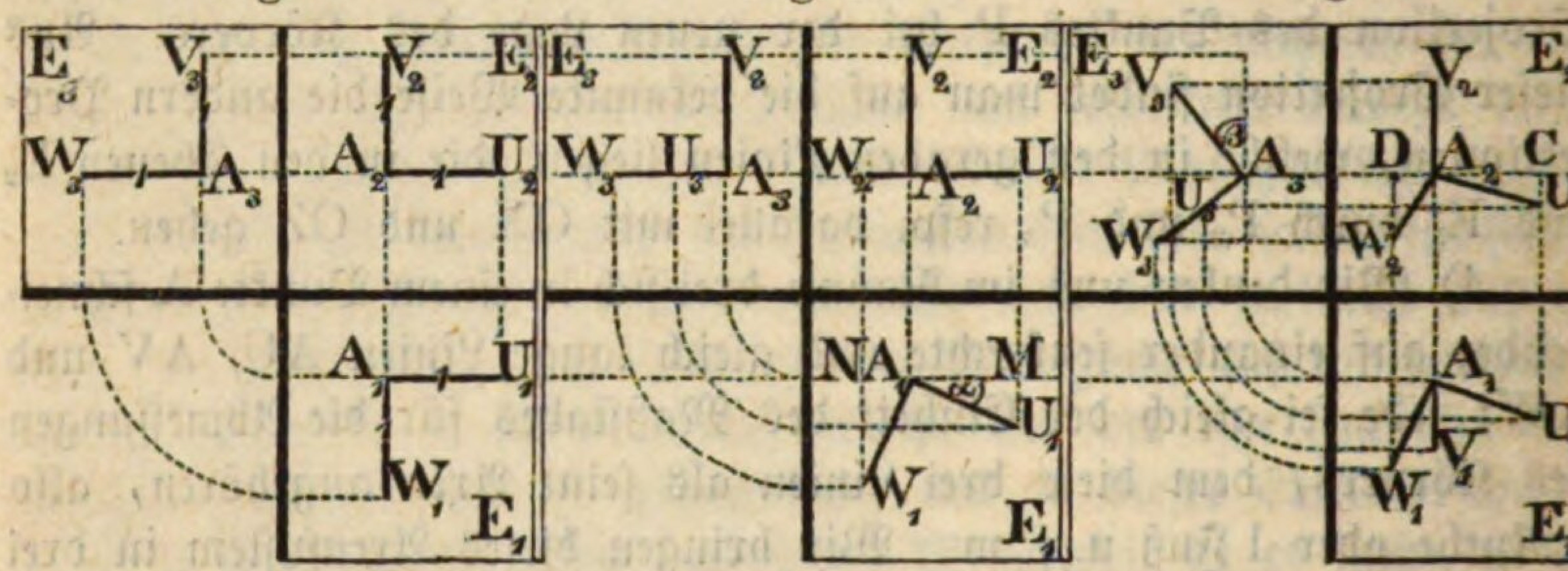
Wir denken uns zunächst die drei Axen den Projectionsaxen parallel, nämlich: $AU \ddagger OX$, $AV \ddagger OY$, $AW \ddagger OZ$.

Figur 1. zeigt die Projectionen der drei Axen in dieser Lage; in E_1 ist die Projection der Axe AV der Punkt A_1, in E_2 die Projection der Axe AW der Punkt A_2, in E_3 die Projection der Axe AU der Punkt A_3; in jeder Projectionsebene haben die Projectionen der andern Axen noch die Länge 1.

Wir denken uns jetzt das Axensystem im Raume um die Axe AV gedreht, welche auf E_1 senkrecht steht, bis das System den Winkel α beschrieben hat, wobei der Punkt U nach vorn sich bewegen mag. Da hierbei die Axe AV ihre Lage nicht geändert hat, so bleiben alle drei Projectionen dieser Axe unverändert. Figur 2. zeigt die Projection des Axensystems in der jetzigen Lage. Die Construction dieser Figur beginnt in der Ebene E_1 und ist folgende: U_1 hat sich bei der Bewegung des Systems in einer Kreisperipherie bewegt, die Länge der Projection A_1U_1 ist unverändert geblieben; man trägt daher an die durch A_1 gehende horizontale Linie (A_1U_1 in der Figur 1.) den Winkel α an, macht den Schenkel $A_1U_1 = 1$, errichtet $A_1W_1 \perp A_1U_1$ und macht auch $A_1W_1 = 1$. Aus dieser horizontalen Projection des

Axensystems findet man auf die bekannte Art die beiden anderen, indem man die Punkte U_1 und W_1 in die beiden anderen Projectionsebenen überträgt, wobei nur daran zu erinnern ist, daß sich U_2 und W_2, so wie U_3 und W_3 bei der drehenden Bewegung des Systems in geraden Linien bewegen, welche resp. durch A_2 und A_3 gehen und horizontal liegen.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.



Jetzt denken wir uns endlich noch das Axensystem um eine gerade Linie gedreht, welche durch A geht und auf der dritten Projectionsebene E_3 senkrecht steht; der Drehwinkel sei diesmal gleich β. Die Projectionen A_3U_3, A_3V_3 und A_3W_3 in der Projectionsebene E_3 (Fig. 2.) beschreiben hierbei Kreisbogen zu dem Centriwinkel β, während in den beiden anderen Projectionsebenen die Punkte U_1, V_1, W_1, U_2, V_2 und W_2 sich resp. in den geraden Linien U_1U_2, V_1V_2 (oder A_1V_2) und W_1W_2 bewegen, welche bei normaler Lage der Projectionsebenen mit E_3 parallel sind. Wir denken uns hierbei die Bewegung so, daß die Axe AV sich nach vorn bewegt; Figur 3. zeigt die Projection des Axensystems in dieser dritten Lage. Die Construction beginnt in der Ebene E_3. Man zieht A_3V_3 so, daß diese Linie mit ihrer früheren Lage den Winkel β bildet, macht $A_3V_3 = 1$, errichtet $A_3W_3 \perp A_3V_3$ und giebt den Linien A_3W_3 und A_3U_3 dieselbe Länge, welche sie in der Figur 2. haben. Die Projectionen des Punktes A auf alle drei Projectionsebenen sind wieder unverändert geblieben. Man hat jetzt nur noch die Punkte U_3, V_3 und W_3 in die beiden andern Projectionsebenen zu übertragen, und dies geschieht auf die bekannte Weise, wobei man nur die Linien A_2C und A_2D so lang machen muß, als resp. A_2U_2 und A_2W_2 in der Figur 2. sind.

Die Projectionen des Axensystems in den Ebenen E_1 und E_2 haben nun die Lage, welche zur axonometrischen Projection geeignet ist; gewöhnlich nimmt man die Projection in der Ebene E_2, weil die Lage der Axe A_2V_2 der Vorstellung entspricht, daß AV die Höhe des Körpers repräsentiren soll, den man durch seine Projection dar-

stellen will. Man nennt die Figur, welche A_2U_2, A_2V_2 und A_2W_2 mit einander bilden, das **Axenkreuz**, und die Längen seiner drei Axen sind die Einheiten der drei Maßstäbe, mit denen man die Projectionen der mit den Axen im Raume parallelen Linien des Körpers messen muß, um die wahren Längen dieser Linien zu erhalten. Hierbei ist es gleichgültig, ob jede Axe (AU, AV und AW) des Axensystems die Länge 1 Fuß oder 1 Ruthe oder auch 10 Ruthen u. s. w. erhalten hat; jede Axe des Axenkreuzes giebt dann für alle mit ihr zu messenden Linien die Länge 1 Fuß, 1 Ruthe, 10 Ruthen u. s. w. an. — Um eine Anschauung einer axonometrischen Projection zu erhalten, möge der Leser die Projection eines Würfels zeichnen, dessen drei aneinanderstoßende Kanten AU, AV und AW sind. Man hat nur nöthig, Parallelen mit A_2U_2, A_2V_2 und A_2W_2 zu ziehen; die Projection jeder Seitenfläche wird ein Parallelogramm.

5) **Berechnungen.** Es bleibt uns noch übrig, durch Rechnung zu finden:

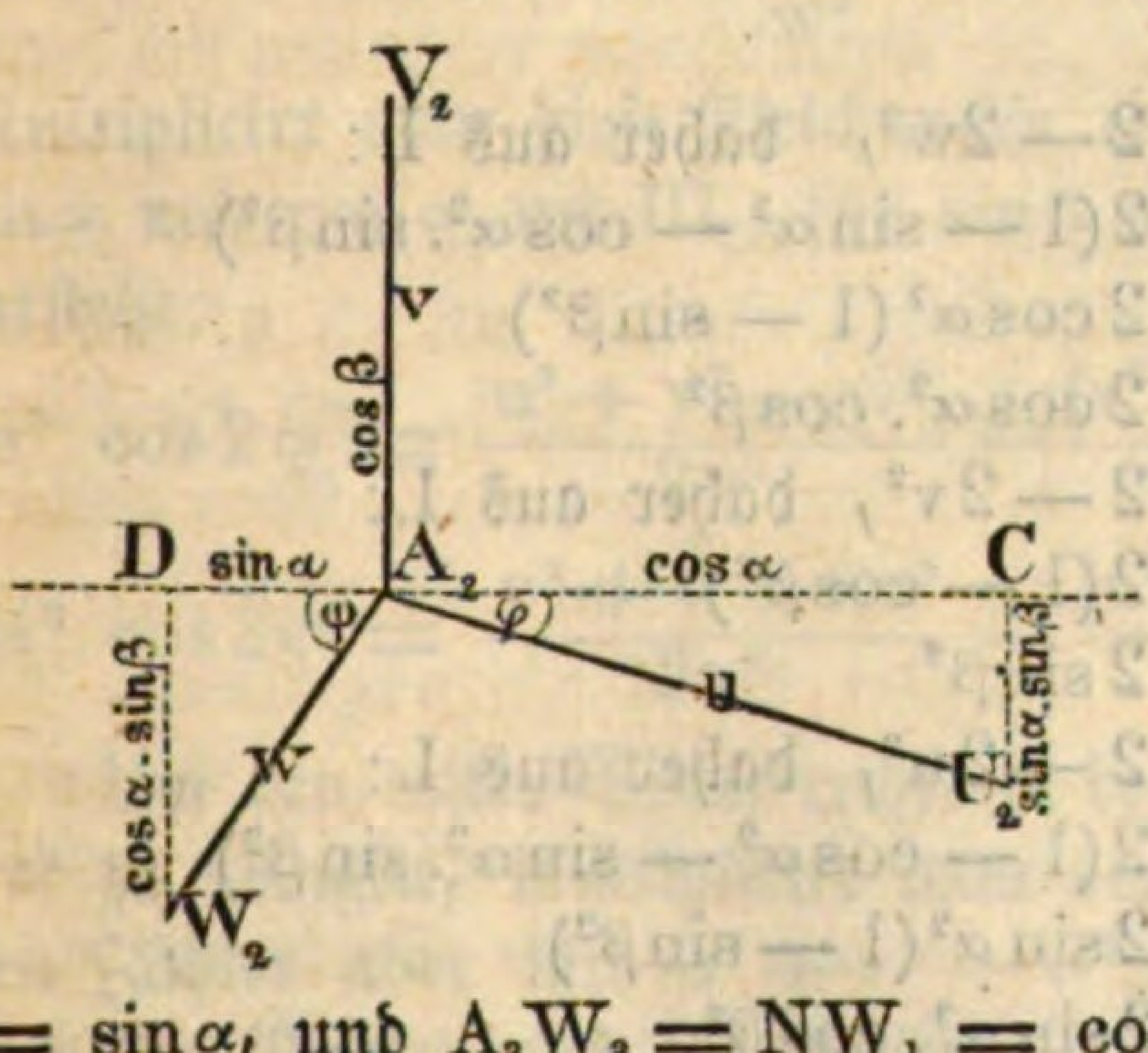
a) die Länge der Axen des Axenkreuzes $A_2U_2V_2W_2$ aus den Drehungswinkeln α und β;

b) diese Winkel, wenn die Axen des Axenkreuzes ein bestimmtes Verhältniß zu einander erhalten sollen (woraus für jede Axe eine bestimmte Länge folgt);

c) die Winkel, welche die Axen des Axenkreuzes mit einander bilden, aus diesen Axen oder ihrem Verhältniß zu einander.

Wir legen das Axenkreuz in der Figur 3. in der Ebene E_2 zum Grunde und geben nachstehend dieses Axenkreuz in größerem Maßstabe. Die Länge jeder Axe im Raume, deren Projectionen das Axenkreuz bilden, setzen wir gleich 1; ferner bezeichnen wir

A_2U_2 mit u, A_2V_2 mit v, A_2W_2 mit w.



Zu a) In der vorhergehenden Figur 2. ist $A_1U_1 = 1$; folglich ist $A_2U_2 = A_1M = \cos\alpha$ und $A_2W_2 = A_1N = \sin\alpha$. Nun wurden aber in Fig. 3. (also auch in der nebenstehenden Figur) A_2C und A_2D resp. den Längen A_2U_2 und A_2W_2 (in Fig. 2.) gleich gemacht; folglich ist: $A_2C = \cos\alpha$ und $A_2D = \sin\alpha$. Ferner ist in Fig. 2. $A_3U_3 = MU_1 = \sin\alpha$, und $A_3W_3 = NW_1 = \cos\alpha$. Hieraus folgt, daß auch in

Figur 3. $A_3U_3 = \sin\alpha$ und $A_3W_3 = \cos\alpha$ ist; daher ist in Fig. 3. (also auch in vorstehender Figur):

$$U_2C = \sin\alpha . \sin\beta \text{ und } W_2D = \cos\alpha . \sin\beta.$$

Endlich ergiebt sich unmittelbar aus Figur 3., und gilt also auch für die vorstehende Figur:

$$A_2V_2 = \cos\beta.$$

Man erhält jetzt aus letzterer Figur unmittelbar, resp. durch den Pythagoreischen Lehrsatz:

$$\text{I.} \begin{cases} u^2 = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 . \sin\beta^2 \\ v^2 = \cos\beta^2 \\ w^2 = \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 . \sin\beta^2. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gestatten die Berechnung der Axen des Axenkreuzes aus den Drehungswinkeln α und β.

Zu b) Um α und β zu finden, wenn u, v und w gegeben sind, folgt zunächst durch Addition der drei Gleichungen in I. (§. 211. VI.):

$$\text{II.} \quad u^2 + v^2 + w^2 = 2.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, wie man u, v und w berechnen kann, wenn ihr Verhältniß zu einander gegeben ist. Soll sich z. B. verhalten

$$u : v : w = 7 : 5 : 6,$$

so folgt, $v = \frac{5}{7} u$ und $w = \frac{6}{7} u$ gesetzt:

$$u^2 + \frac{25}{49} u^2 + \frac{36}{49} u^2 = 2 \text{ oder}$$

$$49 . u^2 + 25 . u^2 + 36 . u^2 = 2 . 49.$$

Hieraus ergiebt sich aber:

$$u = \frac{7}{\sqrt{55}}, \quad v = \frac{5}{\sqrt{55}}, \quad w = \frac{6}{\sqrt{55}}.$$

Aus II. folgt nun:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - w^2 &= 2 - 2w^2, \text{ daher aus I.:} \\ &= 2(1 - \sin\alpha^2 - \cos\alpha^2 . \sin\beta^2) \\ &= 2\cos\alpha^2(1 - \sin\beta^2) \\ &= 2\cos\alpha^2 . \cos\beta^2 \\ u^2 + w^2 - v^2 &= 2 - 2v^2, \text{ daher aus I.:} \\ &= 2(1 - \cos\beta^2) \\ &= 2\sin\beta^2 \\ v^2 + w^2 - u^2 &= 2 - 2u^2, \text{ daher aus I.:} \\ &= 2(1 - \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 . \sin\beta^2) \\ &= 2\sin\alpha^2(1 - \sin\beta^2) \\ &= 2\sin\alpha^2 . \cos\beta^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt aber:

$$\text{(1.)}\begin{cases}\sin\beta = \sqrt{\dfrac{u^2+w^2-v^2}{2}}, \text{ oder } \cos\beta = v\\ \sin\alpha\,.\,\cos\beta = \sqrt{\dfrac{v^2+w^2-u^2}{2}}\\ \cos\alpha\,.\,\cos\beta = \sqrt{\dfrac{u^2+v^2-w^2}{2}}.\end{cases}$$

Zur Berechnung der Winkel aus den Axen hat man also

$$\text{III.}\begin{cases}\cos\beta = v\\ \sin\alpha = \dfrac{1}{v}\sqrt{\dfrac{v^2+w^2-u^2}{2}}, \text{ oder}\\ \cos\alpha = \dfrac{1}{v}\sqrt{\dfrac{u^2+v^2-w^2}{2}}.\end{cases}$$

Zu c) Um endlich noch aus den Axen u, v und w des Axenkreuzes die Winkel zu finden, welche die Axen mit einander bilden, wollen wir die Winkel, welche u und w mit der horizontalen, also auf der Axe v senkrechten Linie CD bilden, resp. mit φ und ψ bezeichnen. Aus der Figur folgt dann unmittelbar:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{u}, \quad \sin\varphi = \frac{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}{u}$$

$$\cos\psi = \frac{\sin\alpha}{w}, \quad \sin\psi = \frac{\cos\alpha\,.\,\sin\beta}{w}.$$

Nun ist bekanntlich $\cos 2\varphi = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2$, daher:

$$\cos 2\varphi = \frac{\cos\alpha^2}{u^2} - \frac{\sin\alpha^2\,.\,\sin\beta^2}{u^2}$$

$$\cos 2\psi = \frac{\sin\alpha^2}{w^2} - \frac{\cos\alpha^2\,.\,\sin\beta^2}{w^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit u^2 und w^2 und setzt für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ aus III., für $\sin\beta$ aber aus (1.) die Werthe ein, so entsteht:

$$u^2.\cos 2\varphi = \frac{u^2+v^2-w^2}{2v^2} - \frac{(v^2+w^2-u^2)(u^2+w^2-v^2)}{4v^2}$$

$$w^2.\cos 2\psi = \frac{v^2+w^2-u^2}{2v^2} - \frac{(u^2+v^2-w^2)(u^2+w^2-v^2)}{4v^2}.$$

Um den ersten Bruch rechts in beiden Gleichungen auf den Nenner $4v^2$ zu bringen, multiplicire man den Nenner dieses Bruches mit 2, den Zähler aber mit $u^2+v^2+w^2$ (vergl. II.); dann schaffe man noch die Nenner aus der Gleichung fort, wodurch man erhält:

15*

$$4u^2v^2.\cos 2\varphi = [(u^2+v^2)^2 - w^4] - [w^4 - (u^2 - v^2)^2]$$
$$4v^2w^2.\cos 2\psi = [(v^2+w^2)^2 - u^4] - [u^4 - (v^2 - w^2)^2].$$

Löst man rechts alle Klammern auf und hebt noch die Gleichung durch 2, so folgt:

$$2u^2v^2.\cos 2\varphi = u^4 + v^4 - w^4$$
$$2v^2w^2.\cos 2\psi = v^4 + w^4 - u^4.$$

Diesen Gleichungen kann man aber folgende Form geben:

$$(2.) \quad \begin{cases} (w^2)^2 = (u^2)^2 + (v^2)^2 - 2u^2.v^2.\cos 2\varphi \\ (u^2)^2 = (v^2)^2 + (w^2)^2 - 2v^2.w^2.\cos 2\psi. \end{cases}$$

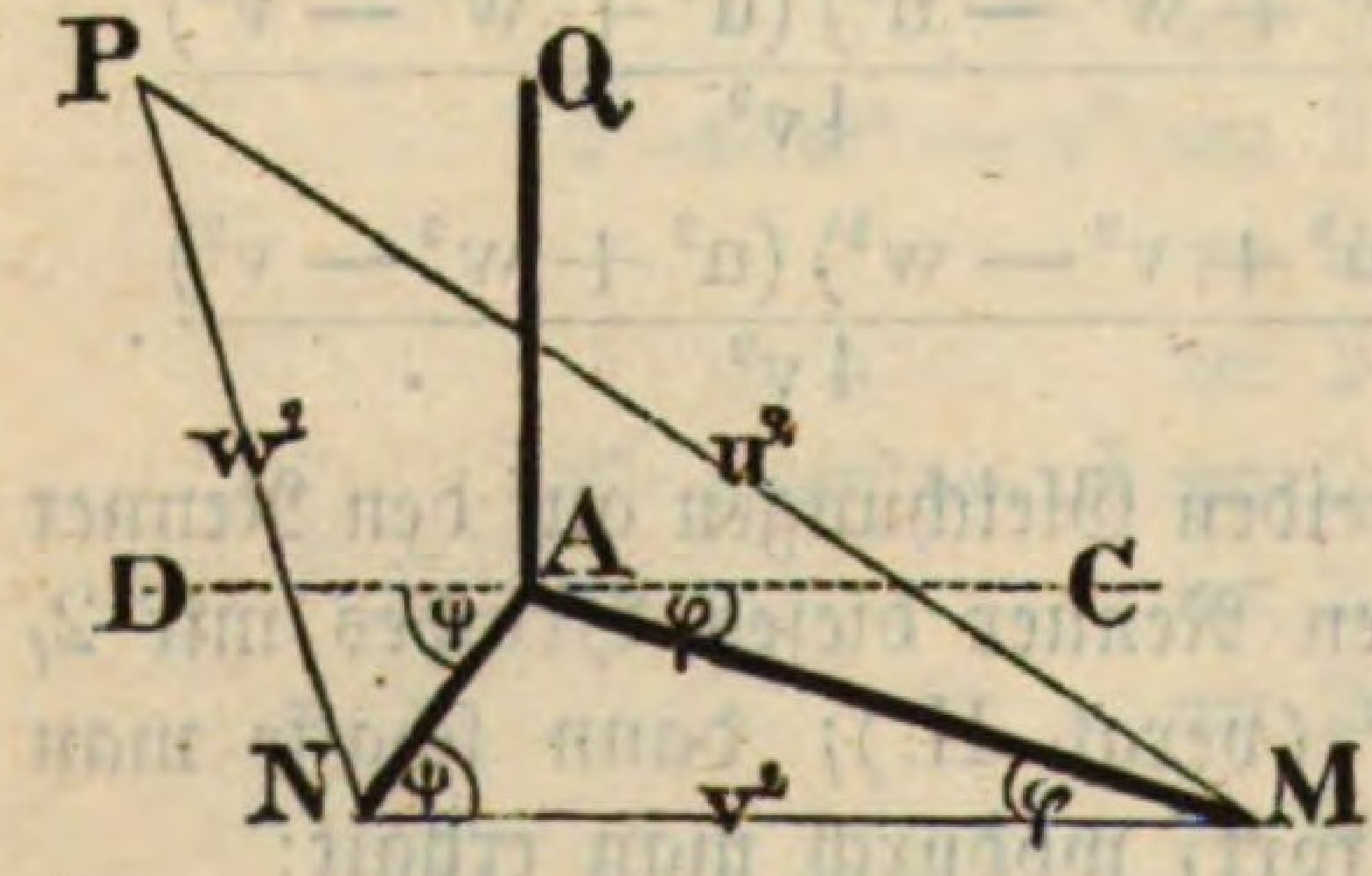
Aus diesen Gleichungen ergiebt sich unmittelbar (vergl. §. 240. III.), daß 2φ und 2ψ Winkel eines Dreiecks sind, dessen Seiten den Quadraten der Axen gleich gemacht sind, d. h. gleich u^2, v^2 und w^2, und zwar liegt 2φ der Seite w^2 und 2ψ der Seite u^2 gegenüber; φ und ψ sind also die Hälften dieser Winkel des Dreiecks. Statt des Dreiecks mit den Seiten u^2, v^2 w^2 kann man auch ein ihm ähnliches nehmen, dessen Seiten sich also zu einander verhalten wie $u^2 : v^2 : w^2$.

Dieses Gesetz gestattet nun, die gesuchten Winkel zu berechnen und zu construiren. Wir wollen zunächst die Construction angeben. Ist das Verhältniß $u : v : w$ in Zahlen gegeben, woraus jede Axe nach dem Gesetz II. zu berechnen ist, so construire man nach einem beliebigen Maßstabe ein Dreieck mit den Seiten u^2, v^2 und w^2; ist aber das Verhältniß der Axen durch drei Linien a, b und c gegeben, soll sich etwa verhalten

$$u : v : w = a : b : c,$$

so müssen sich die Seiten des Dreiecks zu einander wie $a^2 : b^2 : c^2$ verhalten; man findet in diesem Falle die Seiten etwa nach §. 88. Anm. 2., oder indem man die geometrischen Quadrate über a, b und c in Rechtecke von gleicher Höhe verwandelt; die Grundlinien verhalten sich dann zu einander, wie $a^2 : b^2 : c^2$, also auch wie $u^2 : v^2 : w^2$.

Es sei das Dreieck NMP aus den Seiten $NM = v^2$, $MP = u^2$ und $NP = w^2$ construirt (oder aus Seiten, welche mit v^2, u^2 und w^2 proportional sind), und die Seite NM liege horizontal. Man halbire die beiden Winkel N und M, verlängere die Halbirungslinien, bis sie sich in A schneiden, ziehe durch A die Linie DC $\pm$ NM und errichte in A auf CD die Senkrechte AQ; die drei Linien AQ, AM und AN



sind dann die **Richtungen** der drei Axen des Axenkreuzes genau in derselben Lage, wie sie die vorhergehende Figur enthält; $\measuredangle MAC = \measuredangle AMN$ ist der gesuchte Winkel φ und $\measuredangle NAD = \measuredangle ANM$ ist $= \psi$. — Es ist schon bemerkt worden, daß, wenn man statt der Linien NM, MP und PN proportionale Linien zur Construction des Dreiecks nimmt, dann dieselben Winkel sich ergeben, also auch dieselbe Lage der drei Axen (ähnliche Dreiecke).

Was nun die Berechnung der Winkel φ und ψ betrifft, so kann sie aus den Gleichungen in (2.) erfolgen, bequemer aber nach einer Formel, die zur logarithmischen Berechnung geeigneter ist, etwa nach einer der Formeln (1.) und (2.) in §. 240. Nr. 5. Nach der Formel (1.) erhält man:

$$\text{IV.} \left\{ \begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{\sqrt{(w^2+v^2-u^2)(w^2+u^2-v^2)}}{2uv} \\ \sin\psi &= \frac{\sqrt{(u^2+w^2-v^2)(u^2+v^2-w^2)}}{2vw}. \end{aligned} \right.$$

§. 396.
Isometrische Projection.

Als einen besonderen Fall der axonometrischen Projection heben wir die **isometrische** Projection hervor, bei welcher die Axen des Axenkreuzes zu einander das Verhältniß 1 : 1 : 1 haben; wir wollen bei dieser Bedingung die Länge der Axen suchen, die Drehungswinkel α und β, durch welche die Lage des Axensystems im Raume bestimmt wird, und die Winkel φ und ψ berechnen, welche man zur Construction des Axenkreuzes braucht. Jede Axe des Axensystems im Raume ist gleich 1.

Da $u = v = w$ sein soll, so erhält man zunächst aus II. (in §. 395.):

$$3u^2 = 2,$$

folglich ist:

$$(1.) \qquad u = v = w = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Aus III. ergiebt sich:

$$\sin\alpha = \frac{1}{u} \cdot \frac{u}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad \text{folglich ist}$$

$$(2.) \qquad \alpha = 45^\circ.$$

Ferner folgt ebenfalls aus III.:

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \text{und hieraus}$$

(3.) $\beta = 35^\circ\ 15'\ 52''$.

Die Winkel φ und ψ ergeben sich aus IV.; es wird

$$\sin\varphi = \sin\psi = \tfrac{1}{2}, \text{ folglich}$$

(4.) $\varphi = \psi = 30^\circ$.

Auch unmittelbar aus der Figur folgt dies. Das Dreieck NMP wird gleichseitig, jeder Winkel also 60°, der halbe 30°. Die Linie AQ fällt mit der Linie AP zusammen, so daß also die Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks NMP (oder die Höhen) die Richtungen der Axen des Axenkreuzes sind.

Aus $u = v = w$ folgt noch, daß man bei der isometrischen Projection, um alle Linien im Raume, welche mit einer der drei Axen des Axensystems parallel sind, aus ihren Projectionen messen zu können, nur einen Maßstab nöthig hat.

Anmerkung. Der Leser sei darauf aufmerksam gemacht, daß man das Verhältniß der Axen des Axenkreuzes nicht beliebig geben kann. Da man jede Axe des Axensystems im Raume $= 1$ gesetzt hat, keine Axe aber mit der Projectionsebene parallel sein soll, so muß $u < 1$, $v < 1$ und $w < 1$ sein. Angenommen, es soll sich verhalten

$$u : v : w = n : m : p,$$

so folgt $v = \frac{m}{n} u$ und $w = \frac{p}{n} u$; folglich ist

$$u^2 + \left(\frac{m}{n} \cdot u\right)^2 + \left(\frac{p}{n} \cdot u\right)^2 = 2, \text{ daher:}$$

1) $$u = \sqrt{\frac{2n^2}{n^2 + m^2 + p^2}}$$

2) $$v = \sqrt{\frac{2m^2}{n^2 + m^2 + p^2}}$$

3) $$w = \sqrt{\frac{2p^2}{n^2 + m^2 + p^2}}.$$

Aus $u < 1$, $v < 1$ und $w < 1$ ergiebt sich die Bedingung:

$$m^2 + p^2 > n^2$$
$$n^2 + p^2 > m^2$$
$$n^2 + m^2 > p^2.$$

Hieraus folgt aber, daß sich immer ein Dreieck mit den Seiten n^2, m^2 und p^2, also auch mit den Seiten u^2, v^2 und w^2, construiren läßt.

Dritter Abschnitt.

Die Coordinaten-Theorie.

Einleitung.

§. 397.

Die Coordinaten-Theorie (auch Coordinaten-Geometrie) hat den Zweck, die Lage, Größe, überhaupt die Eigenschaften der Raumgrößen durch Rechnung zu finden, und bringt sie zu diesem Zwecke mit drei (gewöhnlich auf einander senkrechten) Coordinatenebenen in Verbindung, wenn sie im Raume sich befinden, und mit zwei Coordinatenaxen, wenn sie in einer Ebene liegen. Die Verbindung dieser Raumgrößen mit den Coordinatenebenen und Coordinatenaxen geschieht durch Coordinaten, Projectionen, Winkel und Grundschnitte, und aus dieser Verbindung ergeben sich bestimmte Gesetze, welche die Abhängigkeit aller dieser Stücke und der Raumgrößen selbst von einander lehren und die Berechnung unbekannter Stücke aus gegebenen gestatten. Sind z. B. zwei Punkte P und Q durch ihre Coordinaten, d. h. durch ihre Abstände von drei Coordinatenebenen, gegeben, so sind beide Punkte bestimmt; es muß daher möglich sein, die Länge der Linie PQ zu berechnen, die Länge ihrer Projectionen auf die drei Coordinatenebenen, die Winkel, welche sie mit diesen Ebenen bildet, u. s. w. Mit diesen allgemeinen Gesetzen beschäftigt sich das erste Kapitel.

§. 398.

Ein Punkt im Raume ist durch seine drei Coordinaten, ein Punkt in einer Ebene durch zwei Coordinaten bestimmt. Anstatt nun diese Coordinaten, z. B. x, y und z für einen Punkt im Raume, unmittelbar zu geben, könnte man drei Gleichungen zwischen x, y und z geben; aus ihnen würde man diese Coordinaten entwickeln und so den Punkt finden können. Sind diese Gleichungen höhere, so können durch sie mehrere Punkte bestimmt sein, ja unendlich viele Punkte, wenn

die Gleichungen transcendente sind; aber immer würden sich, wenn auch unendlich viele, doch isolirte Punkte ergeben, die mit einander nur durch ihren gemeinschaftlichen Ursprung aus denselben Gleichungen zusammenhängen würden. Anders aber ist es, wenn zur Bestimmung der Coordinaten diophantische Gleichungen gegeben sind. Bezeichnen z. B. x und y die Abstände eines Punktes P in einer Ebene von zwei Axen, und ist zur Bestimmung der Coordinaten x und y zwischen ihnen nur eine, etwa einfache, Gleichung gegeben, so bestimmt eine solche Gleichung auch unendlich viele Punkte (wie in dem Falle oben), aber diese Punkte sind nicht isolirte, sondern liegen stetig neben einander, d. h. sie sind die Punkte einer Linie. Denn entwickelt man aus der gegebenen einfachen Gleichung y, so ist y eine stetige Function von x, und legt man also dem x stetig auf einander folgende Werthe bei, so ändert sich y auch stetig, wodurch dann der Punkt ebenfalls stetig seine Lage ändert, also eine Linie beschreibt. In einem solchen Falle nennt man die Gleichung zwischen den Coordinaten x und y die Gleichung der Linie. Aehnlich kann man im Raume schließen. Hat man zwischen den Coordinaten x, y und z eines Punktes im Raume nur zwei Gleichungen, oder nur eine, so sind durch diese diophantischen Gleichungen auch im Allgemeinen unendlich viele stetig neben einander liegende Punkte gegeben, die also eine gerade oder krumme Linie, oder eine ebene oder krumme Fläche bestimmen.

Die Eigenschaften solcher durch diophantische Gleichungen zwischen den Coordinaten eines Punktes gegebenen Linien oder Flächen hängen eng mit den Eigenschaften dieser Gleichungen zusammen, und hierdurch wird es möglich, die geometrische Untersuchung der Raumgrößen auf die Untersuchung ihrer Gleichungen, also auf arithmetische Untersuchungen zurückzuführen. Dehnt man diese Untersuchungen auf beliebige Linien und Flächen aus, so überschreitet man die Grenzen der Coordinaten-Theorie und gelangt in das umfassendere Gebiet der analytischen Geometrie, zu welchem auch die Kegelschnitte gehören; die Coordinaten-Theorie erstreckt ihre Untersuchungen nur auf die elementarsten Formen, namentlich auf die gerade Linie, die Kreislinie, die Ebene und die Kugeloberfläche, welche Raumgrößen sich sehr einfach durch algebraische Gleichungen des ersten und zweiten Grades bestimmen lassen. Mit diesen Anwendungen der Algebra auf Raumgrößen in der Ebene, namentlich also auf die gerade Linie und auf die Kreislinie, beschäftigt sich das zweite Kapitel, mit den Anwendungen auf Raumgrößen im Raume, namentlich auf die gerade Linie im Raume, auf die Ebene und auf die Kugeloberfläche, das dritte Kapitel.

Erstes Kapitel.

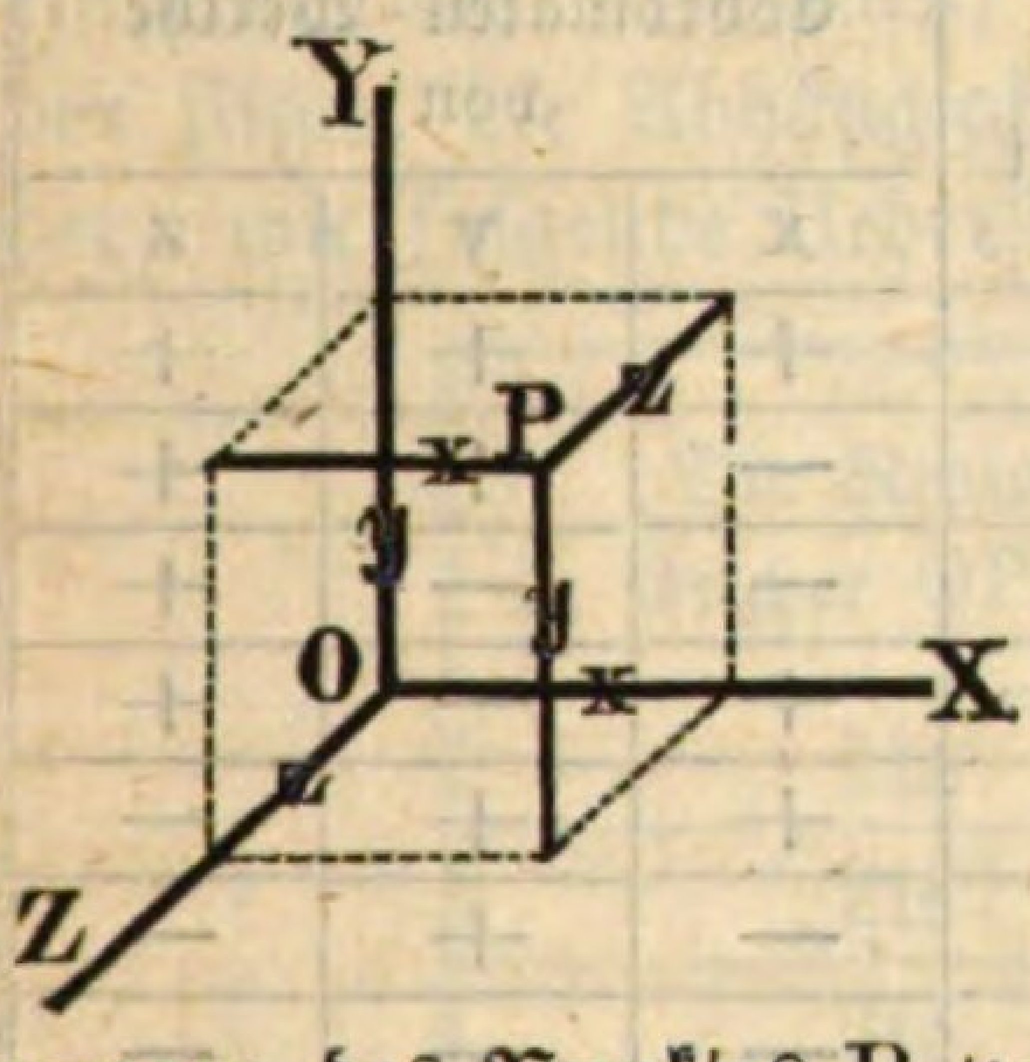
Allgemeine Gesetze, welche aus der Beziehung der Raumgrößen auf ein Coordinaten-System entspringen.

§. 399.

Der Punkt in Beziehung auf ein Coordinaten-System.

Wir denken uns im Raume drei auf einander senkrechte, von einem Punkt O ausgehende Linien OX, OY und OZ, die wir auch nur durch X, Y und Z bezeichnen, und legen durch je zwei derselben eine Ebene. Diese Ebenen, XY, XZ und YZ, nennen wir die Coordinatenebenen (auch Projectionsebenen) und ihre Durchschnittslinien X, Y und Z die Coordinatenaxen; diese Ebenen und Axen bilden ein Coordinaten-System. Die Ebene XZ wollen wir uns horizontal, die beiden anderen also vertical vorstellen.

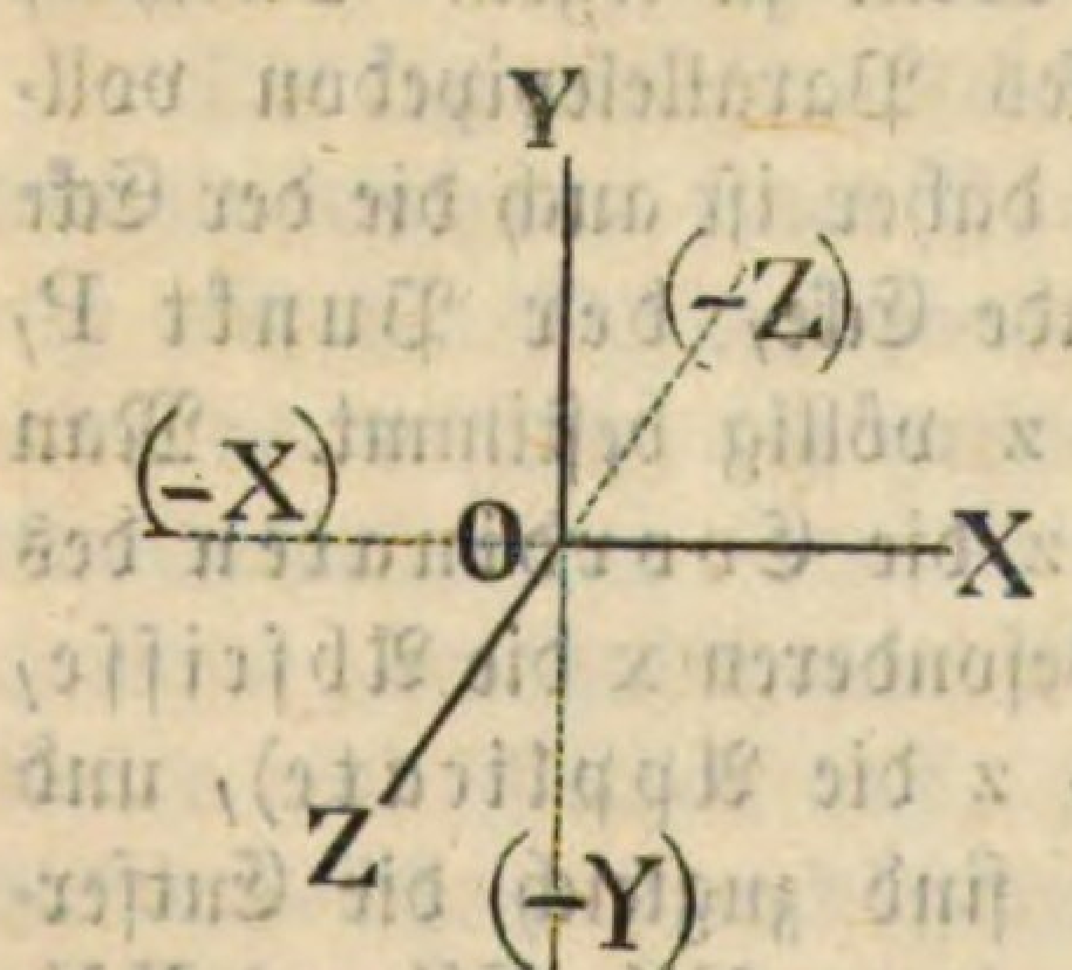
Denken wir uns von O aus auf die drei Axen X, Y und Z bezüglich die Längen x, y und z abgetragen, so können wir ein rechtwinkliges Parallelepipedon construiren, in welchem x, y und z drei in einer Ecke (O) zusammenstoßende Kanten sind; wir brauchen nur durch den Endpunkt jeder Länge eine auf der zugehörigen Axe senkrecht stehende Ebene zu legen. Durch x, y und z ist dieses Parallelepipedon vollständig bestimmt; daher ist auch die der Ecke O gegenüberliegende Ecke, der Punkt P, durch x, y und z völlig bestimmt. Man nennt x, y und z die Coordinaten des Punktes P (im Besonderen x die Abscisse, y die Ordinate, z die Applicate), und diese Coordinaten sind zugleich die Entfernungen des Punktes P von den Coordinatenebenen YZ, XZ und XY, weil im Parallelepipedon parallele Kanten gleich lang sind. Der Punkt O, der Durchschnittspunkt der Axen, heißt der Anfangspunkt der Coordinaten.



Denken wir uns die Axen über O verlängert, und auch die Coordinatenebenen über die Axen ins Unendliche verbreitet, so theilen diese Ebenen den Raum in acht Regionen (Raum-Octanten, körperliche Winkel). Um nun den Punkt P durch seine Coordinaten bestimmen zu können, wenn er in jeder beliebigen Region liegt, legen wir den Coordinaten positive und negative Werthe bei (vgl. §. 183.) und setzen fest, daß von O aus x auf die X-Axe nach rechts oder

links, y auf die Y-Axe nach oben oder unten, z auf die Z-Axe nach vorn oder hinten hingetragen werden soll, je nachdem diese Coordinaten positiv oder negativ sind. Diesen Gegensatz in Bezug auf die Richtung werden wir auch bei den Axen selbst beachten. Jede Axe erstreckt sich von O aus nach zwei entgegengesetzten Richtungen; wir unterscheiden eine positive und eine negative Axen-Richtung von einander, bezeichnen erstere entweder nur durch X, Y und Z, oder durch (+X), (+Y) und (+Z), die negative Richtung der Axen aber durch (—X), (—Y) und (—Z). Bei der angegebenen Folge der drei Axen sind positiv ihre Richtungen nach rechts, oben und vorn, negativ ihre Richtungen nach links, unten und hinten. Hiernach ist also eine positive Ordinate y auf (+Y), hingegen eine negative Ordinate y auf (—Y) abzutragen.

Hieraus folgt nun, daß jeder Punkt P im Raume durch seine positiven oder negativen Coordinaten vollkommen bestimmt werden kann, gleichviel, in welcher Region er liegt; denn immer läßt sich das rechtwinklige Parallelepipedon construiren, dessen O gegenüberliegende Ecke P ist, und dies Parallelepipedon liegt in derselben Region, in welcher P liegt; wir werden die Regionen in folgender Ordnung als die 1ste, 2te, u. s. w. bis 8te Region bezeichnen:



Die Region, in welcher P liegt.	Coordinaten-Werthe von		
	x	y	z
1te	+	+	+
2te	—	+	+
3te	—	—	+
4te	+	—	+
5te	+	+	—
6te	—	+	—
7te	—	—	—
8te	+	—	—

Nach dieser Bezeichnung liegt z. B. die zweite Region links, oben, vorn; die achte: rechts, unten, hinten.

Ist eine Ordinate, z. B. z, gleich Null, so kann der Punkt P zwar nicht mehr als Ecke eines rechtwinkligen Parallelepipedons betrachtet werden, er ist aber doch völlig bestimmt. Da nämlich z der Abstand des Punktes von der Ebene XY ist, so folgt aus $z = 0$, daß P in der Ebene XY liegt; x und y sind dann in dieser Ebene seine Abstände von den Axen Y und X. — Sind zwei Coordinaten gleich Null, z. B. $z = 0$ und $y = 0$, so liegt der Punkt gleichzeitig in zwei

Coordinatenebenen XY und XZ, d. h. in ihrer Durchschnittslinie X, und die Abscisse x ist dann sein Abstand vom Anfangspunkt O der Coordinaten. — Sind alle drei Coordinaten gleich Null, so fällt der Punkt P in O.

§. 400.

Lage der geraden Linie zu den Axen eines Coordinaten-Systems.

Geht vom Durchschnittspunkt O der Coordinatenaxen eine gerade Linie OP in den Raum hinein, so daß O ein Endpunkt der Linie ist, während sie nach P hin unbegrenzt sein kann, so ist die Lage dieser Linie völlig bestimmt, wenn man die drei Winkel kennt, welche sie mit den Axen OX, OY und OZ bildet. Unter den Winkeln, welche OP mit den Axen bildet, sollen aber immer die Winkel gemeint sein, welche sie mit den positiven Richtungen der Axen (und nicht mit den negativen) bildet, und zwar immer die concaven Winkel (nicht die convexen). Bildet also OP mit den Axen X, Y und Z resp. die Winkel α, β und γ, so ist

$$\alpha = \measuredangle POX, \quad \beta = \measuredangle POY, \quad \gamma = \measuredangle POZ,$$

und diese Winkel liegen dann immer zwischen den Grenzen $0°$ und $180°$. Je nachdem α, β und γ spitz oder stumpf sind, liegt OP in einer der acht Regionen, und zwar erkennt man leicht unmittelbar aus der Figur die Abhängigkeit der Region und der Winkel von einander, wie folgende Uebersicht sie angiebt:

Die Region, in welcher OP liegt.	α	β	γ
1te	spitz	spitz	spitz
2te	stumpf	spitz	spitz
3te	stumpf	stumpf	spitz
4te	spitz	stumpf	spitz
5te	spitz	spitz	stumpf
6te	stumpf	spitz	stumpf
7te	stumpf	stumpf	stumpf
8te	spitz	stumpf	stumpf

Giebt man die Lage eines Punktes P der Linie OP durch seine Coordinaten x, y, z, so ist die Lage von OP bestimmt, daher sind es auch die Winkel α, β und γ. Hieraus folgt, daß zwischen den Coordinaten und den Winkeln ein bestimmter Zusammenhang Statt finden

muß. Die vorstehende Tabelle, wenn man sie mit der Tabelle im vorigen §. vergleicht, giebt vorläufig den Zusammenhang: je nachdem eine der Coordinaten des Punktes P (z. B. x) positiv, oder negativ ist, muß der Winkel (α), den OP mit der zugehörigen Axe bildet (also mit X), spitz, oder stumpf sein.

Sind nur zwei von den Winkeln α, β und γ gegeben, z. B. α und β, so ist die Lage der Linien OP durch sie nicht bestimmt; aber diese Lage ist auch keineswegs ganz unbestimmt. Denn denkt man sich die Linie OP so um die Axe X bewegt, daß sie immer mit X den Winkel α bildet, und dann auch so um die Axe Y bewegt, daß sie immer mit Y den Winkel β bildet: so beschreibt OP beide Mal einen Kegelmantel, und nur die zwei Durchschnittslinien dieser beiden konischen Flächen bilden zugleich mit X den Winkel α und mit Y den Winkel β; daher muß eine derselben OP sein. Weil aber die eine Durchschnittslinie mit der Axe Z einen spitzen, die andere einen stumpfen Winkel bildet — denn die eine Durchschnittslinie muß diesseits, die andere jenseits der Ebene XY liegen (folgt indirect aus §. 281. Nr. 3.) —, so erkennt man, daß, wenn α und β gegeben sind, γ nicht mehr beliebig gegeben werden kann, daß vielmehr zur Bestimmung der Lage von OP die Bedingung genügt, γ soll spitz, oder soll stumpf sein.

Aus dem Gesagten folgt, daß die Winkel α, β und γ von einander abhängig sind, und das Gesetz ihrer Abhängigkeit von einander zu finden, ist daher eine uns nöthige Untersuchung.

Ist einer der drei Winkel α, β, γ gleich Null oder gleich 180° gegeben, so ist jeder der beiden anderen gleich 90°, und die Linie OP fällt dann in die eine Axe; sie fällt z. B. in die Axe (+X), wenn $\alpha = 0$ ist, und in die Axe (—X) wenn $\alpha = 180°$ ist.

Zusatz. Auch wenn eine Linie PQ die Axen gar nicht schneidet, spricht man doch von den Winkeln, welche sie mit den Axen bildet, und versteht unter diesen Winkeln diejenigen, welche eine durch den Anfangspunkt O der Coordinaten mit PQ parallel gelegte Linie mit den Axen bildet. (Dieselben Winkel kann man auch erzeugen, wenn man durch einen Punkt der Linie PQ mit den Axen Parallelen zieht.) Der Leser sei aber darauf aufmerksam gemacht, daß jede Linie PQ im Raume ebenfalls zwei entgegengesetzte Richtungen zeigt, nämlich die Richtung von P nach Q, und die von Q nach P hin. Wir werden künftig diese zwei Richtungen durch die Stellung der Buchstaben markiren, also die Richtung PQ von der Richtung QP unterscheiden. Um die Winkel zu finden, welche eine dieser Richtungen mit den Axen bildet, muß man durch O mit ihr eine gleichlaufend-parallele Linie ziehen (vergl. §. 14.); liegt z. B. die mit PQ durch O parallel

gezogene Linie in der ersten Region, so liegt die mit QP parallele Linie in der siebenten Region.

§. 401.
Lage einer geraden Linie zu den Coordinatenebenen eines Coordinaten-Systems.

Die Lage einer Linie OP, welche von dem Durchschnittspunkt O der Axen in den Raum hineingeht, ist auch durch die Winkel bestimmt, welche sie mit den Coordinatenebenen bildet, wie weiter unten bewiesen werden wird. Diese Neigungswinkel liegen immer zwischen den Grenzen 0° und 90°, sie können aber auf der einen oder anderen Seite jeder Coordinatenebenen liegen. Zur Bestimmung der Lage einer Linie durch diese Winkel müssen wir also bei jeder Coordinatenebene ihre zwei Seiten von einander unterscheiden. Am einfachsten geschieht dies durch Anschluß an die Coordinatenaxe, welche auf jeder Coordinatenebene senkrecht steht. Nehmen wir z. B. die Ebene YZ, die wir uns hierbei über die Axen Y und Z verbreitet denken wollen. Die Axe X steht auf ihr senkrecht, und auf einer Seite der Ebene YZ liegt die positive, auf der andern die negative Axenrichtung der Axe X. Dem entsprechend unterscheiden wir eine positive Seite der Ebene YZ von ihrer negativen, und dehnen diese Unterscheidung auf jede Coordinatenebene aus, d. h. wir nennen die Seite jeder Coordinatenebene ihre positive Seite, auf welcher die positive Axenrichtung der auf ihr senkrecht stehenden Axe liegt; die andere Seite ist ihre negative. Die Bezeichnung »positiv« und »negativ« kommt also bei der Ebene YZ den Seiten rechts und links, beider Ebene XZ den Seiten oben und unten, endlich bei der Ebene XY den Seiten vorn und hinten zu.

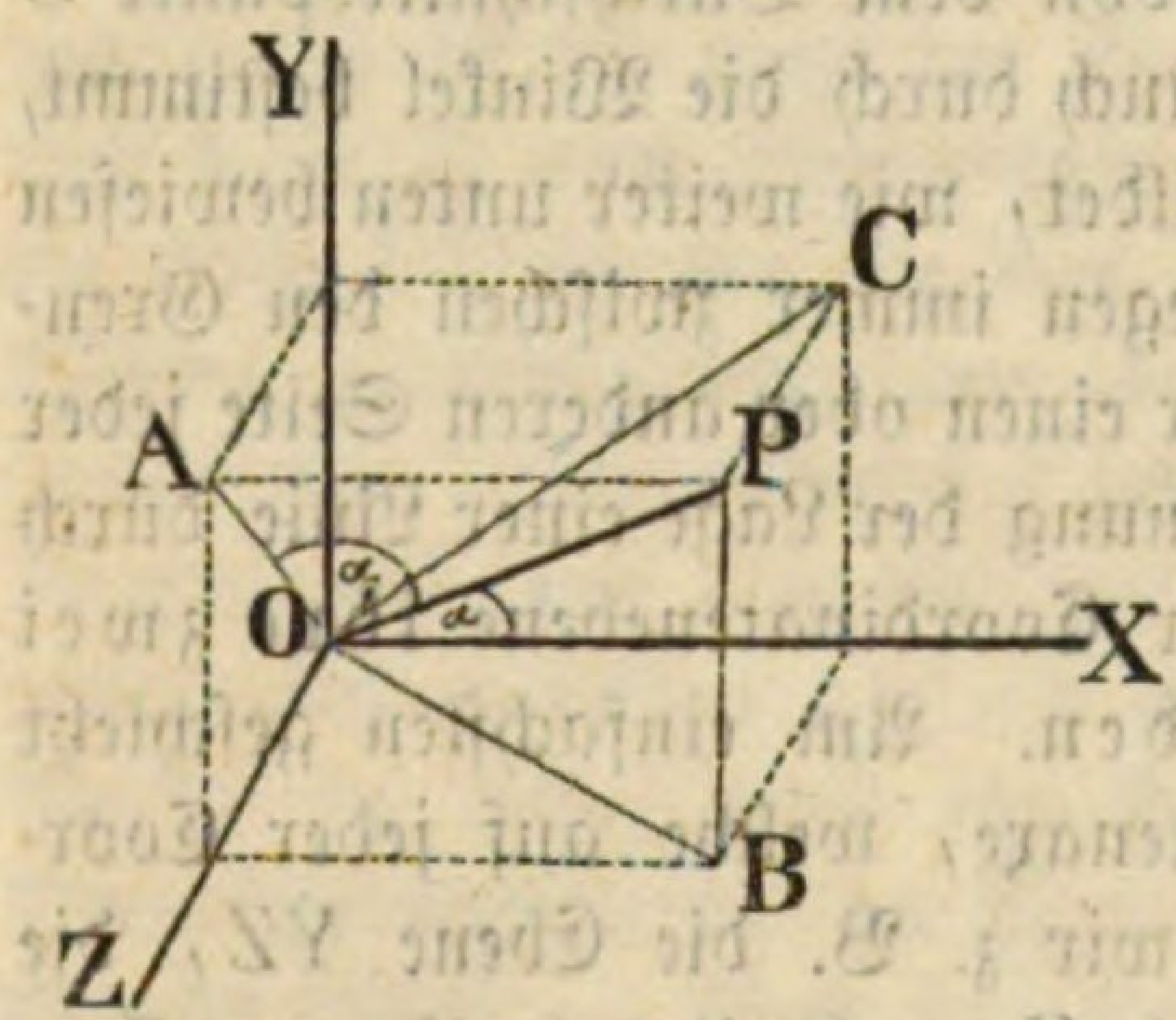
Die Neigungswinkel einer Linie OP mit den Coordinatenebenen YZ, XZ und XY bezeichnen wir resp. durch α_1, β_1 und γ_1 und setzen fest, daß diese Winkel positiv oder negativ sein sollen, je nachdem sie auf der positiven oder negativen Seite der Coordinatenebene liegen. Unter dieser Voraussetzung findet, wenn α, β und γ die Winkel bezeichnen, welche OP resp. mit den Axen X, Y und Z bildet, das Gesetz Statt: der Winkel, den OP mit einer Axe bildet, ergänzt den (positiven oder negativen) Winkel, welchen OP mit der Coordinatenebene bildet, auf welcher diese Axe senkrecht steht, zu 90°, d. h. es ist

$$(1.)\quad \alpha + \alpha_1 = 90°;\quad \beta + \beta_1 = 90°;\quad \gamma + \gamma_1 = 90°.$$

Dies Gesetz muß für alle Lagen der Linie OP bewiesen werden; bei dem Beweise muß auch untersucht werden, in welchen Fällen α_1,

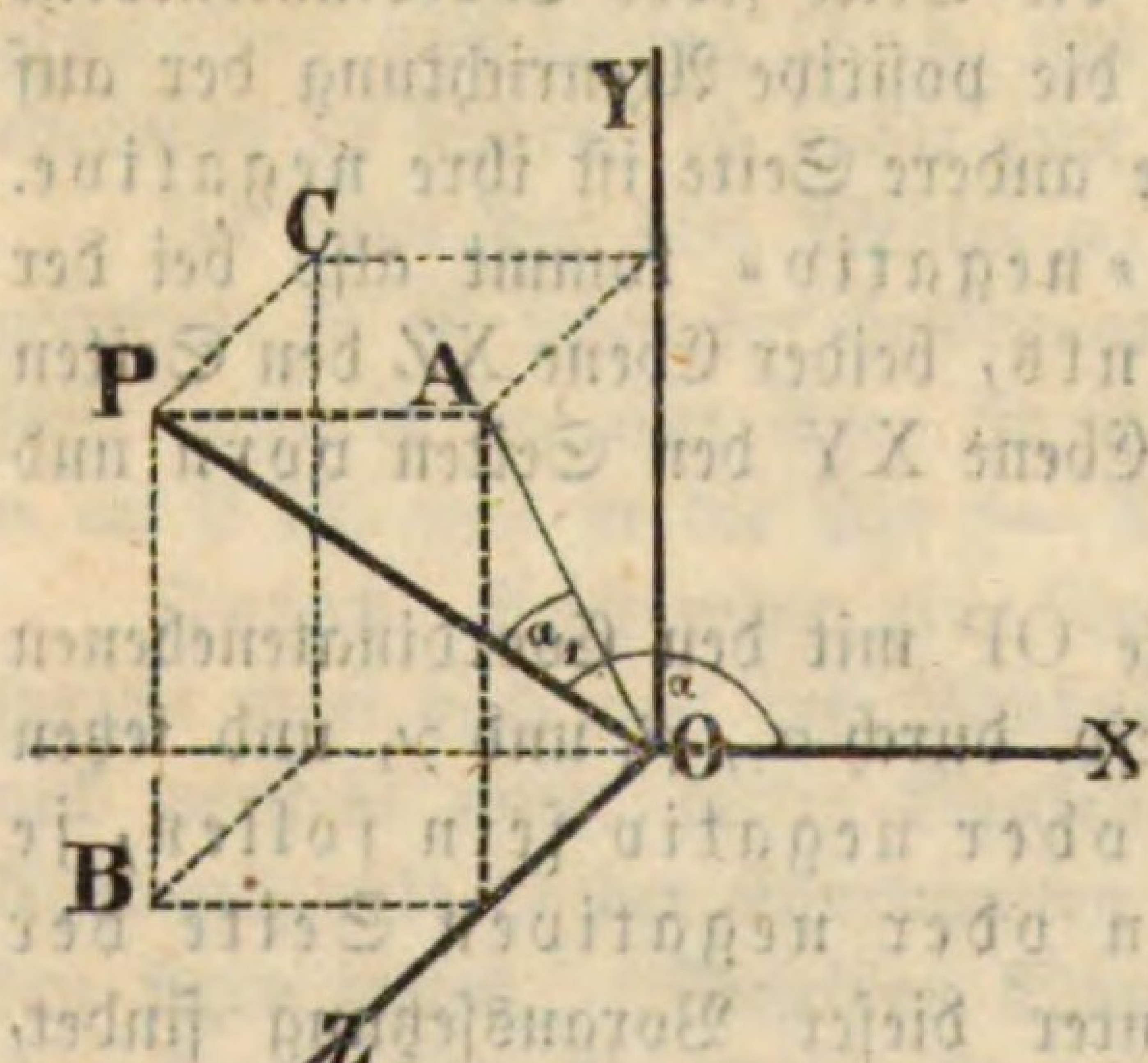
β_1 und γ_1 positiv, in welchen sie negativ sind. Man findet aber, daß α_1, β_1 und γ_1 immer positiv, oder negativ sind, je nachdem resp. α, β und γ spitz, oder stumpf sind. Zur bequemen Uebersicht kann die Tabelle in §. 399. dienen; man braucht in diese Tabelle nur α_1, β_1 und γ_1 resp. statt der Coordinaten x, y und z zu setzen.

Die nachfolgende Figur zeigt die Linie OP in der ersten Region;



von P aus sind die Coordinaten PA, PB und PC auf die Coordinatenebenen gefällt; folglich ist $\measuredangle POA = \alpha_1$, aber $\measuredangle POX = \alpha$. Da nun OX senkrecht auf der Ebene YZ steht, so ist $\measuredangle XOA = 90°$; daher hat man, um die Behauptung $\alpha + \alpha_1 = 90°$ zu beweisen, nur zu zeigen nöthig, daß die Linien OA, OP und OX in derselben Ebene liegen. Dies ist aber der Fall, weil $OX \# AP$ ist. Da der Winkel POA auf der positiven Seite der Ebene YZ liegt, so ist er positiv in Rechnung zu bringen. — Ganz ebenso folgt $\measuredangle POY + \measuredangle POB = 90°$ oder $\beta + \beta_1 = 90°$, und $\measuredangle POZ + \measuredangle POC = 90°$ oder $\gamma + \gamma_1 = 90°$.

Die nächste Figur zeigt die Linie OP in der zweiten Region; von



P aus sind wieder auf die Coordinatenebenen die Senkrechten PA, PB und PC gefällt. Zieht man OA, so ist $\measuredangle POA$ der Neigungswinkel der Linie OP zur Coordinatenebene YZ. Dieser Winkel liegt aber auf der negativen Seite der Ebene YZ, folglich ist $\alpha_1 = -\measuredangle POA$. Weil nun wieder OX, OA und OP in derselben Ebene liegen (denn es ist $PA \# X$) und $\measuredangle POX = \alpha$, aber $\measuredangle XOA = 90°$ ist, so folgt

$$\alpha - \measuredangle POA = 90°, \text{ daher auch}$$
$$\alpha + \alpha_1 = 90°.$$

Denkt man sich OB und OC gezogen, so ist $\measuredangle POB = \beta_1$ und $\measuredangle POC = \gamma_1$ und diese Winkel sind positiv; man hat für sie, wie im vorhergehenden Falle, $\beta + \beta_1 = 90°$ und $\gamma + \gamma_1 = 90°$.

Die Beweise für die andern Lagen der Linie OP zeigen keine Abweichungen von den beiden betrachteten Fällen und mögen dem Leser überlassen bleiben.

Aus den Gleichungen in (1.) folgt nun

$$(2.)\quad \begin{cases} \alpha_1 = 90° - \alpha \\ \beta_1 = 90° - \beta \\ \gamma_1 = 90° - \gamma \end{cases}$$

und aus ihnen ergiebt sich noch

$$(3.)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \sin\alpha \\ \cos\beta_1 = \sin\beta \\ \cos\gamma_1 = \sin\gamma. \end{cases}$$

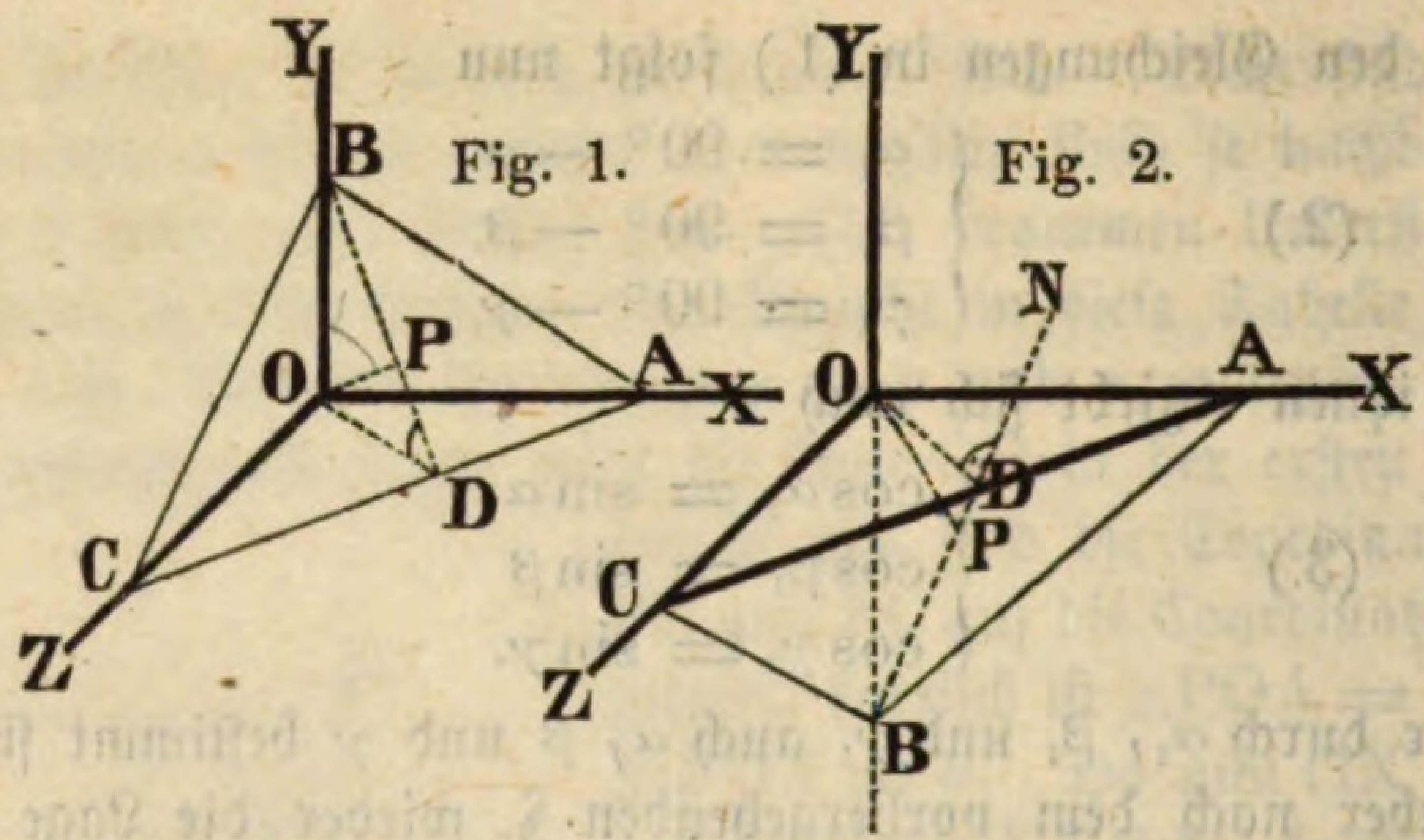
Weil aber durch α_1, β_1 und γ_1 auch α, β und γ bestimmt sind, diese Winkel aber nach dem vorhergehenden §. wieder die Lage von OP bestimmen, so folgt hieraus, daß auch durch die Winkel α_1, β_1 und γ_1 die Lage von OP vollkommen bestimmt ist. Wir fanden aber auch, daß α, β und γ von einander abhängig sind; daher müssen auch α_1 β_1 und γ_1 von einander abhängig sein, und das Gesetz ihrer Abhängigkeit von einander zu finden, ist wieder eine uns nöthige Untersuchung.

§. 402.

Lage einer Ebene zu einem Coordinaten-System.

Schneidet eine Ebene F die Coordinatenebenen, so bildet sie mit jeder derselben vier Winkel, von denen immer zwei als Scheitelwinkel einander gleich sind. Spricht man nun von dem Winkel, welche die Ebene F mit einer Coordinatenebene bildet, so soll von diesen vier Winkeln immer nur der eine gemeint sein, nämlich derjenige, welcher auf der positiven Seite der Coordinatenebene liegt und der Axe zugekehrt ist, welche auf dieser Ebene senkrecht steht; dieser Winkel ist immer positiv und liegt zwischen den Grenzen 0° und 180°.

Schneidet die Ebene F die Axen X, Y und Z resp. in den Punkten A, B und C, so kann das Δ ABC in jeder der acht Regionen liegen. Sehen wir zunächst von dem Falle ab, in welchem die Ebene auf einer Coordinatenebene senkrecht steht, und bezeichnen wir die Winkel, welche die Ebene (ABC) mit den Coordinatenebenen YZ, XZ und YZ bildet resp. mit α, β und γ, so sind diese Winkel spitz oder stumpf, je nachdem Δ ABC die auf der Ebene senkrechte Axe in einem Punkte ihrer positiven oder ihrer negativen Richtung schneidet. Fig. 1. zeigt das Δ ABC in der ersten Region. Um den Neigungswinkel dieses Dreiecks mit jeder Coordinatenebene zu construiren, braucht man nur von O aus auf den zugehörigen Grundschnitt eine Senkrechte zu fällen und ihren Fußpunkt mit dem Punkte zu verbinden, in welchem Δ ABC die auf der Coordinatenebene senkrechte Axe schneidet. Die Figur enthält den Winkel β, welchen Δ ABC mit der Ebene XZ bildet. Es ist



OD ⊥ AC gefällt, und D ist mit B verbunden; ∡BDO ist gleich β. Fig. 2. zeigt das △ABC in der vierten Region. Es ist auch OD ⊥ AC gefällt, und D ist mit B verbunden. Der ∡BDO würde, wenn man von seiner Lage absieht, der Neigungswinkel der Ebene ABC zur Ebene XZ sein; da er aber auf der negativen Seite der Ebene XZ liegt, so ist nicht er, sondern sein Nebenwinkel, der ∡ ODN, gleich β; er ist von den beiden Winkeln, welche der oberhalb der Ebene XZ liegende Theil der Ebene F mit XZ bildet, derjenige, welcher der Axe OY zugekehrt ist. Die Winkel α und γ construirt man, wenn man von O auf BC und AB Lothe fällt und ihre Fußpunkte resp. mit A und C verbindet; beide Winkel liegen auf der positiven Seite der zugehörigen Coordinatenebene. — In Fig. 1., wo △ABC die positive Richtung der Axe Y schneidet, hat sich ∡β spitz ergeben als Winkel in dem rechtwinkligen △BOD; in Fig. 2., in welcher △ABC die negative Richtung der Axe Y schneidet, ist ∡β stumpf; denn sein Nebenwinkel liegt in dem rechtwinkligen △BOD, ist also spitz. In beiden Figuren sind α und γ spitze Winkel. Der Leser möge nun auch für die übrigen Regionen die Winkel α, β und γ construiren, um die Ueberzeugung von Richtigkeit folgender Uebersicht zu erhalten:

Die Region, in welcher △ABC liegt.	α	β	γ
1te	spitz	spitz	spitz
2te	stumpf	spitz	spitz
3te	stumpf	stumpf	spitz
4te	spitz	stumpf	spitz
5te	spitz	spitz	stumpf
6te	stumpf	spitz	stumpf
7te	stumpf	stumpf	stumpf
8te	spitz	stumpf	stumpf

Schneidet die Ebene F nur zwei Axen, z. B. X und Z, ist sie also mit Y parallel, so ist $\beta = 90°$, während α und γ die Winkel sind, welche die Spur von F in der Ebene XZ resp. mit den Axen Z und X bildet. Schneidet F nur eine Axe, z. B. die Axe Y, ist sie also mit X und Z parallel, so ist $\alpha = 90°$, $\beta = 0°$ und $\gamma = 90°$.

In allen Fällen, in denen die Winkel α, β und γ, welche F mit den Coordinatenebenen bildet, bekannt sind, ist doch die Lage von F nicht vollständig bestimmt, weil parallele Ebenen, wenn sie nur das Axensystem in derselben Region schneiden, gleiche Winkel mit den Coordinatenebenen bilden. Um daher F unzweifelhaft zu bestimmen, müßte man etwa noch einen Punkt der Ebene geben. Man erreicht aber diesen Zweck am einfachsten mit Hülfe des folgenden Gesetzes:

Die von dem Durchschnittspunkte (O) der Axen auf die Ebene F gefällte Senkrechte (OP) bildet mit den Axen X, Y und Z dieselben Winkel, welche die Ebene F resp. mit den Coordinatenebenen YZ, XZ und XY bildet.

Giebt man also die Winkel α, β und γ, welche F mit den Coordinatenebenen bildet, und dann noch die Länge der Senkrechten von O bis zur Ebene F, so ist die Ebene F völlig bestimmt. Denn die Winkel α, β und γ bestimmen die Lage der Senkrechten, ihre Länge ist gegeben und durch ihren Endpunkt kann man nur eine auf ihr senkrechte Ebene legen, welche sonach F ist.

Der Beweis des angeführten Gesetzes ist sehr einfach. Hat man (Fig. 1. und Fig. 2.) den Winkel BDO construirt, so steht die Ebene desselben auf ABC senkrecht; folglich muß die von O auf ABC gefällte Senkrechte OP in der Ebene BDO liegen und in der Linie BD ihren Fußpunkt haben. (Da BD eine Höhe des Δ ABC ist, und da man die Construction von OP auch an die Neigungswinkel anschließen kann, welche die Ebene ABC (oder F) mit den beiden andern Coordinatenebenen bildet, so folgt hieraus noch, daß P der Durchschnittspunkt der drei Höhen des Δ ABC ist.) In Fig. 1. hat man nun unmittelbar $\angle$ POY = $\angle$ BDO = β, weil beide Winkel Complemente des $\angle$ DBO sind; in Fig. 2. ist $\angle$ POB = $\angle$ BDO; daher sind auch ihre Nebenwinkel gleich, d. h. $\angle$ POY = $\angle$ ODN = β. Die Beweise für die andern Winkel α und γ, so wie für die andern Regionen, sind den vorstehenden analog und können dem Leser überlassen bleiben. Durch das angeführte Gesetz erklärt sich auch die Uebereinstimmung der Tabelle oben mit der in §. 400., auch folgt aus ihm, daß die Winkel, welche eine Ebene mit den Coordinatenebenen bildet, nicht von einander unabhängig sind, daß vielmehr auf sie dasselbe Gesetz Anwendung finden muß, welches wir für die Abhängigkeit der

Winkel von einander, die eine Linie mit den Axen bildet, noch zu suchen haben.

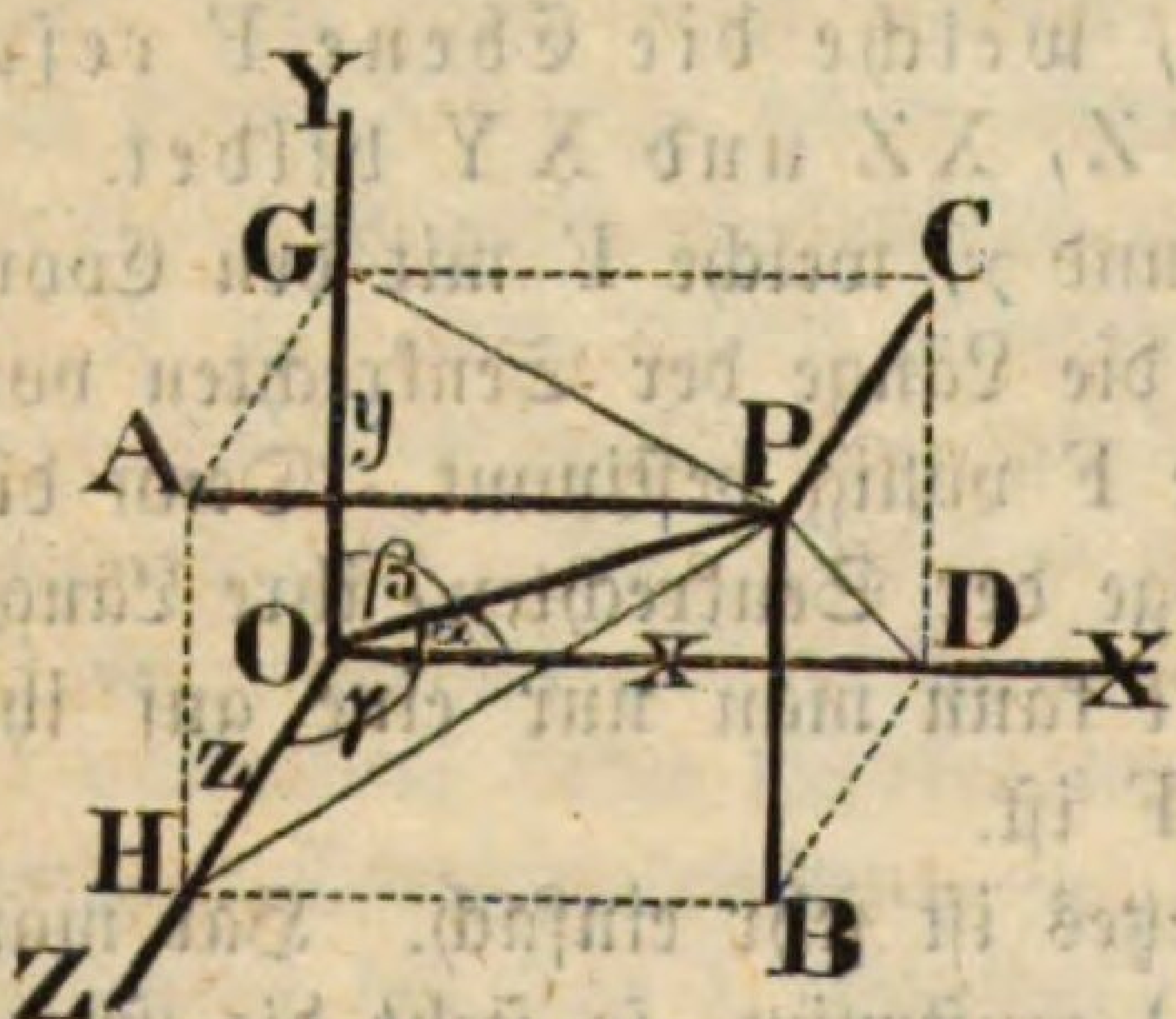
Anmerkung. Was die Winkel betrifft, welche die Ebene F (oder ABC) mit den Coordinatenaxen bildet, so sind sie die Complemente der Winkel α, β und γ, oder ihrer Nebenwinkel, je nachdem α, β und γ spitz, oder stumpf sind. — Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus der Figur.

§. 403.

Aufgabe.

Ein Punkt P im Raume ist durch seine Coordinaten x, y und z gegeben; man soll die Länge der Linie OP berechnen, die Winkel α, β und γ, welche sie mit den Axen X, Y und Z bildet, und die Winkel α_1, β_1 und γ_1, welche sie mit den Coordinatenebenen YZ, XZ und XY bildet.

Auflösung. Indem man durch P drei Ebenen legt, welche die Axen senkrecht schneiden, erhält man das rechtwinklige Parallelepipedon OP, aus dem die gesuchten Stücke zu berechnen sind. Die Linie OP ist Diagonale dieses Parallelepipedons und ist aus den Kanten x, y, z mit Hülfe des Pythagoreischen Lehrsatzes zu berechnen. Man erhält (§. 297. Nr. 2.):



$$\text{I.} \quad OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Um α, β und γ zu finden, ziehe man PD, PG und PH. Die $\Delta\Delta$PDO, PGO und PHO sind rechtwinklig, und in jedem ist OP die Hypotenuse; aus ihnen folgt:

$$1) \quad OP \cdot \cos\alpha = x$$
$$2) \quad OP \cdot \cos\beta = y$$
$$3) \quad OP \cdot \cos\gamma = z.$$

Aus diesen Gleichungen und aus §. 401. (1.) folgt:

$$\text{II.} \left\{ \begin{aligned} \cos\alpha &= \sin\alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\beta &= \sin\beta_1 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\gamma &= \sin\gamma_1 = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{aligned} \right.$$

Man kann aber auch, wenn α, β, γ berechnet sind, α_1, β_1 und γ_1 aus den Gleichungen

$$\alpha + \alpha_1 = 90°; \quad \beta + \beta_1 = 90°; \quad \gamma + \gamma_1 = 90°$$

entnehmen.

Zunächst sei der Leser darauf aufmerksam gemacht, daß $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ immer positiv zu nehmen ist; diese Wurzel giebt die absolute Länge der Linie OP. Man könnte sie allerdings auch negativ nehmen, und diesen negativen Werth so verstehen, daß die Richtung, welche durch die Winkel α, β, γ bestimmt wird, über O zu verlängern und dieser Verlängerung der absolute Werth der Wurzel beizulegen sei; aber für die Winkel α, β und γ ergeben sich in diesem Falle die Supplemente der zuerst gefundenen Winkel, diese Winkel bestimmen daher genau die entgegengesetzte Richtung der Linie OP, folglich fällt ihre Verlängerung über O wieder genau mit ihrer zuerst gefundenen Lage zusammen; man erhält also die erste Auflösung wieder.

Dann aber ist es nothwendig, die Richtigkeit der Auflösung für beliebige positive und negative Werthe der Coordinaten x, y und z nachzuweisen. Wie man hierbei zu verfahren hat, ist in §. 183. ausführlich erläutert worden, und dem Leser kann die Anwendung des dort angegebenen allgemeinen Princips auf den vorliegenden Fall überlassen werden; auf Einzelnes hinzuweisen, wird hier genügen.

In welcher Region auch OP liegen mag, diese Linie ist immer die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der drei Kanten des zugehörigen Parallelepipedons; die Kanten aber sind die absoluten Werthe der Coordinaten, und die Gleichung I. ist sonach immer richtig, wenn man statt x, y, z die absoluten Coordinatenwerthe setzt. Weil aber $(-a)^2 = a^2$ ist, so gestattet die Gleichung eben so wohl das Einsetzen der positiven oder negativen Coordinatenwerthe für x, y und z; das Resultat wird dasselbe, die Gleichung ist allgemein richtig.

Wir kommen nun zu den Gleichungen 1) bis 3), aus denen α, β, γ zu berechnen sind. Nehmen wir den Fall, es sei

$$x = -a,\quad y = -b,\quad z = -c.$$

OP liegt dann in der siebenten Region, und das Parallelepipedon OP hat in dieser Region die Kanten a, b und c; aber OP bildet mit diesen Kanten nicht die Winkel α, β, γ, sondern $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$. Man hat sonach die Gleichungen

$$OP.\cos(180° - \alpha) = a$$
$$OP.\cos(180° - \beta) = b$$
$$OP.\cos(180° - \gamma) = c.$$

Multiplicirt man beide Seiten mit -1, so entsteht:

$$OP.\cos\alpha = -a = x$$
$$OP.\cos\beta = -b = y$$
$$OP.\cos\gamma = -c = z,$$

so daß also die Gleichungen 1) bis 3) auch für diesen Fall richtig sind.

In Bezug auf die Anwendung der Formeln in II. auf Zahlenfälle, ist nur anzuführen, daß α, β und γ spitz oder stumpf, α_1, β_1 und γ_1 aber positiv oder negativ sich ergeben, je nachdem x, y und z positiv oder negativ sind.

Beispiel 1. Der Punkt P ist durch seine Coordinaten $x = -12$, $y = +6$ und $z = -4$ gegeben; man soll OP und die Winkel α, β, γ, welche OP mit den Axen X, Y, Z, so wie die Winkel α_1, β_1, γ_1, welche OP mit den Coordinatenebenen YZ, XZ und XY bildet, berechnen.

Aufl. Man findet:

1) $OP = \sqrt{196} = 14.$

2) $\cos\alpha = -\frac{6}{7}$; $\alpha = 148^\circ\ 59'\ 50''.$

3) $\cos\beta = +\frac{3}{7}$; $\beta = 64^\circ\ 37'\ 23''.$

4) $\cos\gamma = -\frac{2}{7}$; $\gamma = 106^\circ\ 36'\ 5''.$

5) $\alpha_1 = -58^\circ\ 59'\ 50''$; $\beta_1 = +25^\circ\ 22'\ 37''$;
$\gamma_1 = -16^\circ\ 36'\ 5''$. OP liegt in der sechsten Region.

Beispiel 2. Welchen Winkel bildet die Diagonale eines Würfels mit jeder Kante, und welchen mit jeder Seitenfläche?

Aufl. $54^\circ\ 44'\ 8''$ und $35^\circ\ 15'\ 52''$.

§. 404.

Gesetze.

1) Bezeichnen α, β und γ die Winkel, welche eine Linie OP mit den Axen eines Coordinaten-Systems bildet, so ist

$$\text{I.}\quad \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

2) Bezeichnen α_1, β_1 und γ_1 die Winkel, welche eine Linie OP mit den drei Coordinatenebenen bildet, so ist

$$\text{II.}\quad \cos\alpha_1{}^2 + \cos\beta_1{}^2 + \cos\gamma_1{}^2 = 2.$$

3) Bezeichnen α, β und γ die Winkel, welche eine Ebene F mit den drei Coordinatenebenen bildet, so ist

$$\text{III.}\quad \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

Beweis zu I. Sind x, y und z die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der Linie OP, so ist nach §. 403.:

$$OP.\cos\alpha = x$$
$$OP.\cos\beta = y$$
$$OP.\cos\gamma = z.$$

Quadrirt man jede Gleichung und addirt dann alle drei, so entsteht:

$$OP^2(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Nach §. 403. I. ist aber $OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$, folglich ist

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

Beweis zu II. Nach §. 401. (3.) ist, wenn α, β und γ die Winkel bezeichnen, welche OP mit den Axen bildet:

$$\begin{aligned}\cos\alpha_1{}^2 + \cos\beta_1{}^2 + \cos\gamma_1{}^2 &= \sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 \\ &= 3 - (\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2) \\ &= 3 - 1 = 2.\end{aligned}$$

Beweis zu III. Fällt man von O eine Senkrechte auf F, so bildet sie nach §. 402. mit den Axen dieselben Winkel, welche F mit den Coordinatenebenen bildet; daher ist (aus I.):

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

Anmerkung 1. Sind von den Winkeln α, β und γ in I. oder III. zwei gegeben, z. B. α und β, so ist der dritte aus

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2}$$

zu berechnen. Der Radicand dieser Wurzel ist immer in ein Product zu verwandeln; man setze $1 - \cos\alpha^2 = \sin\alpha^2$ und wende eine der Formeln in §. 216. an. Ob die Wurzel positiv oder negativ zu nehmen ist, hängt davon ab, ob γ spitz oder stumpf sein soll; eine Bestimmung hierüber muß, wie schon früher erwähnt wurde, gegeben sein. — Soll einer der Winkel α_1, β_1 und γ_1 in II. aus den beiden andern berechnet werden, so kann man die Berechnung nach §. 401. (1.) auf den oben betrachteten Fall zurückführen.

Anmerkung 2. Geht die Linie, welche mit den Axen die Winkel α, β und γ, oder mit den Coordinatenebenen die Winkel α_1, β_1 und γ_1 bildet, nicht durch O (vergl. §. 400. Zus.), so gelten die Formeln I. und II. ebenfalls; denn sie gelten für die durch O mit jener Linie parallele Linie.

Beispiel 1. Eine Linie bildet mit den drei Coordinatenaxen drei gleiche stumpfe Winkel; wie groß ist jeder?

Antw. 125° 15′ 52″.

Beispiel 2. Eine Linie OP bildet mit der X-Axe einen Winkel von 60°, mit der Y-Axe einen Winkel von 45°, mit der Z-Axe einen stumpfen Winkel. In welcher Region liegt OP, und welchen Winkel bildet OP mit den Coordinatenebenen?

Antw. OP liegt in der fünften Region und bildet
mit der Ebene YZ den Winkel 30°
» » » XZ » » 45°
» » » XY » » —30°.

Beispiel 3. Eine Ebene F schneidet ein Coordinaten-System in der achten Region und bildet mit der Ebene YZ den Winkel 72°

und mit der Ebene XZ den Winkel 120°; welchen Winkel bildet F mit der Ebene XY?

Antw. 144°.

Beispiel 4. Eine Linie OP liegt in der sechsten Region und bildet mit der Ebene YZ den Winkel −16°, mit der Ebene XZ aber den Winkel +46°; welchen Winkel bildet sie mit der Ebene XY?

Antw. −39° 36′ 55,6″.

§. 405.

Aufgabe.

Zwei Punkte P und P_1 sind durch ihre Coordinaten gegeben; man soll die Länge der Linie PP_1 berechnen, die Winkel α_2, β_2 und γ_2, welche PP_1 mit den Coordinatenaxen bildet, und den Winkel φ, welchen OP und OP_1 einschließen.

Auflösung. Die Coordinaten des Punktes P wollen wir mit x, y und z bezeichnen, die des Punktes P_1 mit x_1, y_1 und z_1.

Denkt man sich nun durch den Punkt P drei mit den Axen X, Y und Z gleichlaufend-parallele Linien gelegt, durch je zwei derselben aber eine Ebene, so erhält man ein zweites Coordinaten-System, dessen Anfangspunkt der Coordinaten P ist. In Bezug auf dieses System kann der Punkt P_1 in jeder seiner acht Regionen liegen, aber bei jeder Lage sind seine Coordinaten gleich $x_1 - x$, $y_1 - y$ und $z_1 - z$; hierüber hat der Leser durch Betrachtung der einzelnen Fälle sich zunächst Gewißheit zu verschaffen. Ferner bildet PP_1 mit den Axen des neuen Coordinaten-Systems dieselben Winkel α_2, β_2 und γ_2, wie mit dem ursprünglichen System (vergl. §. 400. Zus.); daher folgt aus §. 403. 1) bis 3):

1) $PP_1 . \cos\alpha_2 = x_1 - x.$

2) $PP_1 . \cos\beta_2 = y_1 - y.$

3) $PP_1 . \cos\gamma_2 = z_1 - z.$

Ferner folgt aus §. 403. I.:

4) $PP_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2.$

5) $OP^2 = x^2 + y^2 + z^2.$

6) $OP_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$

Endlich folgt noch aus dem ΔPOP_1 die Gleichung:

7) $PP_1^2 = OP^2 + OP_1^2 - 2 . OP . OP_1 . \cos\varphi.$

Aus der Gleichung 4), dann aus 1) bis 3) ergiebt sich nun:

$$\text{I. } PP_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

$$\text{II. } \cos\alpha_2 = \frac{x_1 - x}{PP_1}, \quad \text{III. } \cos\beta_2 = \frac{y_1 - y}{PP_1}, \quad \text{IV. } \cos\gamma_2 = \frac{z_1 - z}{PP_1}.$$

Setzt man dann noch in 7) die Werthe für PP_1^2, OP^2 und OP_1^2 aus 4) bis 6) ein, so folgt:

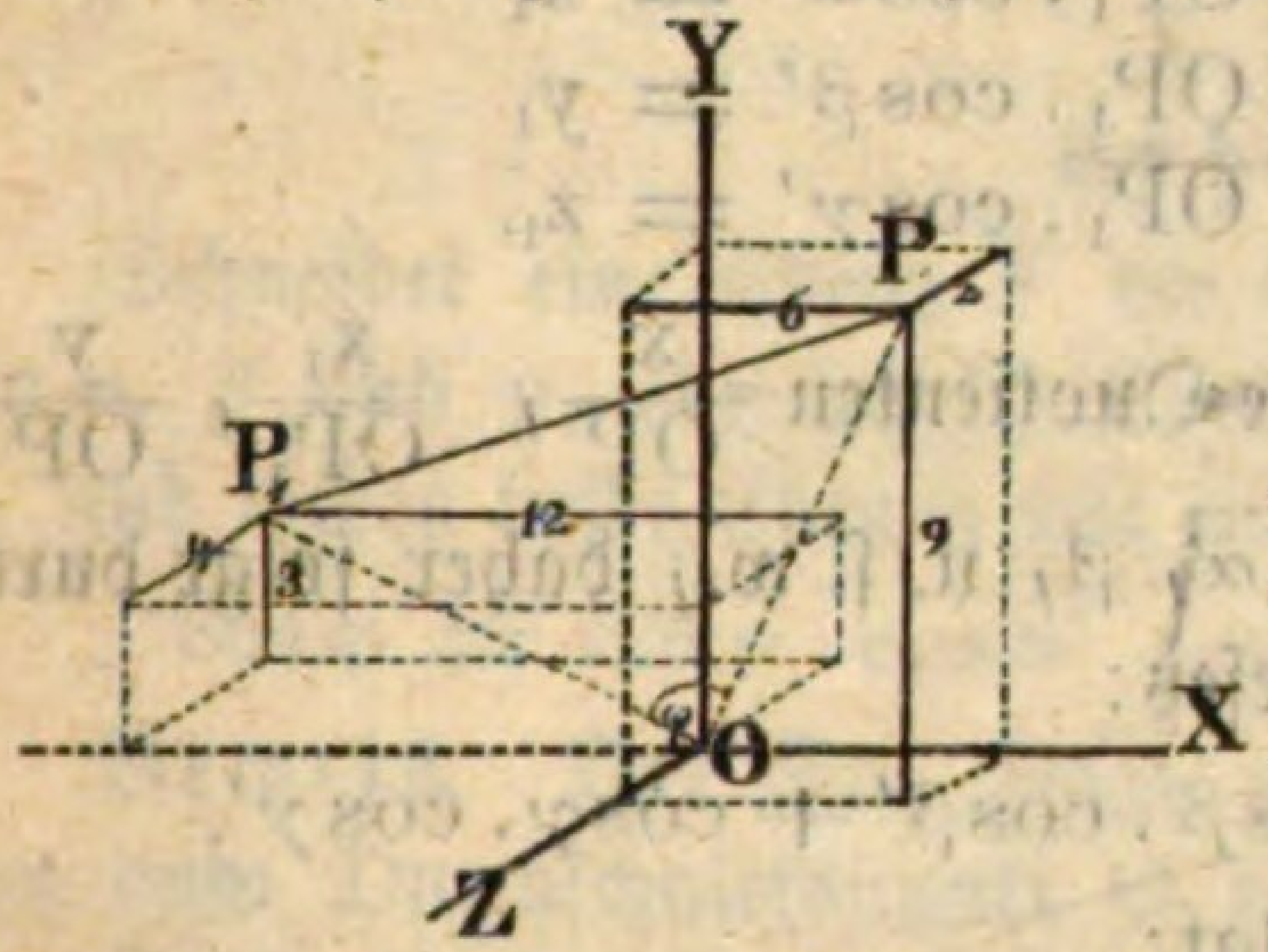
$$2.OP.OP_1.\cos\varphi = x^2 + y^2 + z^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2.$$

Hieraus folgt endlich:

$$\text{V.} \quad \cos\varphi = \frac{x_1.x + y_1.y + z_1.z}{OP.OP_1}.$$

Beispiel. Die Coordinaten des Punktes P (bei einer beliebigen Längeneinheit) sind $x = 6$, $y = 9$, $z = 2$; die Coordinaten eines zweiten Punktes P_1 sind $x_1 = -12$, $y_1 = 3$, $z_1 = -4$; man soll PP_1 berechnen, die Winkel α_2, β_2 und γ_2, welche PP_1 mit den Axen X, Y und Z bildet, und den Winkel φ, welchen OP und OP_1 einschließen.

Auflösung. Man erhält:



1) $PP_1 = 19{,}89975$.
2) $\alpha_2 = 154^\circ\ 45'\ 38''$.
3) $\beta_2 = 107^\circ\ 32'\ 54''$.
4) $\gamma_2 = 107^\circ\ 32'\ 54''$.

Um den Winkel φ zu berechnen, suche man zunächst OP und OP^1; beide Linien werden rational, daher wird auch $\cos\varphi$ rational $\left(-\frac{53}{143}\right)$. Man erhält:

5) $\varphi = 111^\circ\ 45'\ 16''$.

In Bezug auf das durch P mit dem ursprünglichen Coordinaten-System parallel gelegte liegt PP_1 in der siebenten Region, wie dies auch die Figur deutlich zeigt. Hätte man die Winkel gesucht, welche nicht PP_1, sondern P_1P mit den Axen bildet, so würde man die Nebenwinkel der oben gefundenen Winkel erhalten haben.

§. 406.

Lehrsatz.

Bilden zwei Linien l und l' mit den Axen X, Y und Z eines Coordinaten-Systems resp. die Winkel α, β, γ und α', β', γ', und bezeichnet φ den Winkel, welchen l und l' mit einander bilden, so ist:

$$\cos\varphi = \cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta.\cos\beta' + \cos\gamma.\cos\gamma'.$$

Beweis. Der Satz gilt auch dann, wenn l und l' sich nicht schneiden. In diesem Falle versteht man unter dem Winkel, welchen die Linien mit einander bilden, denjenigen, welchen eine durch einen Punkt der einen Linie mit der anderen parallel gelegte Linie mit der ersteren bildet. Denselben Winkel erhält man, wenn man durch den Anfangspunkt O der Coordinaten mit l und l' parallele Linien zieht. — Der Leser sei noch daran erinnert, daß durch die Winkel,

welche l (oder l′) mit den Axen bildet, eine der beiden Richtungen dieser Linie bestimmt bezeichnet ist; es ist diejenige, mit welcher eine von O ausgehende Linie, welche die Axen unter denselben Winkeln α, β, γ schneidet, gleichlaufend-parallel ist.

Man denke sich durch O eine Linie $OP \mp l$ und eine zweite $OP_1 \mp l'$ gelegt, so bildet OP mit den Axen die Winkel α, β, γ, und OP_1 die Winkel α', β', γ'; OP und OP_1 schneiden sich unter dem Winkel φ. Ein beliebiger Punkt P der Linie OP habe die Coordinaten x, y und z, ein Punkt P_1 der Linie OP_1 die Coordinaten x_1, y_1 und z_1; dann ist nach §. 405. V.:

$$1)\ \cos\varphi = \frac{x}{OP}\cdot\frac{x_1}{OP_1} + \frac{y}{OP}\cdot\frac{y_1}{OP_1} + \frac{z}{OP}\cdot\frac{z_1}{OP_1}.$$

Ferner folgt aus §. 403. 1) bis 3):

$$2)\ OP.\cos\alpha = x \qquad 5)\ OP_1.\cos\alpha' = x_1$$
$$3)\ OP.\cos\beta = y \qquad 6)\ OP_1.\cos\beta' = y_1$$
$$4)\ OP.\cos\gamma = z \qquad 7)\ OP_1.\cos\gamma' = z_1.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Quotienten $\frac{x}{OP}$, $\frac{x_1}{OP_1}$, $\frac{y}{OP}$, u. s. w. als die cos. der Winkel α, α', β, u. s. w.; daher folgt durch Substitution derselben in 1) das Gesetz:

$$\cos\varphi = \cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta.\cos\beta' + \cos\gamma.\cos\gamma'.$$

Zusatz. Aus diesem Gesetz folgt:

1) Die Linien l und l′ stehen auf einander senkrecht, wenn

$$\cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta.\cos\beta' + \cos\gamma.\cos\gamma' = 0$$

ist.

2) Die Linien sind parallel oder fallen in eine Linie zusammen, wenn $\cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta.\cos\beta' + \cos\gamma.\cos\gamma' = \pm 1$ ist. Diese Gleichung findet für den Werth $+1$ nur Statt, wenn $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$ ist (§. 404. I.); aber für den Werth -1 nur, wenn $\alpha + \alpha' = 180°$, $\beta + \beta' = 180°$ und $\gamma + \gamma' = 180°$ ist.

Beispiel. Eine Linie bildet mit der Axe X den Winkel $\alpha = 120°$, mit Y den Winkel $\beta = 110°$, mit Z einen spitzen Winkel γ; für eine zweite Linie ist $\alpha' = 100°$, $\beta' = 20°$ und γ' stumpf. Wie groß ist der Winkel φ, den beide Linien mit einander bilden?

Auflösung. Die erste Linie liegt in der dritten, die zweite in der sechsten Region; es kann sonach φ ein stumpfer Winkel sein. Man erhält:

$$1)\ \cos\varphi = \cos 60°.\cos 80° - \cos 70°.\cos 20° + \cos\gamma.\cos\gamma'.$$

$$2)\ \cos\gamma = +\sqrt{1 - (\cos 60°)^2 - (\cos 70°)^2}.$$

$$3)\ \cos\gamma' = -\sqrt{1 - (\cos 80°)^2 - (\cos 20°)^2}.$$

Den Ausdruck für $\cos\gamma$ kann man, wie folgt, vereinfachen:

$$\cos\gamma = +\sqrt{(\sin 60^\circ)^2 - (\sin 20^\circ)^2}.$$
$$= +\sqrt{\sin 80^\circ . \sin 40^\circ} \text{ (§. 216. XVII.)}$$

Aehnlich kann man mit $\cos\gamma'$ verfahren und erhält schließlich:

$$\cos\gamma . \cos\gamma' = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\sin 20^\circ . \sin 40^\circ}.$$

Aus 1) folgt jetzt:

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{2}\cos 80^\circ - \tfrac{1}{2}\sin 40^\circ - \tfrac{1}{2}\sqrt{\sin 20^\circ . \sin 40^\circ}$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sin 10^\circ - \sin 40^\circ) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\sin 20^\circ . \sin 40^\circ}.$$

Wendet man die Formel §. 217. XX. an, so folgt:

$$\cos\varphi = -\sin 15^\circ . \cos 25^\circ - \tfrac{1}{2}\sqrt{\sin 20^\circ . \sin 40^\circ}.$$

Hieraus folgt endlich:

$$\varphi = 117^\circ\ 58'\ 12''.$$

§. 407.

Lehrsatz.

Schneidet eine Ebene F die Coordinatenebenen unter den Winkeln α, β und γ, eine zweite Ebene F' unter den Winkeln α', β' und γ', und bilden beide Ebenen mit einander den Neigungswinkel φ, so ist

$$\cos\varphi = \cos\alpha . \cos\alpha' + \cos\beta . \cos\beta' + \cos\gamma . \cos\gamma'.$$

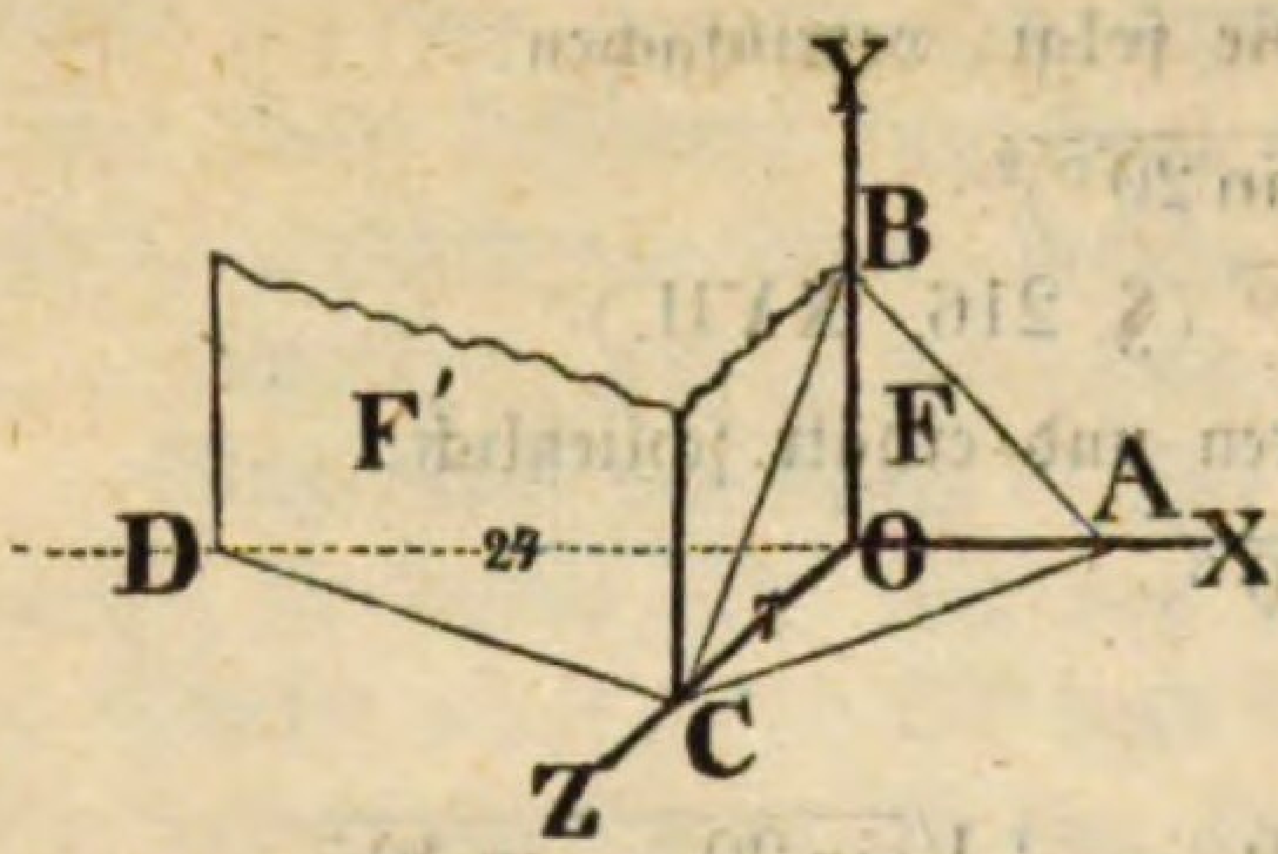
Beweis. Der Satz folgt aus dem vorhergehenden §., wenn man vom Durchschnittspunkt O der Coordinatenaxen auf jede Ebene eine Senkrechte, OP und OP', fällt. OP schneidet dann die Axen unter den Winkeln α, β und γ, OP' unter den Winkeln α', β' und γ'; OP und OP' aber bilden mit einander den Winkel φ. — Die Ebenen F und F' bilden mit einander zwei Neigungswinkel (Nebenwinkel); es ist in jedem Falle aus der Lage der Ebenen zu beurtheilen, welcher von beiden φ ist (vgl. §. 267.); φ ist der Neigungswinkel desjenigen Flächenwinkels beider Ebenen, in dessen Raume oder Scheitel-Raume der Punkt O nicht liegt.

Zusatz. Aus dem vorhergehenden Satze folgt: F und F' stehen auf einander senkrecht, wenn

$$\cos\alpha . \cos\alpha' + \cos\beta . \cos\beta' + \cos\gamma . \cos\gamma' = 0$$

ist. — Ist die Summe der Producte der cos. gleich ± 1, so sind die Ebenen parallel oder sie fallen in einander.

Beispiel. Die Ebene F bilde mit den Coordinatenebenen drei gleiche spitze Winkel; die Ebene F' sei senkrecht auf der Ebene XZ, schneide die X-Axe im Endpunkt der Ordinate -24, und die Z-Axe im Endpunkt der Ordinate $+7$; unter welchem Winkel φ schneiden sich F und F'?



Aufl. $\varphi = 66^\circ\ 53'\ 1{,}5''$. — In der Figur ist die Ebene F ($\triangle$ABC) durch den Endpunkt der Ordinate $z = 7$ gelegt, wobei der Winkel φ unverändert bleibt. Bei der Auflösung ist zu beachten, daß der Winkel, welchen F′ mit der Ebene YZ bildet, stumpf ist (§. 402.). Man erhält nach gehöriger Reduction $\cos\varphi = 0{,}68 \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{3}}$. Aus der Lage der Ebenen F und F′ geht hervor, daß der Flächenwinkel beider Ebenen, in dessen Raum der Punkt O liegt, der Nebenwinkel von φ ist.

§. 408.
Lehrsätze.

1) Bezeichnet a die Länge einer begrenzten Linie im Raume, α den Winkel, welchen sie, gehörig verlängert, mit einer Projectionsebene E bildet, und a_1 die Projection von a auf E, so ist

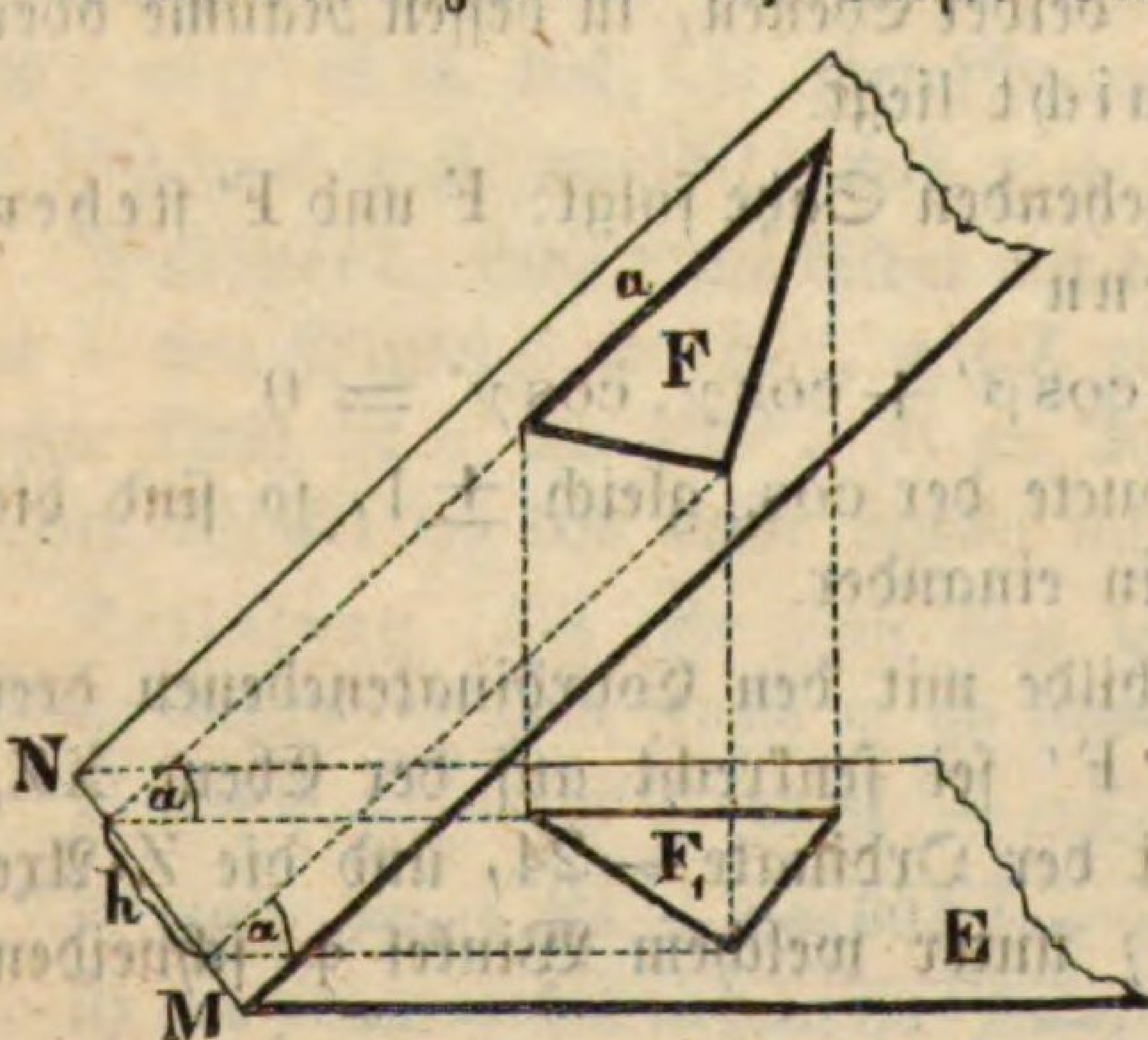
$$\text{I.}\quad a_1 = a \,.\, \cos\alpha.$$

2) Bezeichnet F den Inhalt einer ebenen Figur, deren Ebene mit einer Projectionsebene den Winkel α bildet, und F_1 die Projection von F auf E, so ist

$$\text{II.}\quad F_1 = F \,.\, \cos\alpha.$$

Beweis zu I. Der Beweis ergiebt sich unmittelbar, wenn man in der projicirenden Ebene durch einen Endpunkt von a eine Parallele mit a_1 zieht und sie bis zu ihrem Durchschnittspunkt mit der den andern Endpunkt projicirenden Linie verlängert. Man erhält ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem a die Hypotenuse, die eine Kathete gleich a_1 und der eingeschlossene Winkel gleich α wird.

Beweis zu II. 1) Dieser Satz soll zuerst für den besonderen Fall bewiesen werden, daß F ein Dreieck ist, dessen eine Seite a, gehörig verlängert, auf der Durchschnittslinie NM der Ebene, in welcher F liegt, mit der Projectionsebene E senkrecht steht. In diesem Falle bildet auch a mit der Ebene E den Winkel α; folglich ist die Projection der Seite a auf die Ebene E nach dem Satze I. gleich $a \,.\, \cos\alpha$, und diese Projection ist eine Seite



des Dreiecks F_1, welches die Projection des Dreiecks F auf die Ebene E ist. Betrachtet man aber a und $a.\cos\alpha$ als die Grundlinien der Dreiecke F und F_1, so sind die zugehörigen Höhen einander gleich, weil die zu a gehörige Höhe h des Dreiecks F mit NM, also auch mit der Ebene E parallel ist, woraus folgt, daß sie ihrer Projection gleich sein muß. Man hat jetzt:

$$F_1 = \frac{a.\cos\alpha}{2}.h$$
$$= \frac{ah}{2}.\cos\alpha$$
$$= F.\cos\alpha.$$

2) Der Satz gilt ferner auch, wenn F ein Dreieck in jeder beliebigen anderen Lage ist; denn in diesem Falle läßt sich das Dreieck immer von einer seiner drei Ecken aus durch eine Linie, welche verlängert auf der Durchschnittslinie NM senkrecht steht, in zwei Dreiecke zerlegen, welche die in 1) vorausgesetzte Lage haben. Bezeichnet man diese Dreiecke mit A und B, so sind ihre Projectionen auf E nach 1) gleich $A.\cos\alpha$ und $B.\cos\alpha$, und weil die Summe dieser Projection gleich der Projection des Dreiecks F ist, so hat man:

$$F_1 = A.\cos\alpha + B.\cos\alpha$$
$$= (A+B).\cos\alpha$$
$$= F.\cos\alpha.$$

3) Dann gilt der Satz, wenn F eine beliebige geradlinige ebene Figur ist; weil man eine solche durch Diagonalen in Dreiecke A, B, C, D u. s. w. zerlegen kann. Projicirt man alle diese Dreiecke auf E, so erhält man aus 2):

$$F_1 = A.\cos\alpha + B.\cos\alpha + C.\cos\alpha + D.\cos\alpha + \ldots.$$
$$= (A+B+C+D+\ldots.).\cos\alpha$$
$$= F.\cos\alpha.$$

4) Um endlich noch die Richtigkeit des Satzes zu beweisen, wenn F eine beliebige krummlinige ebene Figur ist, denke man sich in dieselbe ein Polygon F′ eingeschrieben, ein zweites F″ aber um dieselbe gelegt, so daß die Umfänge beider Polygone sich recht nahe an den Umfang von F anschließen. Projicirt man nun F, F′ und F″ auf E, so liegt nach 3)

F_1 zwischen den Grenzen $F'.\cos\alpha$ und $F''.\cos\alpha$.

Da man nun statt F′ und F″ Vielecke setzen kann, die immer resp. innerhalb und außerhalb F liegen, deren Umfänge aber sich nach und nach immer mehr und mehr an den Umfang der Figur F anschließen, so erkennt man, daß F′ und F″ die gemeinschaftliche Grenze F haben,

und weil $\cos\alpha$ constant ist, so folgt hieraus, daß $F'.\cos\alpha$ und $F''.\cos\alpha$ die gemeinschaftliche Grenze $F.\cos\alpha$ haben, woraus folgt:

$$F_1 = F.\cos\alpha.$$

§. 409.

Lehrsätze.

1) Das doppelte Quadrat einer begrenzten Linie (a) im Raume ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen (a_1, a_2 und a_3) auf drei (auf einander senkrechte) Coordinatenebenen, oder:

$$\text{I.} \quad 2a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

2) Das Quadrat einer ebenen Figur (F) im Raume ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen (F_1, F_2 und F_3) auf drei Coordinatenebenen, oder

$$\text{II.} \quad F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2.$$

Beweis zu I. Bildet a mit den Coordinatenebenen die Winkel α_1, β_1 und γ_1, so ist

$$a.\cos\alpha_1 = a_1$$
$$a.\cos\beta_1 = a_2$$
$$a.\cos\gamma_1 = a_3.$$

Wenn man jede Gleichung quadrirt und dann alle drei addirt, so folgt:

$$a^2.(\cos\alpha_1^2 + \cos\beta_1^2 + \cos\gamma_1^2) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Statt $\cos\alpha_1^2 + \cos\beta_1^2 + \cos\gamma_1^2$ kann man aber (nach §. 404. II.) 2 setzen.

Beweis zu II. Bildet F mit den Coordinatenebenen die Winkel α, β und γ, so ist

$$F.\cos\alpha = F_1$$
$$F.\cos\beta = F_2$$
$$F.\cos\gamma = F_3.$$

Quadrirt man jede Gleichung und addirt dann alle drei, so folgt:

$$F^2.(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2) = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2.$$

Nach §. 404. I. ist aber $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$.

Beispiel 1. Die drei Projectionen einer geraden Linie sind 5', 6' und 7'; wie lang ist die Linie?

Antw. 7,4162'.

Beispiel 2. Wie groß ist der Inhalt einer ebenen Figur, wenn die Inhalte ihrer drei Projectionen gleich 20 □', 14 □' und 6,5 □' sind?

Antw. 25,2636 □'.

Beispiel 3. Die Projection einer Linie von 10' Länge auf die Ebene XY ist = 9', auf die Ebene YZ = 7'; welchen Winkel bildet die Linie mit der Ebene XZ?

Antw. 33° 12' 39''.

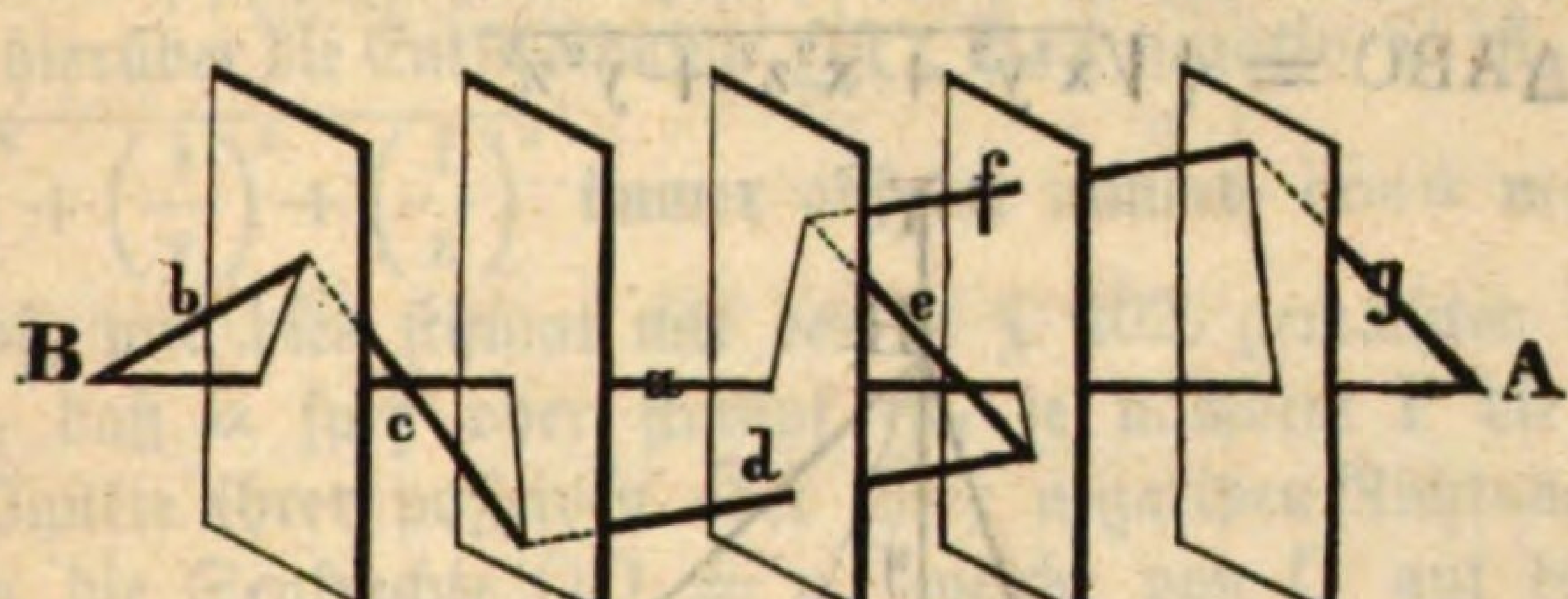
§. 410.

Lehrsatz.

Jede Seite eines windschiefen n-Ecks (dessen Seiten also nicht in derselben Ebene, sondern beliebig im Raume liegen) ist gleich der Summe der Producte, welche man erhält, wenn man jede der anderen Seiten mit dem cos. des Winkels multiplicirt, den sie mit der ersten Seite bildet.

Behaupt. $a = b.\cos ab + c.\cos ac + d.\cos ad + e.\cos ae$
$+ f.\cos af + g.\cos ag.$

Beweis. Dieser Satz ist für ebene Vielecke in §. 244. IV. bereits bewiesen worden; der vorliegende Satz ist also eine Erweiterung jenes Satzes. Die Winkel ab, ac, ad u. s. w. sind im Sinne des §. 243. Nr. 2. aufzufassen. Man legt bei der Linie a eine ihrer beiden Richtungen zum Grunde, etwa die Richtung BA (also nicht AB), verfolgt die gebrochene Linie $b + c + d + e + \ldots$ von B nach A hin und legt durch den ersten Endpunkt jedes Theiles (b) c, d, e, u. s. w. eine Parallele mit BA (also nicht mit AB); diese Parallelen bilden



mit der angegebenen Richtung der einzelnen Theile die Winkel ac, ad, ae u. s. w. Den Winkel ab zeigt die Figur unmittelbar.

Zum Beweise des Satzes lege man durch jede Ecke des windschiefen Polygons (B und A ausgenommen) eine Ebene, welche die Seite a senkrecht schneidet, und drücke die Linie a als algebraische Summe ihrer Theile aus. Diese Theile sind additiv in Rechnung zu bringen, wenn die Winkel ab, ac u. s. w. spitz sind, und zwar ergeben sie sich (mit Benutzung der oben erwähnten Parallelen) in diesem Falle gleich b.cosab, c.cosac, u. s. w.; sind hingegen die Winkel stumpf, wie in der Figur der Winkel ae, so sind die Theile subtractiv in die Summe einzureihen. Aber in diesem letzteren Falle ist der Theil nicht gleich e.cosae, sondern $e.\cos(180° - ae)$, und weil

$$- e.\cos(180° - ae) = + e.\cos ae$$

ist, so erscheinen sämmtliche Summanden mit dem Vorzeichen +, wie sie die Formel oben zeigt, während sie in der That positiv oder negativ

sind, je nachdem die Winkel ab, ac, u. s. w. spitz oder stumpf sind. — Kennt man die Winkel, welche a, b, c ... mit den Axen eines Coordinaten-Systems bilden, so sind die Winkel ab, ac, ... nach §. 406. zu berechnen.

§. 411.

Uebungs-Aufgaben.

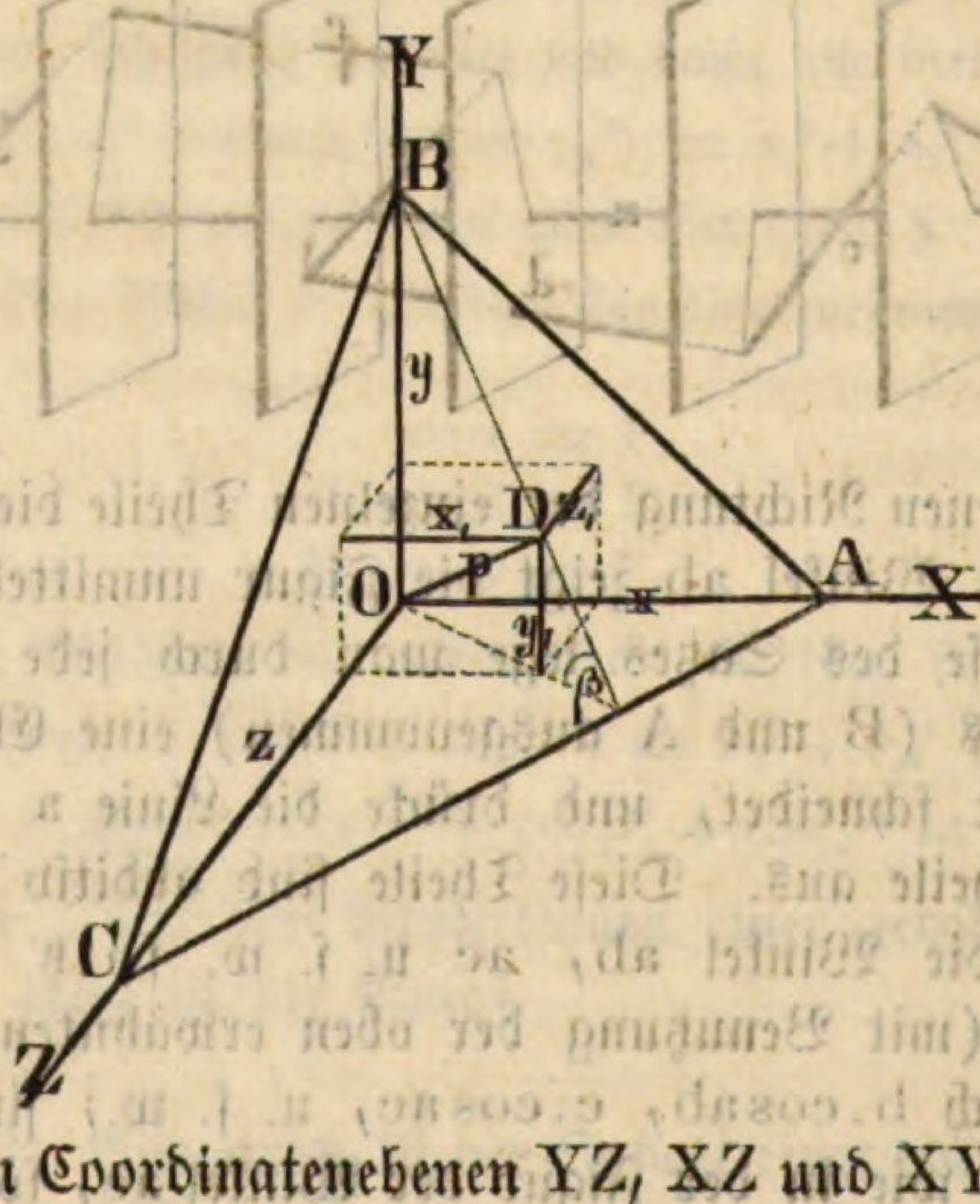
Aufgabe 1. Eine Ebene F schneidet die Coordinatenaxen X, Y und Z resp. in A, B und C, und es sind die Längen OA = x, OB = y und OC = z gegeben; man soll den Inhalt des Dreiecks ABC berechnen, die Winkel, welche F mit den Coordinatenebenen bildet, die Senkrechte p, von O auf F gefällt, und die Coordinaten des Fußpunktes dieser Senkrechten.

Auflösung. Es sind die $\Delta\Delta$ OAB, OAC und OBC die Projectionen des ΔABC auf die Coordinatenebenen; hieraus folgt nach §. 409. II.:

$$1)\ (\Delta ABC)^2 = (\Delta OAB)^2 + (\Delta OAC)^2 + (\Delta OBC)^2$$

(der Pythagoreische Lehrsatz des Raumes). Aus dieser Gleichung ergiebt sich:

$$\text{I.}\quad \Delta ABC = \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}.$$



Bildet F mit den Coordinatenebenen YZ, XZ und XY resp. die Winkel α, β und γ, so ist:

$$2)\ \Delta ABC.\cos\alpha = \tfrac{1}{2}yz.$$

$$3)\ \Delta ABC.\cos\beta = \tfrac{1}{2}xz.$$

$$4)\ \Delta ABC.\cos\gamma = \tfrac{1}{2}xy.$$

Aus diesen Gleichungen folgt mit Hülfe von I.:

$$\text{II.}\quad \cos\alpha = \frac{yz}{\sqrt{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^2}}$$

$$\text{III.}\quad \cos\beta = \frac{xz}{\sqrt{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}} = \frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^2}}$$

$$\text{IV.}\quad \cos\gamma = \frac{xy}{\sqrt{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}} = \frac{\frac{1}{z}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^2}}.$$

Da wir den Inhalt des ΔABC immer als absolute Zahl auffassen, so gelten die Gleichungen 2) bis 4) nur unter der Bedingung, daß für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und für x, y, z ihre absoluten Werthe zu setzen sind. Die ersten Werthe in den Gleichungen II. bis IV. lassen daher nicht erkennen, ob α, β, γ spitz oder stumpf sind; hingegen geben die zweiten Werthe hierüber die Entscheidung. Ist z. B. x negativ, so ist, wenn man $\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^2}$ immer absolut nimmt, $\cos\alpha$ negativ, also α stumpf, und dies stimmt mit der in §. 402. gemachten Bemerkung überein, daß α spitz oder stumpf ist, je nachdem F die X-Axe in einem Punkte ihrer positiven oder ihrer negativen Richtung schneidet.

Um die Senkrechte OD = p, welche von O auf die Ebene F gefällt ist, zu berechnen, kann man entweder den Inhalt der Pyramide OABC doppelt ausdrücken:

$$\tfrac{1}{3}\,\Delta\,\text{ABC}\,.\,p = \tfrac{1}{6}xyz,$$

oder man benutzt den Satz, daß p mit den Axen die Winkel α, β, γ bildet, woraus folgt:

$$p = x\,.\cos\alpha = y\,.\cos\beta = z\,.\cos\gamma.$$

Man erhält

$$\text{V.}\quad p = \frac{xyz}{\sqrt{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^2}}.$$

Für x, y, z sind in den ersten Ausdruck für p die absoluten Coordinatenwerthe zu setzen.

Die Coordinaten x_1, y_1 und z_1 des Fußpunktes D der auf F senkrechten Linie OD findet man, da p mit den Axen die Winkel α, β, γ bildet, unmittelbar aus §. 403.:

$$\text{IV.}\quad\begin{cases} x_1 = p.\cos\alpha = \dfrac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^2} \\[2ex] y_1 = p.\cos\beta = \dfrac{\frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^2} \\[2ex] z_1 = p.\cos\gamma = \dfrac{\frac{1}{z}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^2}. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Die Projectionen einer Linie im Raume auf drei Coordinatenebenen sind gegeben, gleich a, b und c; man soll die Länge u der Linie, die Winkel α_1, β_1 und γ_1, welche sie mit den Coordinatenebenen und die Winkel α, β und γ, welche sie mit den Coordinatenaxen bildet, berechnen.

Auflösung. Aus §. 409. I. folgt unmittelbar:

$$\text{I.}\quad u = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}},$$

und aus §. 408. I., in Verbindung mit §. 401. (3.), ergiebt sich:

$$\text{II.}\quad\begin{cases} \cos\alpha_1 = \sin\alpha = \dfrac{a}{u} \\[1ex] \cos\beta_1 = \sin\beta = \dfrac{b}{u} \\[1ex] \cos\gamma_1 = \sin\gamma = \dfrac{c}{u}. \end{cases}$$

Die Region, in welcher u liegt, bleibt unbestimmt, weil hierüber in der Aufgabe eine Bedingung fehlt. Nimmt man an, u liegt in der ersten Region, so sind alle Winkel spitz zu nehmen.

Determination. Als besondere Fälle hat man zunächst: es kann $u = a$ sein; dann folgt aus I. $a^2 = b^2 + c^2$; ferner kann $u = a = b$ sein, dann folgt $c = 0$. Für die anderen Fälle hat man $u > a$, woraus folgt:

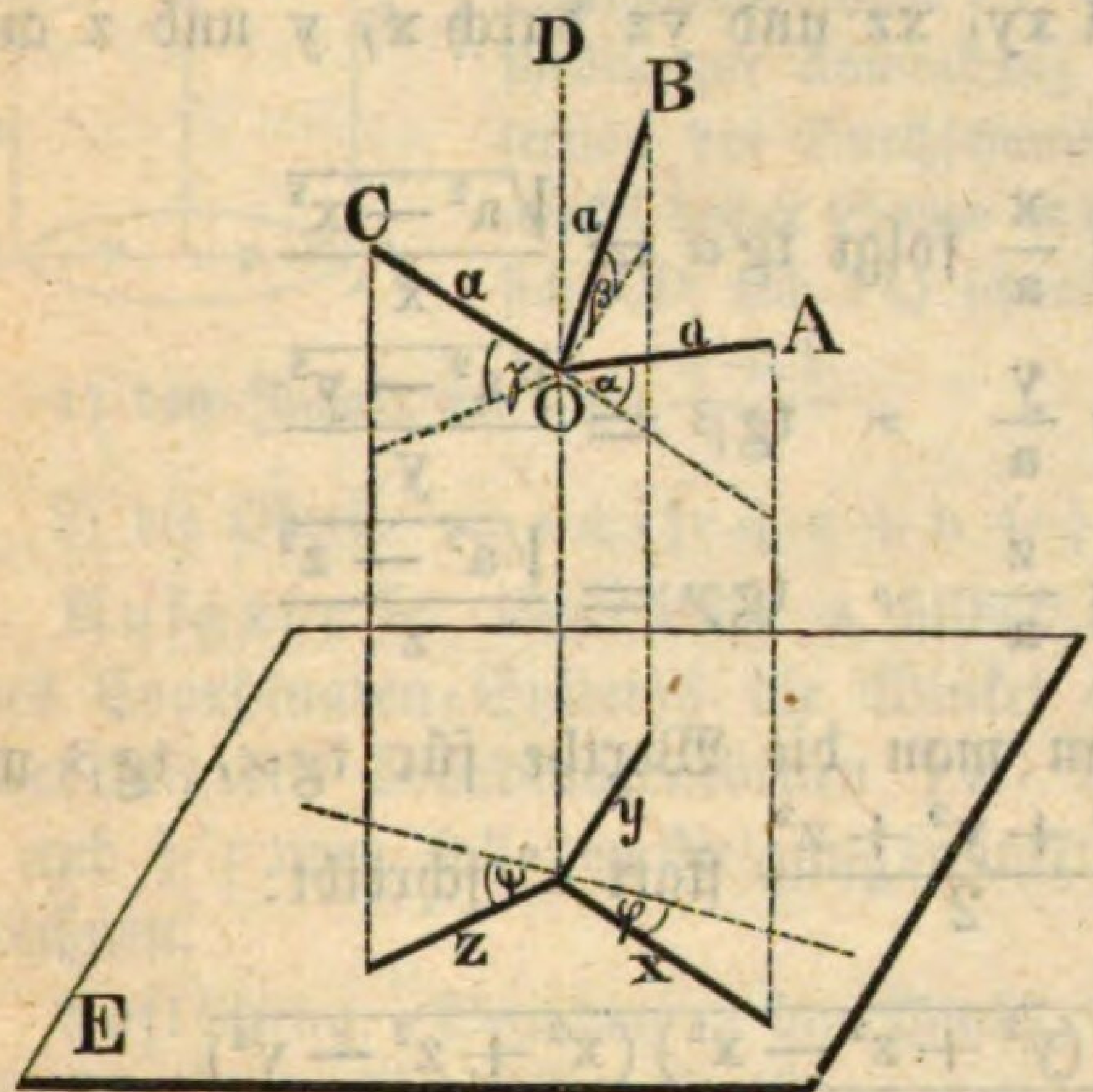
$$b^2 + c^2 > a^2,$$

d. h. es muß die Summe der Quadrate zweier Projectionen größer als das Quadrat der dritten sein.

Aufgabe 3. Im Raume sind drei von einem Punkt O ausgehende gleich lange, auf einander senkrechte Linien $OA = OB = OC = a$ gegeben, welche mit einer Projectionsebene E die Winkel α, β, γ bilden;

wie groß sind die Projectionen x, y, z dieser Linien auf die Ebene E, und welche Winkel bilden die Projectionen mit einander?

Auflösung. Denkt man sich durch O eine mit E parallele Ebene gelegt, so können OA, OB und OC oberhalb oder unterhalb dieser Ebene liegen; dann aber liegen entsprechend auch die Winkel α, β und γ oberhalb oder unterhalb dieser Ebene. Die Figur zeigt die Lage, bei welcher die Linien und Winkel oberhalb der Ebene liegen; will man die Auflösung für eine andere Lage, so hat man nur nöthig, die Winkel α, β und γ, wenn sie unterhalb der Ebene liegen, negativ zu nehmen.



Zur Auflösung hat man zunächst:

$$1)\quad \begin{cases} x = a.\cos\alpha \\ y = a.\cos\beta \\ z = a.\cos\gamma. \end{cases}$$

Denkt man sich die O projicirende Linie über O verlängert, so bildet die Verlängerung OD mit OA, OB und OC (also mit den Axen eines Coordinaten-Systems) die Winkel $90° - \alpha$, $90° - \beta$ und $90° - \gamma$, also mit den Coordinatenebenen die Winkel α, β und γ (§. 401.); daher ist

$$2)\quad \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 2,$$

so daß α, β und γ nicht von einander unabhängig sind. Quadrirt und addirt man die drei Gleichungen in 1), so entsteht mit Hülfe von 2):

$$3)\quad x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2.$$

Um die Winkel xy, xz und yz zu finden, welche resp. x mit y, x mit z, und y mit z bilden, hat man aus dem sphärischen Dreieck OABD (vergl. §. 351. I. und §. 364. Aufg. 4.):

$$\cos 90° = \sin\alpha.\sin\beta + \cos\alpha.\cos\beta.\cos xy.$$

Aus dieser Gleichung und auf dieselbe Weise aus den sphärischen Dreiecken OACD und OBCD folgt:

$$4)\quad \begin{cases} \cos xy = -\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta \\ \cos xz = -\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\gamma \\ \cos yz = -\operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\gamma. \end{cases}$$

Für die in der Figur dargestellte Lage sind also xy, xz und yz stumpfe Winkel; bei anderer Lage, wo, wie oben bemerkt, α, β und γ negativ sein können, würden jene Winkel sich auch spitz ergeben können.

Wünscht man die Winkel xy, xz und yz durch x, y und z auszudrücken, so hat man:

$$\text{aus } \cos\alpha = \frac{x}{a} \text{ folgt } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

$$\text{» } \cos\beta = \frac{y}{a} \text{ » } \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

$$\text{» } \cos\gamma = \frac{z}{a} \text{ » } \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{z}.$$

Aus 4) folgt nun, wenn man die Werthe für $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ und $\operatorname{tg}\gamma$ substituirt und noch $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$ statt a^2 schreibt:

$$5)\quad \begin{cases} \cos xy = -\dfrac{\sqrt{(y^2 + z^2 - x^2)(x^2 + z^2 - y^2)}}{2xy} \\ \cos xz = -\dfrac{\sqrt{(y^2 + z^2 - x^2)(x^2 + y^2 - z^2)}}{2xz} \\ \cos yz = -\dfrac{\sqrt{(x^2 + z^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2)}}{2yz}. \end{cases}$$

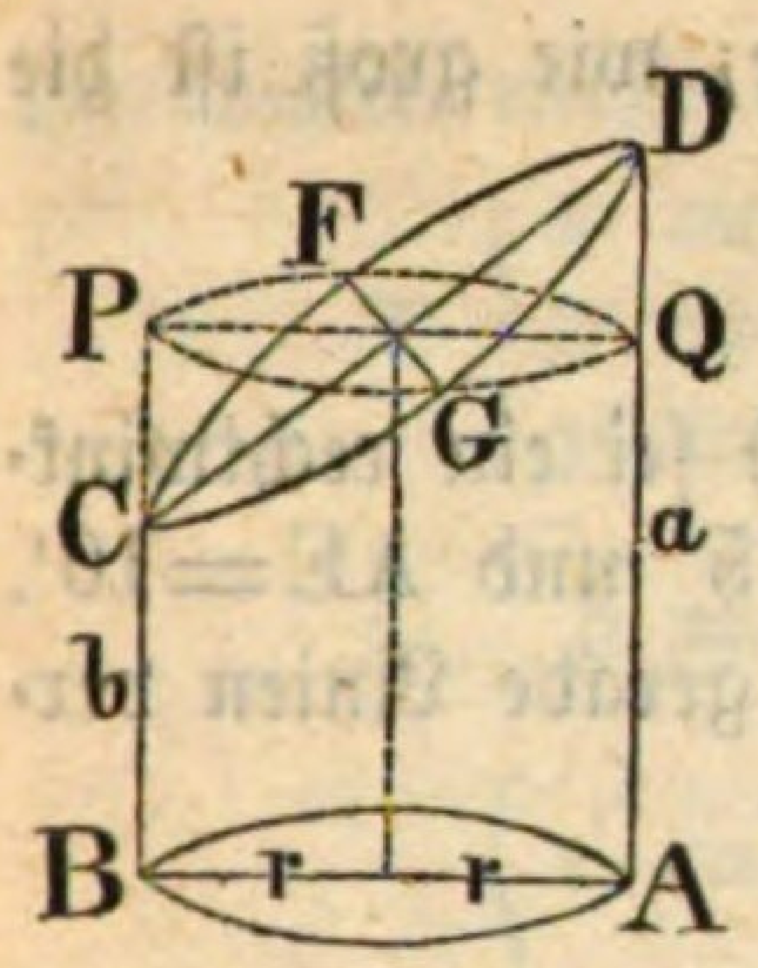
Legt man in der Ebene E noch durch die Projection des Punktes O eine auf y senkrechte Linie, so findet man die Winkel φ und ψ, welche x und z mit dieser Linie bilden, aus den Gleichungen:

$$6)\quad \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{(y^2 + z^2 - x^2)(x^2 + z^2 - y^2)}}{2xy} \\ \sin\psi = \dfrac{\sqrt{(x^2 + z^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2)}}{2yz} \end{cases}$$

(vergl. §. 395. Nr. 5. IV.).

Aufgabe 4. Den Inhalt und die Oberfläche eines schief abgeschnittenen senkrechten Cylinders zu berechnen, wenn sein Radius = r, seine längste Seite = a und seine kürzeste = b ist.

Auflösung. Nach §. 348. I. geht die Ebene, welche man durch a und b legen kann, durch die Axe des Cylinders und steht auf der Durchschnittsebene CD senkrecht. Legt man durch den Punkt, in welchem diese Ebene die Axe schneidet, eine mit der Grundfläche AB parallele Ebene PQ, so entstehen die beiden



Cylinderhufe FQGD und FPGC, deren Congruenz sich durch Decken leicht beweisen läßt. Aus dieser Congruenz ergiebt sich der Inhalt und der Mantel des schief abgeschnittenen Cylinders. Nur bei der Berechnung der Durchschnittsfläche CD kommt ein Gesetz der Coordinatentheorie zur Anwendung. Es ist der Kreis BA die Projection der Durchschnittsfläche CD, und der Neigungswinkel beider Ebenen ist dem Winkel gleich, unter welchem sich CD und PQ schneiden. Man erhält

1) den Inhalt $= r^2\pi \cdot \frac{a+b}{2}$,

2) die Oberfl. $= r\pi \cdot \left[r + a + b + \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 + (a-b)^2}\right]$.

Aufgabe 5. Eine Linie a bildet mit den Axen X, Y und Z eines Coordinaten-Systems die Winkel α, β und γ, eine Ebene F bildet mit den Coordinatenebenen YZ, XZ und XY die Winkel α', β' und γ'; man soll den Neigungswinkel der Linie a mit der Ebene F berechnen.

Auflösung. Bezeichnet φ den Winkel, den eine durch O gelegte, auf F senkrechte Linie mit a bildet, so ist

$$\cos\varphi = \cos\alpha . \cos\alpha' + \cos\beta . \cos\beta' + \cos\gamma . \cos\gamma'.$$

Der gesuchte Winkel ist entweder das Complement des Winkels φ, oder das Complement seines Nebenwinkels, je nachdem φ spitz, oder stumpf ist.

Aufgabe 6. Eine Linie von 5' Länge bildet mit jeder der Projectionsebenen XY und XZ einen Winkel von 10°; wie groß ist ihre Projection auf die dritte Projectionsebene YZ?

Antw. 1,227878'.

Aufgabe 7. Der Inhalt eines ΔABC sei 96 □'. Im Punkte A stehe AF senkrecht auf dem ΔABC, und F sei mit B und C durch gerade Linien verbunden. Wenn nun BC = 24' und AF = 20' ist, wie groß ist der Inhalt des ΔFBC?

Antw. 258,488 □'.

Aufgabe 8. Der Punkt P hat die Coordinaten x = 1', y = 2' und z = 3', der Punkt Q hat die Coordinaten x = −2', y = −3', z = −5'; wie lang ist PQ?

Antw. 9,899494'.

Aufgabe 9. Unter welchem Winkel muß man die Axe eines senkrechten Cylinders von 10' Radius durch eine Ebene schneiden, damit die Durchschnittsfläche 400 □' Inhalt erhält?

Antw. 51° 45' 27".

Aufgabe 9. Die Projectionen einer ebenen Figur auf zwei Projectionsebenen haben die Inhalte 20,4 □' und 11,2 □'; die Pro-

jection auf die dritte Projectionsebene ist eine Linie; wie groß ist die Figur?

Antw. 23,2723 □′.

Aufgabe 10. ABCDEFGH (Fig. in §. 289.) sei ein rechtwinkliges Parallelepipedon, und es sei AB = 4′, AD = 5′ und AE = 10′. Wenn man nun die Punkte B, D und E durch gerade Linien verbindet, wie groß ist der Inhalt des Δ EBD?

Antw. 33,541 □′.

Aufgabe 11. Eine Linie a bildet mit den Axen eines Coordinaten-Systems die Winkel $\alpha = 60°$, $\beta = 110°$, und γ ist stumpf; eine Ebene F bildet mit den Coordinatenebenen die Winkel $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$, und γ ist spitz; wie groß ist der Neigungswinkel der Linie a zur Ebene F?

Antw. 26° 2′ 32″.

Aufgabe 12. Die Projectionen einer Linie u auf die drei Coordinatenebenen sind 7′, 8′ und 9′; wie groß ist u, und welche Winkel bildet u mit den Coordinatenebenen und mit den Coordinatenaxen?

Antw. u = 9,848858′.

$\alpha_1 = 44° \; 42' \; 17''$; $\alpha = 45° \; 17' \; 43''$.

$\beta_1 = 35° \; 40' \; 51{,}6''$; $\beta = 54° \; 19' \; 8{,}4''$.

$\gamma_1 = 23° \; 57' \; 45''$; $\gamma = 66° \; 2' \; 15''$.

Aufgabe 13. Ein Punkt P hat die Coordinaten x = 10, y = 4, z = 6; ein zweiter Punkt Q hat die Coordinaten x = —2, y = 6, z = —8. Wie groß ist der Winkel, den OP mit OQ bildet, wenn O der Anfangspunkt der Coordinaten ist?

Antw. 110° 29′ 5″.

Aufgabe 14. Eine Ebene F schneidet die Coordinatenaxen X, Y und Z resp. in A, B und C, und diese Punkte sind die Endpunkte der Coordinaten x = 3, y = —4 und z = 4,5; man soll den Inhalt des Δ ABC berechnen, die Winkel, welche die Ebene F mit den Coordinatenebenen und Coordinatenaxen bildet, die Senkrechte p, von O auf F gefällt, und die Coordinaten x_1, y_1 und z_1 des Fußpunktes dieser Senkrechten. Die Längeneinheit sei ein Fuß.

Auflösung. Man erhält:

1) Δ ABC = 12,75 □′.

Die Winkel, welche F mit den Coordinatenebenen bildet:

$$2) \begin{cases} \alpha = \;\; 45° \;\; 5' \; 57'' \\ \beta = 121° \; 57' \; 56{,}6'' \\ \gamma = \;\; 61° \; 55' \; 39''. \end{cases}$$

Die Winkel, welche F mit den Axen bildet:

$$3)\left\{\begin{array}{l}\alpha' = 44^\circ\ 54'\ 3''\\ \beta' = 31^\circ\ 57'\ 56{,}6''\\ \gamma' = 28^\circ\ \ 4'\ 21''.\end{array}\right.$$

$$4)\quad p = 2\frac{2}{17}\ \text{Fuß}.$$

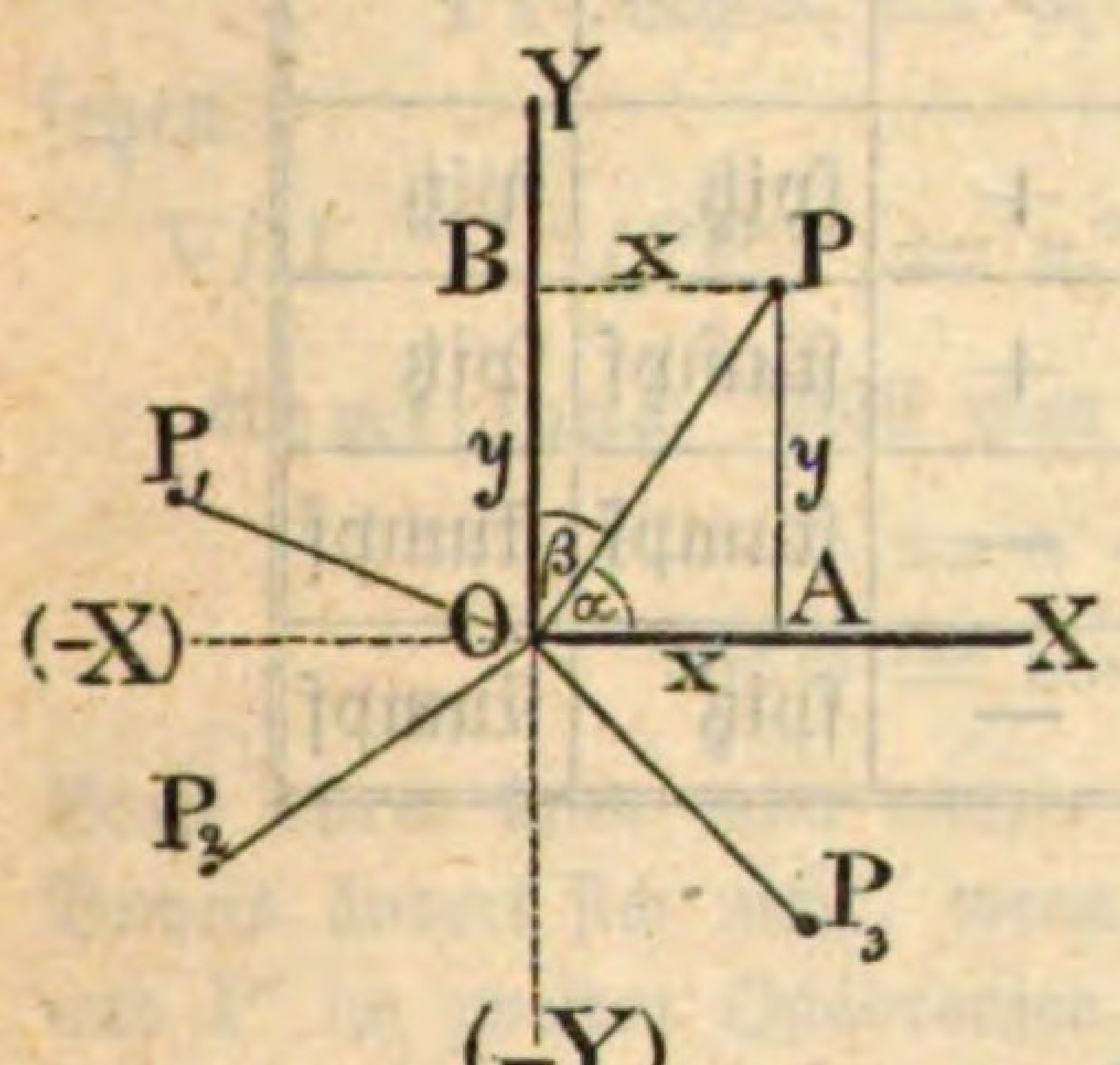
$$5)\left\{\begin{array}{l}x_1 = +1\frac{143}{289}\ \text{Fuß},\\ y_1 = -1\frac{35}{289}\ \text{Fuß},\\ z_1 = +\frac{288}{289}\ \text{Fuß}.\end{array}\right.$$

Coordinaten in der Ebene.

§. 412.

In der Ebene beziehen wir Punkte und Linien auf zwei auf einander senkrechte Coordinatenaxen X und Y, die sich im Anfangspunkt O der Coordinaten schneiden.

Tragen wir von O aus auf die X-Axe die Länge OA = x, auf die Y-Axe die Länge OB = y ab und construiren das Rechteck (OAPB), in welchem x und y zwei an einander stoßende Seiten sind, so ist durch x und y dieses Rechteck bestimmt, also auch die O gegenüberliegende Ecke, der Punkt P. Wir nennen x und y die Coordinaten des Punktes P, namentlich x seine Abscisse, y seine Ordinate; daher heißt auch X die Abscissenaxe (Abscissenlinie), Y die Ordinatenaxe, O der Anfangspunkt der Abscissen. Die Coordinaten x und y sind auch die Entfernungen des Punktes P von den Coordinatenaxen Y und X; die gebräuchliche Art, P zu construiren, ist aber die, daß man OA = x macht und in A auf X eine Senkrechte errichtet und ihr die Länge AP = y giebt.



Bei jeder Axe unterscheiden wir zwei Axen-Richtungen, eine positive, welche sich von O aus bei der X-Axe nach rechts, bei der Y-Axe nach oben erstreckt, und eine negative, bei der X-Axe nach links, bei der Y-Axe nach unten gehend. Wir unterscheiden ferner bei jeder Axe zwei Axen-Seiten, eine positive und eine negative;

diejenige ist bei jeder Axe die positive Seite, auf welcher die positive Axenrichtung der andern Axe liegt; die andere ist die negative. Bei der X-Axe nennen wir also positive und negative Seite die obere, resp. untere, bei der Y-Axe die rechts, resp. links liegende.

Die beiden Axen theilen die Ebene in vier Quadranten; in jedem derselben (oder in einer der Axen) kann der Punkt P liegen; seine Lage ist durch positive oder negative Coordinatenwerthe (oder durch den Werth Null) vollkommen bestimmt (vergl. §. 183. I.).

Eine von O ausgehende Linie, die also in O begrenzt ist, nach der andern Seite hin aber unbegrenzt sein kann, ist ihrer Lage nach durch die Winkel bestimmt, welche sie mit den Axen X und Y bildet. Wir werden diese Winkel resp. α und β nennen, verstehen aber unter α und β immer die Winkel, welche die Linie mit den positiven Axenrichtungen (nicht mit den negativen) bildet, und immer die concaven (nicht die convexen) Winkel; α und β liegen sonach innerhalb der Grenzen 0° und 180°.

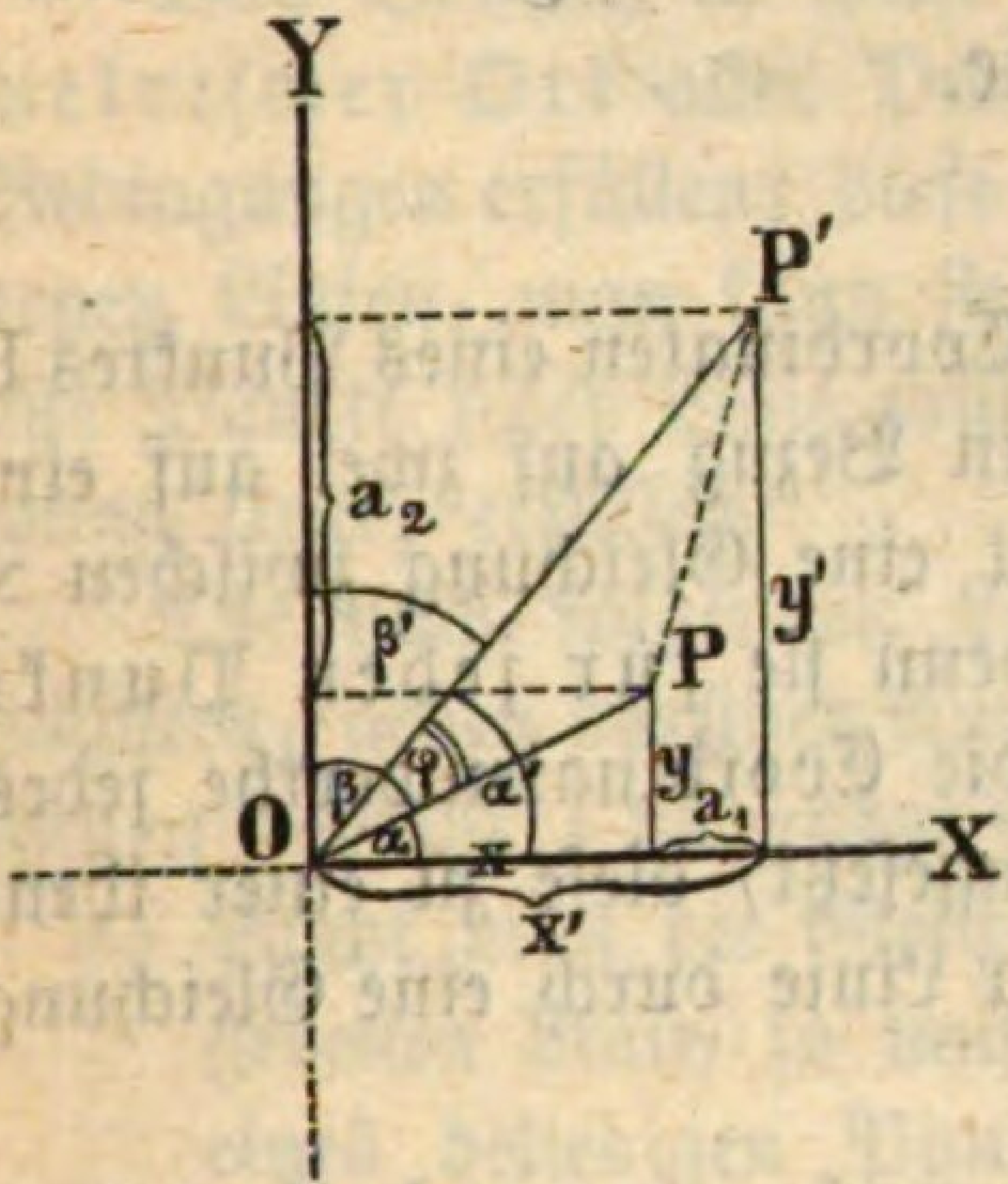
Die nachstehende Tabelle zeigt, wie wir die Quadranten numeriren und in welchem Quadranten ein Punkt P, oder eine Linie OP, liegt, je nachdem die Coordinaten x und y des Punktes P positiv oder negativ, die Winkel α und β aber, welche OP mit den Axen bildet, spitz oder stumpf sind.

Der Quadrant, in welchem P, oder OP, liegt.	x	y	α	β
(P) 1ter	+	+	spitz	spitz
(P_1) 2ter	—	+	stumpf	spitz
(P_2) 3ter	—	—	stumpf	stumpf
(P_3) 4ter	+	—	spitz	stumpf

§. 413.
Gesetze.

Die Gesetze für Coordinaten in der Ebene können aus den Gesetzen für Coordinaten im Raume abgeleitet werden. Denkt man sich durch den Anfangspunkt O der Abscissen eine auf der Ebene, in welcher X und Y liegen, senkrechte Linie gelegt und betrachtet sie als Z-Axe, so hat jeder Punkt in der Ebene XY die Applicate $z = 0$, und jede Linie OP in derselben Ebene bildet mit Z den Winkel $\gamma = 90°$. Setzt man also in die schon gefundenen Gesetze $z = 0$ und $\gamma = 90°$,

so erhält man die Gesetze für die Coordinaten in der Ebene. Es ist jedoch leicht, und sei dem Leser gerathen, diese Gesetze auch direct planimetrisch, resp. trigonometrisch, herzuleiten.



Indem wir diese Gesetze hier zusammenstellen, legen wir die Bezeichnung, welche in der Figur angegeben ist, zum Grunde; ausdrücklich sei bemerkt, daß sie für jede beliebige Lage der Punkte P und P' richtig sind.

I. $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$.

II. $OP.\cos\alpha = x$; $OP.\cos\beta = y$.

III. $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1$.

IV. $PP' = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$.

V. $\cos\varphi = \dfrac{x.x' + y.y'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$

VI. $\cos\varphi = \cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta.\cos\beta'$.

Bezeichnen α_1 und β_1 die Winkel, welche PP' mit X und Y bildet, a_1 und a_2 aber die Projectionen der Linie PP' auf die Axen X und Y, so ist:

VII. $PP'.\cos\alpha_1 = x' - x$; $PP'.\cos\beta_1 = y' - y$.

Nimmt man für $\cos\alpha_1$ und $\cos\beta_1$ ihre absoluten Werthe, so kann man

$$PP'.\cos\alpha_1 = a_1 \text{ und } PP'.\cos\beta_1 = a_2$$

setzen.

VIII. $(PP')^2 = a_1^2 + a_2^2$.

Anmerkung. Will man das Gesetz VI. unmittelbar entwickeln, so ist:

$$\varphi = \alpha' - \alpha; \text{ folglich}$$
$$\cos\varphi = \cos\alpha.\cos\alpha' + \sin\alpha.\sin\alpha'.$$

Statt $\sin\alpha$ kann man $\cos\beta$, und statt $\sin\alpha'$ kann man $\cos\beta'$ setzen. Der Beweis ändert sich nicht, wenn $\varphi = \alpha - \alpha'$ ist. — Liegt etwa P im dritten und P' im zweiten Quadranten, so ist

$$\varphi = 360° - (\alpha + \alpha'); \text{ folglich}$$
$$\cos\varphi = \cos\alpha.\cos\alpha' - \sin\alpha.\sin\alpha'.$$

Man kann jetzt

$$\sin\alpha = \sin(\beta - 90°) = -\cos\beta$$
$$\sin\alpha' = \sin(\beta' + 90°) = +\cos\beta'$$

setzen, u. s. w.

Zweites Kapitel.

Coordinatengleichungen in der Ebene. Die gerade Linie. Die Kreislinie.

§. 414.

Bezeichnen in einer Ebene x und y die Coordinaten eines Punktes P einer geraden oder krummen Linie AB in Bezug auf zwei auf einander senkrechte Axen X und Y, so heißt eine Gleichung zwischen x und y die Gleichung der Linie AB, wenn sie für jeden Punkt dieser Linie richtig ist, wenn also die Coordinatenwerthe jedes Punktes, statt x und y in die Gleichung eingesetzt, diese zu einer identischen machen. Bei der Bestimmung einer Linie durch eine Gleichung kann man:

1) die Linie ihrer Gestalt und Lage nach geben und ihre Gleichung suchen;

2) die Gleichung geben und die Gestalt und Lage der Linie suchen;

3) Bedingungen geben, welche die Linie erfüllen soll, aus diesen Bedingungen ihre Gleichung ableiten, aus letzterer aber die Lage der Linie oder, wenn in den Bedingungen ihre Gestalt nicht gegeben ist, ihre Gestalt und Lage bestimmen.

Die Lage der Linie bezieht sich hierbei sowohl auf das zum Grunde liegende Axensystem, als auch auf andere Linien, die unmittelbar oder mittelbar, also auch durch ihre Gleichungen, gegeben sein können.

Zur Erläuterung der vorstehenden drei Fälle folgen hier drei ihnen entsprechende Beispiele.

Beispiel 1. Der Mittelpunkt eines Kreises habe die Abscisse x = 18, die Ordinate y = 0; der Radius sei gleich 12; wie heißt die Gleichung der Peripherie des Kreises?

Beispiel 2. Man soll die Gestalt und Lage der Linie finden, deren Gleichung ist:

$$y^2 + x^2 - 36x + 180 = 0.$$

Beispiel 3. In der Axe (+X) liege ein Punkt D, welcher von dem Anfangspunkt O der Coordinaten den Abstand 10 hat; man soll die Linie bestimmen, in welcher jeder Punkt die Lage hat, daß seine Entfernung von O sich zu seiner Entfernung von D wie 3 zu 2 verhält.

In Bezug auf diese Beispiele sei nur bemerkt, daß die Gleichung der im Beispiel 3. gesuchten Linie die im Beispiel 2. gegebene Gleichung ist, diese aber wieder derselben Kreislinie angehört, welche im Beispiel 1. gegeben ist. Die Lage

des Kreises zeigt die Figur §. 174. III. Beispiel 3., wenn man sich EG und EH als die Axen X und Y denkt, so daß O der Punkt E ist; den Halbkreis muß man zum vollen Kreise ergänzen.

Das Beispiel 3. weist darauf hin, daß jede Linie als ein geometrischer Ort aller Punkte erklärt werden kann, welche dieselben Bedingungen erfüllen; diese Bedingungen sind verschieden bei verschiedenen Linien, man kann sie aber bei allen Linien dahin aussprechen: alle Punkte jeder Linie müssen die Bedingung, welche in ihrer Gleichung liegt, erfüllen.

Die noch folgenden Lehren dieses Abschnittes, so wie die des nächsten, geben darüber Aufschluß, wie man in den oben angeführten Fällen verfährt; vorausgeschickt sei:

a) Sucht man die Gleichung einer ihrer Gestalt und Lage nach gegebenen Linie, so muß man zwischen den Coordinaten x und y eines beliebigen Punktes der Linie eine Gleichung zu bilden, dann aber zu beweisen suchen, daß diese Gleichung für alle Punkte der Linie richtig ist.

b) Sucht man Gestalt und Lage einer Linie, deren Gleichung gegeben ist, so muß man alle Punkte suchen, deren Coordinaten der Gleichung entsprechen; diese Punkte bestimmen die Linie. Um aber die Punkte zu finden, muß man alle zusammengehörigen Werthe von x und y aufsuchen, welche reell sind; jedes solches Coordinaten-Paar giebt einen Punkt. Man erkennt hieraus, daß nicht jede Gleichung zwischen x und y eine Linie vorstellt, weil nicht jede Gleichung zwischen x und y reelle zusammengehörige Werthe von x und y hat.

So z. B. liefert die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 4y - 2x + 5 = 0$$

nur ein reelles Coordinaten-Paar:

$$x = 1, \quad y = 2;$$

sie stellt daher einen einzelnen Punkt vor. Löst man nämlich die Gleichung nach y auf, so folgt

$$y = 2 \pm \sqrt{-(x-1)^2}.$$

Ferner stellt die Gleichung $y^2 + x^2 + 3 = 0$ auch nicht einmal einen Punkt vor; denn sie kann überhaupt für reelle Werthe von x und y nicht richtig werden.

Eine Linie heißt eine algebraische oder transcendente, je nachdem ihre Gleichung algebraisch oder transcendent ist. Die algebraischen Linien benennt man nach dem Grade ihrer Gleichung. Die Linie heißt eine Linie des ersten, zweiten, dritten Grades u. s. w. oder

der ersten, zweiten, dritten Ordnung u. s. w., je nachdem ihre Gleichung von dem entsprechenden Grade ist.

Bisher ist nur von rechtwinkligen Coordinaten gesprochen worden; das Gesagte läßt sich aber auch auf schiefwinklige und Polar-Coordinaten anwenden (vergl. §. 183. II. und III.).

§. 415.
Verwandlung der Coordinaten-Richtungen.

1) Hat man die Gleichung einer Linie AB gefunden, indem man die vom Anfangspunkt O der Coordinaten nach links liegenden Abscissen (x) positiv nahm, also die nach rechts negativ, und will man die Gleichung derselben Linie bei der gebräuchlichen Annahme haben, daß die positiven Abscissen nach rechts, also die negativen nach links liegen sollen: so braucht man nur in die gefundene Gleichung $-x$ statt x zu setzen.

Beweis. Hat irgend ein Punkt der X-Axe für die erste Gleichung die Abscisse $x = \pm a$, so hat derselbe Punkt für die zweite Gleichung die Abscisse $x = \mp a$. Es fragt sich also nur, ob die erste Gleichung für $x = \pm a$ identisch wird mit der zweiten Gleichung für $x = \mp a$; denn in diesem Falle würde aus beiden Gleichungen derselbe Werth von y, also derselbe Punkt der Linie AB, sich ergeben. Aus der Entstehungsart der zweiten Gleichung aus der ersten geht aber hervor, daß sie mit dieser identisch wird, wenn man in sie für $-x$ denselben Werth einsetzt, den man in die erste Gleichung für $+x$ schreibt. Setzt man also in die erste Gleichung $x = \pm a$, so muß man in die zweite $\pm a$ statt $-x$ setzen. Dies thut man aber, wenn man in die zweite Gleichung $x = \mp a$ setzt; denn man kann statt dessen erst $-x$ statt x, dann aber $\pm a$ statt $-x$ setzen, weil aus $x = \mp a$ folgt $-x = \pm a$.

2) Hat man die Gleichung einer Linie AB gefunden, indem man die nach unten liegenden Ordinaten (y) als die positiven, also die nach oben liegenden als die negativen annahm, und will man die Gleichung derselben Linie für die gebräuchliche Annahme haben, daß die nach oben liegenden Ordinaten positiv, also die nach unten liegenden negativ sein sollen: so braucht man nur in die gefundene Gleichung $-y$ statt y zu setzen.

Beweis. Ergiebt sich aus der ersten Gleichung für irgend einen Werth von x, $y = \pm b$, so muß, wenn die zweite Gleichung für denselben Werth von x denselben Punkt der Linie AB geben soll, für diesen Werth von x, $y = \mp b$ werden. Dies ist aber auch der Fall; denn entwickelt man aus der zweiten Gleichung $-y$, so erhält

man für $-y$ denselben Werth, der sich aus der ersten Gleichung für $+y$ ergiebt. Erhält man also aus der ersten Gleichung $y = \pm b$, so entsteht aus der zweiten $-y = \pm b$, d. h. $y = \mp b$.

3) Hat man die Gleichung einer Linie AB gefunden, indem man die nach links liegenden Abscissen (x) positiv, also die nach rechts liegenden negativ, und die nach unten liegenden Ordinaten (y) positiv, also die nach oben liegenden negativ nahm, und will man die Gleichung derselben Linie für die gebräuchliche Annahme haben, daß die positiven Abscissen nach rechts, die positiven Ordinaten nach oben liegen sollen: so braucht man nur in die gefundene Gleichung $-x$ statt x und $-y$ statt y zu setzen.

Beweis folgt aus 1) und 2), wenn man zuerst $-x$ statt x und dann $-y$ statt y setzt. (Hat ein Punkt P der Linie AB für die erste Gleichung die Coordinaten $x = \pm a$, $y = \pm b$, so muß er für die zweite Gleichung die Coordinaten $x = \mp a$, $y = \mp b$ haben.)

Ist die Gleichung einer Linie bei der gebräuchlichen Richtung der Coordinaten gegeben oder gefunden, so kann man natürlich auch umgekehrt aus ihr die Gleichung der Linie für die in 1), 2) und 3) vorausgesetzte Richtung der Coordinaten dadurch herleiten, daß man $-x$ statt x, oder $-y$ statt y, oder $-x$ und $-y$ statt resp. x und y setzt.

I. Die gerade Linie.

§. 416.

Lage der geraden Linie zu den Axen.

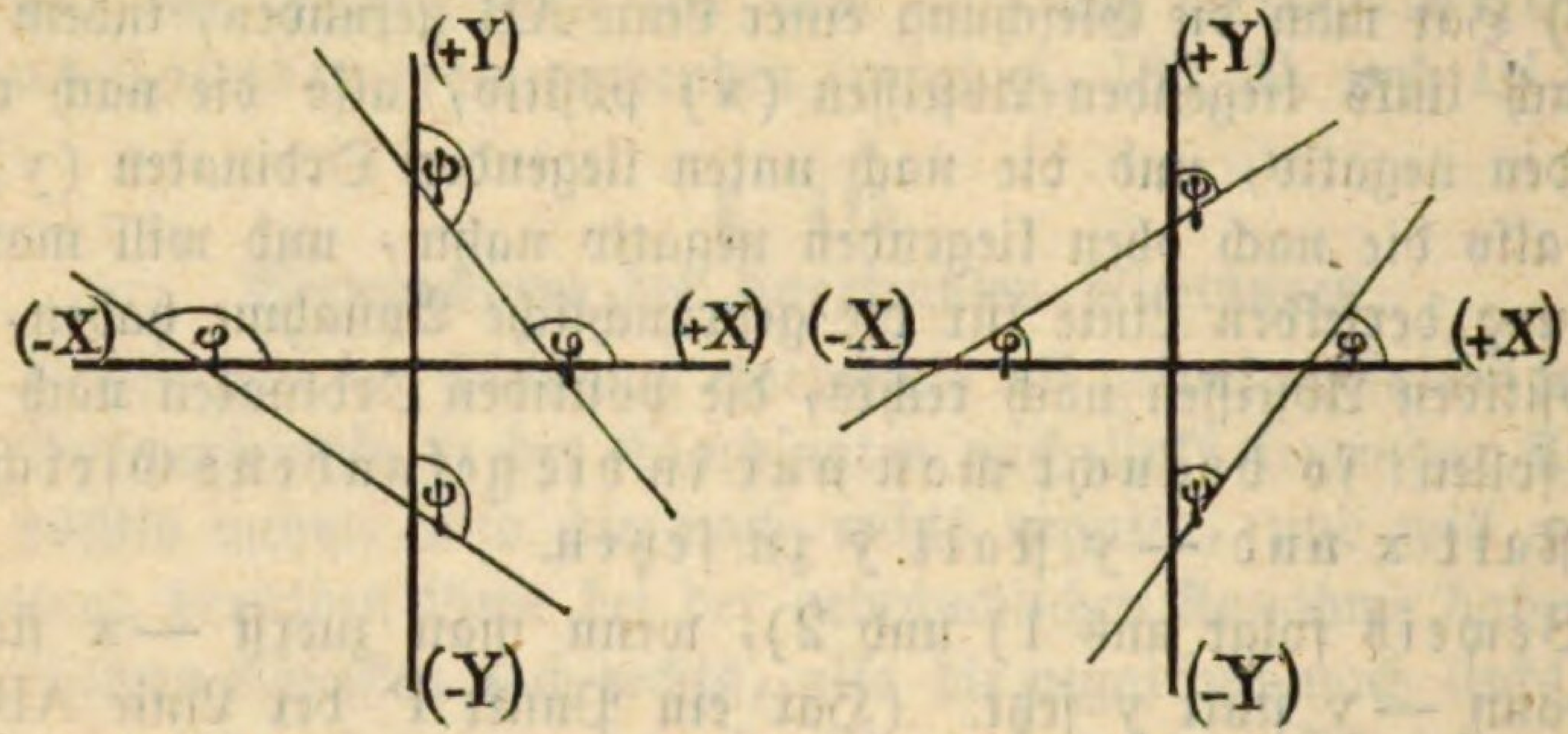
Wir sagen, eine gerade Linie liegt in einem der vier Quadranten des Axen-Systems, wenn sie die diesen Quadranten begrenzenden Axenrichtungen schneidet. Die Fälle, in welchen die Linie mit einer Axe parallel ist, oder durch den Anfangspunkt O der Coordinaten geht, betrachten wir als besondere. Hiernach liegt also eine Linie

im 1ten Quadranten,	wenn sie die Axen	$(+X)$ und	$(+Y)$
» 2ten »	» » » »	$(-X)$ »	$(+Y)$
» 3ten »	» » » »	$(-X)$ »	$(-Y)$
» 4ten »	» » » »	$(+X)$ »	$(-Y)$

schneidet.

Den Winkel, welchen eine gerade Linie mit der X-Axe bildet, werden wir immer mit φ, den mit der Y-Axe mit ψ bezeichnen. Nun bildet aber die Linie mit jeder Axe vier Winkel, und von diesen vier Winkeln soll immer derjenige gemeint sein, welcher auf der

positiven Seite der Axe liegt und den Theil dieser Axe zu einem Schenkel hat, welcher sich nach der positiven Richtung dieser Axe hin erstreckt.



Aus dieser Bestimmung ergiebt sich nun, daß die Winkel φ und ψ immer gleichzeitig beide spitz, oder beide stumpf sind; und zwar sind φ und ψ spitz, wenn die Linie im zweiten oder vierten Quadranten liegt, hingegen sind φ und ψ stumpf, wenn die Linie im ersten oder dritten Quadranten liegt. Ferner ergiebt sich unmittelbar aus der Figur: es ist

1) $\varphi + \psi = 90°$, wenn φ und ψ spitz sind;

2) $(180° - \varphi) + (180° - \psi) = 90°$, wenn φ und ψ stumpf sind. Daher ist in jedem Falle:

$$3) \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg}\psi \\ \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg}\psi. \end{cases}$$

Die Lage einer geraden Linie zu den Axen ist bestimmt, wenn man ihre Durchschnittspunkte mit den Axen kennt. Wir werden die Entfernung ihres Durchschnittspunktes mit der X-Axe vom Durchschnittspunkt O der Axen immer mit x_0, die Entfernung ihres Durchschnittspunktes mit der Y-Axe von O immer mit y_0 bezeichnen. Der Punkt aber, in welchem die Linie die X-Axe schneidet, hat die Ordinate Null, der Punkt, in welchem sie die Y-Axe schneidet, hat die Abscisse Null; hieraus folgt nun:

4) Man findet x_0, wenn man in die Gleichung der Linie $y = 0$ setzt und aus der Gleichung, welche so entsteht, x entwickelt. Der gefundene Werth von x ist x_0.

5) Man findet y_0, wenn man in die Gleichung der Linie $x = 0$ setzt und dann y entwickelt; der gefundene Werth von y ist y_0.

Das Gesagte gilt auch für krumme Linien; es können sich hierbei so wohl für x_0, als auch für y_0 mehrere Werthe ergeben, wenn nämlich

die Gleichung, aus der x oder y entwickelt wird, eine höhere Gleichung ist. In diesem Falle schneidet die Linie die Axen in mehr als einem Punkte.

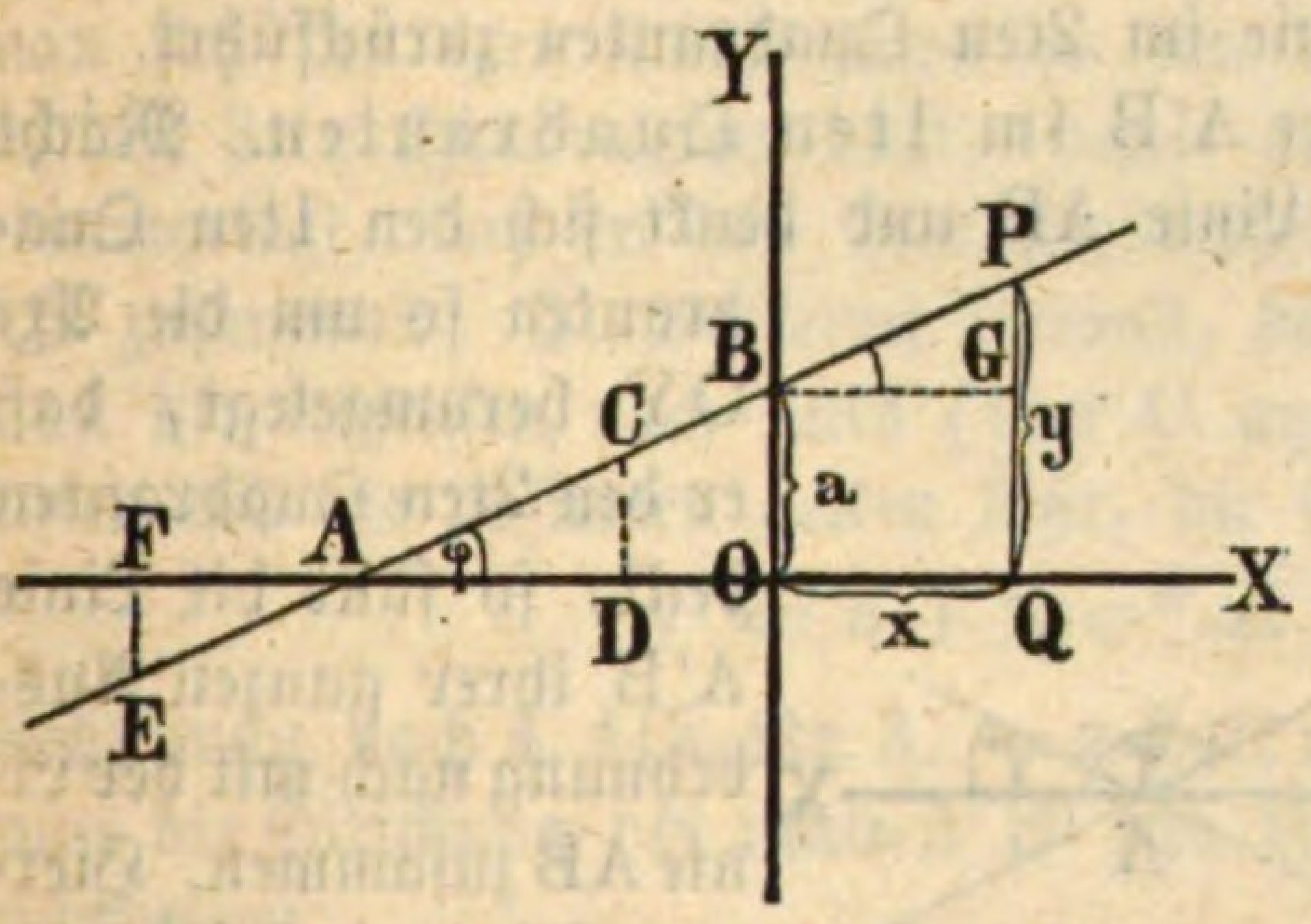
Anmerkung. Zieht man von dem Anfangspunkte O der Coordinaten aus eine Linie OP, welche mit der Richtung AB oder BA parallel ist, und bildet OP mit den Axen die Winkel α und β (im Sinne des §. 412.), so findet man:

1) Liegt OP in dem 1ten Quadranten, so ist
$$\alpha = \varphi \text{ und } \beta = \psi.$$
2) Liegt OP im 2ten Quadranten, so ist
$$\alpha = \varphi \text{ und } \beta = 180° - \psi.$$
3) Liegt OP im 3ten Quadranten, so ist
$$\alpha = 180° - \varphi \text{ und } \beta = 180° - \psi$$
4) Liegt OP im 4ten Quadranten, so ist
$$\alpha = 180° - \varphi \text{ und } \beta = \psi.$$

§. 417.

Die Gleichung der geraden Linie.

Eine gerade Linie schneide die Y-Axe im Endpunkt der Ordinate a und bilde mit der Axe X den Winkel φ; man soll die Gleichung der geraden Linie herleiten.



Aufl. Es sei P ein beliebiger Punkt der Linie, x und y seine Coordinaten; dann ist mit Anschluß an die Figur, wenn man BG ∦ X zieht:
$$y = QG + GP.$$
Da man aber a statt QG und $x \cdot tg\,\varphi$ statt GP setzen kann, so ergiebt sich die gesuchte Gleichung:

$$(1.) \quad y = a + tg\,\varphi \,.\, x.$$

Man hat nun zu zeigen, daß diese Gleichung für jeden Punkt der Linie richtig ist. Sie ist zunächst richtig für jeden Punkt der Linie, welcher rechts von B liegt; dann für B selbst; denn setzt man $x = 0$ so folgt aus (1.) $y = a$. Ferner für den Punkt A. Für diesen Punkt ist $y = 0$, und setzt man diesen Werth in (1.) ein, so folgt $x = -a.\cot g\,\varphi$, d. h. A liegt links von O in der Entfernung $a.\cot g\,\varphi$ von O, und dies stimmt mit der Figur überein.

Die Gleichung ist ferner richtig für jeden Punkt zwischen A und B, z. B. für C. Es ist aus der Figur leicht zu finden:

$$CD = a - OD \cdot tg\varphi;$$

setzt man aber in (1.) $y = CD$ und $x = -OD$, so ergiebt sich dieselbe Gleichung.

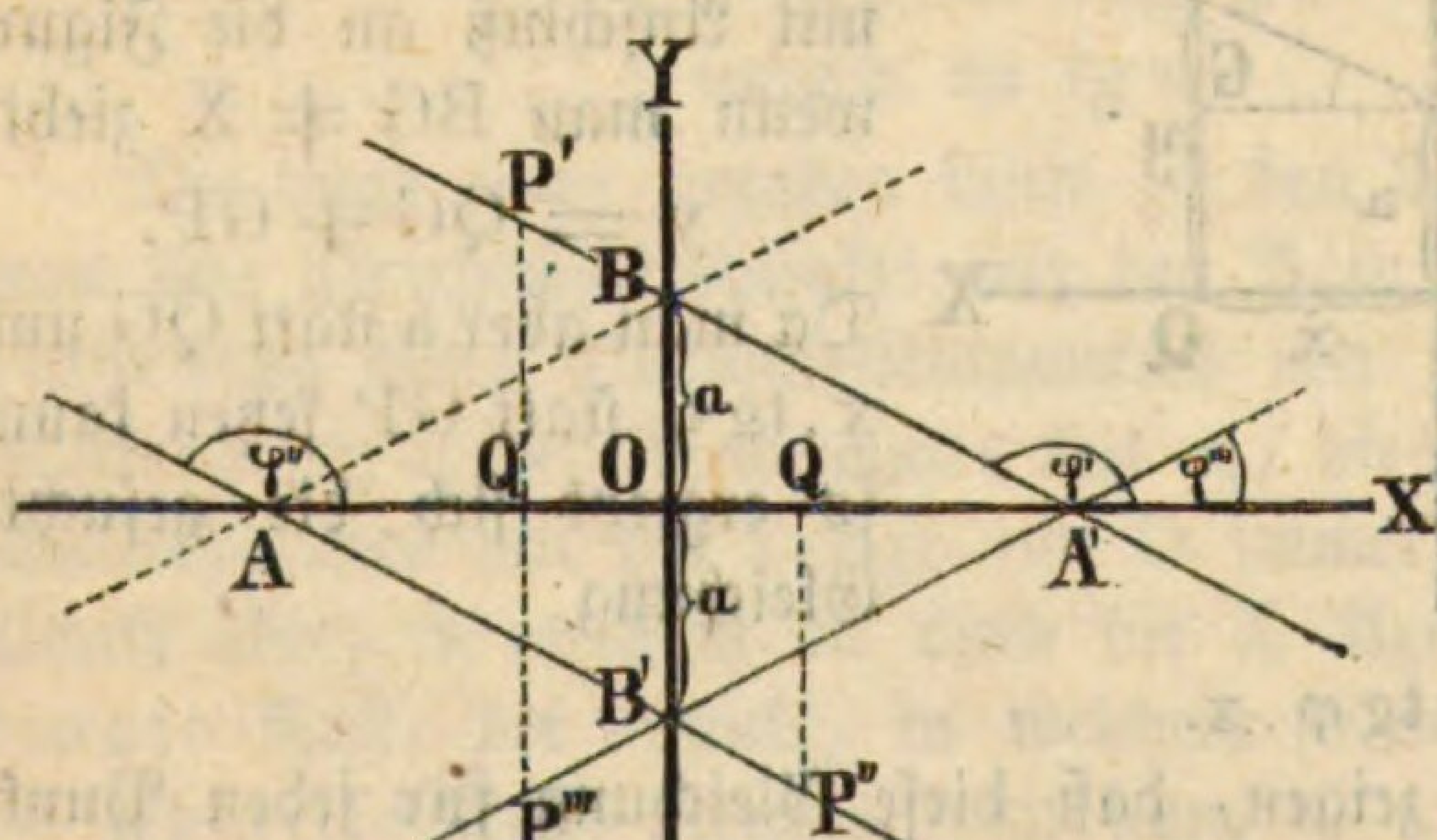
Endlich ist die Gleichung (1.) richtig für jeden Punkt links von A, z. B. für den Punkt E. Man findet aus der Figur leicht (wenn man sich durch E eine Parallele mit X gezogen denkt):

$$EF = OF \cdot tg\varphi - a.$$

Setzt man aber in (1.) $y = -EF$ und $x = -OF$, so erhält man dieselbe Gleichung. — Unter CD, OD, EF und OF hat man in diesem Beweise die absolute Länge dieser Linien zu verstehen.

Nachdem nun bewiesen ist, daß die Gleichung $y = a + tg\varphi \cdot x$ für jeden Punkt der Linie wahr ist, hat man noch zu zeigen, daß sie für jeden Werth der constanten Größen a und φ richtig ist. Für $a = 0$ bleibt sie wichtig, weil in diesem Falle an der vorstehenden Entwickelung nichts zu ändern ist. Was die übrigen Fälle betrifft, so wurde in der Figur a positiv, φ spitz angenommen; die Linie liegt dann im 2ten Quadranten. Ist a positiv und φ stumpf, so liegt sie im 1ten Quadranten; ist a negativ und φ spitz, im 4ten; ist a negativ und φ stumpf, im 3ten. Für jede Lage ergiebt sich dieselbe Gleichung (1.); man kann dies beweisen, indem man die Linie im 1ten, 3ten und 4ten Quadranten auf die Linie im 2ten Quadranten zurückführt.

Beweis für die Linie A'B im 1ten Quadranten. Macht man OA = OA', zieht die Linie AB und denkt sich den 1ten Quadranten so um die Axe OY herumgelegt, daß er den 2ten Quadranten deckt, so fällt die Linie A'B ihrer ganzen Ausdehnung nach mit der Linie AB zusammen. Hieraus folgt, daß für die Linie A'B die Gleichung (1.) Statt finden muß,



wenn man die Coordinaten von O aus nach links als die positiven ansieht, so daß z. B. für den Punkt P' die Abscisse OQ' positiv, die Ordinate Q'P' auch positiv ist, und wenn man den Nebenwinkel von φ' als den Winkel ansieht, welchen die Linie mit der X-Axe bildet, denn dieser Winkel deckt den $\measuredangle$ BAO. Man hat also:

$$y = a + tg(180^\circ - \varphi') \cdot x.$$

Aus dieser Gleichung kann man aber nach §. 415. Nr. 1. die Gleichung

der Linie A'B ableiten, wenn die Abscisse nach rechts (von O aus) die positiven sein sollen, indem man $-x$ statt x setzt. So entsteht:

$$y = a + tg(180° - \varphi').(-x) \text{ oder}$$
$$y = a + tg\varphi'.x.$$

Beweis für die Linie AB' im 3ten Quadranten. Die Linie AB' deckt die Linie AB (vorausgesetzt, daß $OB' = a$ ist), wenn man sich den 3ten Quadranten so um die Axe X herumgelegt denkt, daß er mit dem 2ten Quadranten zusammen fällt. Hieraus folgt (wie oben): nimmt man in Bezug auf AB' die Abscissen nach rechts von O aus positiv, die Ordinaten nach unten positiv, so ist die Gleichung dieser Linie:

$$y = a + tg(180° - \varphi'').x.$$

Setzt man nach §. 415. Nr. 2. $-y$ statt y, so erhält man die Gleichung der Linie AB', wenn die Ordinaten nach oben die positiven sein sollen. Es entsteht:

$$-y = a + tg(180° - \varphi'').x.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit -1, so folgt:

$$y = (-a) + tg\varphi''.x.$$

Beweis für die Linie A'B' im 4ten Quadranten. Denkt man sich den 4ten Quadranten so um die Y-Axe herumgelegt, daß er den 3ten Quadranten deckt, dann aber noch so um die X-Axe herumgelegt, daß er den 2ten Quadranten deckt, so fällt A'B' mit AB zusammen. Man erkennt hieraus, daß für die Linie A'B', wenn man die Abscissen nach links (von O aus) und die Ordinaten nach unten als die positiven gelten läßt, die Gleichung Statt findet:

$$y = a + tg\varphi'''.x.$$

Setzt man nach §. 415. Nr. 3. $-x$ statt x, und $-y$ statt y, so erhält man die Gleichung der Linie A'B' für die gebräuchlichen Coordinaten richtungen:

$$-y = a + tg\varphi'''.(-x).$$

Multiplicirt man mit -1, so folgt:

$$y = (-a) + tg\varphi'''.x.$$

§. 418.

Ist die gerade Linie der X-Axe parallel, so hat jeder Punkt dieselbe Ordinate; bezeichnen wir sie mit a, so ist $y = a$ die Gleichung der Linie, die wir in der Form schreiben können:

$$y = a + 0.x.$$

Ist die Linie der Y-Axe parallel, so hat jeder Punkt dieselbe Abscisse; bezeichnen wir sie mit a, so ist $x = a$ die Gleichung der Linie, die wir in der Form schreiben können:

$$0 . y = -a + x.$$

Hieraus und aus

$$(1.) \qquad y = a + \operatorname{tg}\varphi . x$$

folgt das Gesetz:

die Gleichung jeder geraden Linie ist eine Gleichung des ersten Grades zwischen x und y. Bezeichnen wir $\operatorname{tg}\varphi$ mit b, so ist die Gleichung der geraden Linie:

$$(2.) \qquad y = a + bx.$$

Es entsteht jetzt die Frage: stellt auch jede Gleichung des ersten Grades zwischen x und y eine gerade Linie vor? Dies ist der Fall und folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden §.

Die Gleichung des ersten Grades zwischen x und y hat allgemein die Form

$$my + nx + p = 0.$$

Ist $m = 0$, so hat jeder Punkt der Linie von der Y-Axe den Abstand $-\frac{p}{n}$; ist $n = 0$, so hat jeder Punkt von der X-Axe den Abstand $-\frac{p}{m}$; in beiden Fällen ist die Linie eine gerade. Was die andern Fälle betrifft, so folgt aus der gegebenen Gleichung:

$$y = \left(-\frac{p}{m}\right) + \left(-\frac{n}{m}\right) . x.$$

Legt man nun durch den Punkt der Y-Axe, welcher die Ordinate $-\frac{p}{m}$ hat, eine gerade Linie, welche die X-Axe unter einem Winkel schneidet, dessen tg. gleich $-\frac{n}{m}$ ist, so ist die Gleichung dieser geraden Linie:

$$y = \left(-\frac{p}{m}\right) + \left(-\frac{n}{m}\right) . x,$$

und weil diese Gleichung mit der vorhergehenden identisch ist, zu jedem Werth von x aber nur ein Werth von y gehört, so fallen alle Punkte der Linie, welche der Gleichung $my + nx + p = 0$ angehört, mit den Punkten der construirten geraden Linie zusammen; jene Linie ist also auch eine gerade. Hieraus folgt nun:

die Linie des ersten Grades ist die gerade Linie.

§. 419.

Beurtheilung der Lage einer geraden Linie aus ihrer Gleichung.

1) Wir schicken die folgenden besonderen Fälle voraus.

Die Gleichung $my + 0.x + p = 0$ oder

$$y = -\frac{p}{m}$$

stellt eine mit X parallele Linie vor, welche von X den Abstand $-\frac{p}{m}$ hat und auf der positiven, oder negativen Seite von X liegt, je nachdem $-\frac{p}{m}$ positiv, oder negativ ist.

Die Gleichung $0.y + nx + p = 0$ oder

$$x = -\frac{p}{n}$$

stellt eine mit Y parallele Linie vor, in der Entfernung $-\frac{p}{n}$ von Y, welche auf der positiven, oder negativen Seite von Y liegt, je nachdem $-\frac{p}{n}$ positiv, oder negativ ist.

Die Gleichung $y = 0$ ist die Gleichung der Y-Axe, die Gleichung $x = 0$ die Gleichung der X-Axe.

Die Linie $my + nx = 0$ geht durch den Durchschnittspunkt O der Axen, weil für sie x und y gleichzeitig Null werden.

2) Um die Lage aller anderen geraden Linien zu beurtheilen, bringen wir die Gleichung einer jeden auf die Form

$$y = a + bx.$$

Die constanten Zahlen a und b nennen wir die Constanten der Gleichung oder ihre Parameter. Aus der Entwicklung der Gleichung der geraden Linie, oder aus ihrer Homogeneität, folgt, daß a eine Linie, b aber eine abstracte Zahl vorstellt; x, y und a sind immer auf dieselbe Längeneinheit zu beziehen; diese Längeneinheit kann jede beliebige sein.

Da die Gleichung jeder geraden Linie vom ersten Grade ist, so kann die besondere Lage einer einzelnen Linie nur von den Constanten ihrer Gleichung abhängen. Um allgemein gültige Gesetze für die Lage einer Linie aus den Constanten ihrer Gleichung abzuleiten, ist es daher nöthig, daß wir immer dieselbe Form der Gleichung zum Grunde legen:

$$y = a + bx.$$

Die Durchschnittspunkte mit den Axen.

Es soll x_0 die Abscisse des Durchschnittspunktes der Linie mit

der X-Axe, y_0 die Ordinate ihres Durchschnittspunktes mit der Y-Axe bezeichnen; nach §. 416. findet man:

$$\text{I.} \quad x_0 = -\frac{a}{b} \text{ und } y_0 = a.$$

Die Winkel φ und ψ, welche die Linie mit den Axen X und Y bildet.

Aus §. 417. und 418. folgt unmittelbar:

$$\text{II.} \quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg}\psi = b.$$

Man erhält aber auch aus der Figur für jede Lage der Linie $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{y_0}{x_0}$, woraus wieder $\operatorname{tg}\varphi = b$ folgt. Der Winkel ist also spitz, oder stumpf, je nachdem b positiv, oder negativ ist.

Aus I. und II. folgt: der Durchschnittspunkt der Linie mit der Y-Axe hängt von a allein, der Winkel, den die Linie mit den Axen bildet, von b allein ab; der Durchschnittspunkt mit der X-Axe hängt von a und b ab. Wenn man also in der Gleichung

$$y = a + bx$$

b unverändert läßt, aber a stetig ändert, so rückt die Linie parallel mit ihrer ursprünglichen Lage fort; läßt man a unverändert, ändert aber b stetig, so bewegt sich die Linie drehend um ihren Durchschnittspunkt mit der Y-Axe. Werden a und b stetig geändert, so bewegt sich die Linie gleichzeitig fortschreitend und drehend.

Die Entfernung der Linie vom Durchschnittspunkt O der Axen.

Diese Entfernung p findet man entweder nach dem Gesetz §. 88. Anmerk. 1.:

$$p = \frac{x_0 \cdot y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

oder trigonometrisch:

$$p = x_0 . \sin\varphi \text{ (oder } y_0 . \sin\psi),$$

nur muß man für x_0 und y_0 die absoluten Werthe dieser Längen setzen. Es entsteht:

$$\text{III.} \quad p = \frac{a}{\sqrt{1 + b^2}}.$$

Auch hier ist wieder für a sein absoluter Werth zu setzen; der Quadrant, in welchem p liegt, bestimmt sich sehr einfach durch die Vorzeichen von x_0 und y_0; er ist derselbe, in welchem die Linie liegt.

Zur Uebung. Aufg. 1. $y = 1 + x$.

Aufl. $x_0 = -1$; $y_0 = +1$; $\varphi = \psi = 45°$; $p = 0{,}7071$; p liegt im 2ten Quadranten. — Der Leser möge bei allen Beispielen die durch ihre Gleichung gegebene Linie aufzeichnen.

Aufg. 2. $y = 1 - x$.

Aufl. $x_0 = +1$; $y_0 = +1$; $\varphi = \psi = 135°$; $p = 0{,}7071$ und liegt im 1ten Quadranten.

Aufg. 3. $y + 2x = 0$.

Aufl. Die Linie geht durch O und liegt im 2ten und 4ten Quadranten; $\varphi = 116° \; 33' \; 54{,}2''$; $\psi = 153° \; 26' \; 5{,}8''$.

Aufg. 4. $2y - 3x + 6 = 0$.

Aufl. $x_0 = +2$; $y_0 = -3$; $\varphi = 56° \; 18' \; 36{,}7''$; $\psi = 33° \; 41' \; 23{,}3''$; $p = 1{,}6641$.

Aufg. 5. $5x + 7 = 0$.

Aufl. Die Linie ist parallel Y und liegt auf der negativen Seite von X, in der Entfernung 1,4 von dieser Axe.

Aufg. 6. $2y - 15 = 0$.

Aufl. Die Linie ist parallel X und liegt auf der positiven Seite von X, in der Entfernung 7,5 von dieser Axe.

Aufg. 7. In welchen Quadranten liegen folgende Linien:

1) $3y + 2x + 6 = 0$; 2) $3y - 2x + 6 = 0$;
3) $3y + 2x - 6 = 0$; 4) $3y - 2x - 6 = 0$?

Antw. Resp. im 3ten, 4ten, 1ten und 2ten Quadranten.

Aufg. 8. $10y - 7x + 70 = 0$.

Aufl. $x_0 = +10$; $y_0 = -7$; $\varphi = 34° \; 59' \; 31''$; $\psi = 55° \; 0' \; 29''$; $p = 5{,}7346$.

Aufg. 9. In welchen Quadranten liegen folgende Linien:

1) $2x = 7 - 3y$ 2) $3x = 4 + 5y$
3) $4x = -1 + 3y$ 4) $5x = -3 - 4y$?

Antw. Resp. im 1ten, 4ten, 2ten und 3ten Quadranten.

Aufg. 10. Wie weit ist die Linie $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ vom Punkte O entfernt?

Antw. $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

§. 420.

Wir haben die Gleichung der geraden Linie aus den beiden Bedingungen hergeleitet: die Linie soll die Axe Y in einem bestimmten Punkte und die Axe X unter einem bestimmten Winkel schneiden.

Natürlich kann man statt dieser Bedingungen andere wählen; ihre Anzahl bleibt aber zwei, wie schon daraus hervorgeht, daß die Gleichung

$$y = a + bx$$

nur zwei Constanten hat, jede Gleichung des ersten Grades zwischen x und y aber auf diese Form gebracht werden kann. Anstatt nun bei anderen Bedingungen die Gleichung der geraden Linie unmittelbar aus diesen Bedingungen so abzuleiten, wie dies für die Bedingungen a und φ in §. 417. geschehen ist, kann man die Gleichung

$$y = a + bx$$

zum Grunde legen und die Parameter a und b den Bedingungen gemäß bestimmen; es geben diese Bedingungen für a und b zwei Bestimmungsgleichungen, aus denen die Unbekannten a und b zu entwickeln sind. Die nächsten Aufgaben beziehen sich auf das Auffinden der Gleichung einer geraden Linie, welche gewisse Bedingungen erfüllen soll. Weil hierbei häufig ein Punkt durch seine Abscisse $x = p$ und seine Ordinate $y = q$ gegeben ist, so werden wir in diesem Falle kürzer sagen: ein Punkt ist durch $(x = p, y = q)$ gegeben, oder ein Punkt ist durch (p, q) gegeben, so daß der erste Buchstabe sich auf die Abscisse, der zweite auf die Ordinate bezieht.

§. 421.

Die Gleichung der geraden Linie, welche durch gegebene Punkte gehen soll.

1) Die Gleichung jeder Linie zu bestimmen, welche durch einen Punkt $P(x = p, y = q)$ geht.

Auflösung. Setzt man in $y = a + bx$, p statt x, so muß y gleich q werden. Man hat sonach

$$y = a + b.x$$
$$q = a + b.p.$$

Zieht man die Gleichungen von einander ab, so folgt

$$\text{I.} \quad y - q = b(x - p).$$

Aus der Form dieser Gleichung erkennt man unmittelbar, daß $y = q$ wird, wenn $x = p$ ist. Die Gleichung enthält die Constante b, für welche jeder beliebige Werth gesetzt werden kann.

Anmerkung. Ordnet man die Gleichung I., so wird b der Coefficient von x; daher ist der Werth von b für jede Linie in I. die tg. des Winkels, unter welchem sie die X-Axe schneidet. Soll also z. B. die Linie durch den Punkt (p, q) gehen und mit der X-Axe den Winkel α bilden, so ist ihre Gleichung:

$$y - q = tg\alpha.(x - p).$$

2) Die Gleichung der geraden Linie zu bestimmen, welche durch zwei gegebene Punkte P (x = p, y = q) und P′ (x = p′, y = q′) geht.

Auflösung. Soll die Linie $y = a + bx$ durch P, dann auch durch P′ gehen, so müssen nach I. die beiden Gleichungen Statt finden:

$$y - q = b.(x - p)$$
$$y - q' = b.(x - p').$$

Dividirt man diese Gleichungen durch einander, so ergiebt sich:

$$\text{II.} \quad \frac{y-q}{y-q'} = \frac{x-p}{x-p'},$$

d. h. es verhält sich die Differenz der Ordinate der Linie und der Ordinate des einen Punktes zur Differenz der Ordinate der Linie und der Ordinate des andern Punktes, wie die Differenz der Abscisse der Linie und der Abscisse des ersten Punktes zur Differenz der Abscisse der Linie und der Abscisse des zweiten Punktes.

In der vorstehenden Gleichung kommen x und y zweimal vor; will man nun die Gleichung auf die Form $y = a + bx$ bringen, so ist die Anwendung des Satzes Arithm. §. 45. I. anzurathen, durch welche x und y einmal fortfallen.

$$\frac{y-q}{(y-q)-(y-q')} = \frac{x-p}{(x-p)-(x-p')} \text{ oder}$$

$$(1.) \quad \frac{y-q}{q'-q} = \frac{x-p}{p'-p}.$$

Ordnet man diese Gleichung, so entsteht

$$(2.) \quad y = \frac{p'q - pq'}{p'-p} + \frac{q'-q}{p'-p}x.$$

Anmerkung. Daß die Linie in II. durch P und P′ geht, erkennt man am einfachsten, wenn man ihre Gleichung auf folgende Form bringt:

$$(y-q).(x-p') = (x-p).(y-q').$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar $y = q$, wenn $x = p$ ist, und $y = q'$, wenn $x = p'$ ist.

§. 422.

Uebungs-Aufgaben über eine gerade Linie.

Aufgabe 1. Eine Linie geht durch zwei Punkte, welche durch (x = 3, y = 6) und (x = −4, y = −2) gegeben sind; man soll die Gleichung der Linie, ihre Durchschnittspunkte mit den Axen, die Winkel, welche sie mit den Axen bildet, und ihre Entfernung p von O finden.

Aufl. Die gesuchte Gleichung der Linie ist:

$$\frac{y-6}{y+2} = \frac{x-3}{x+4},$$

aus ihr folgt: $\frac{y-6}{-8} = \frac{x-3}{-7}$, oder:

$$y = \frac{18}{7} + \frac{8}{7}x.$$

Man findet weiter: $x_0 = -\frac{9}{4}$; $y_0 = \frac{18}{7}$; $\varphi = 48^\circ\ 48'\ 50{,}7''$; $\psi = 41^\circ\ 11'\ 9{,}3''$; $p = 1{,}6933$.

Aufgabe 2. Man soll die Gleichungen folgender Linien bestimmen, von denen jede durch zwei Punkte gegeben ist:

1) gegeben durch $(x=3,\ y=2)$ und $(x=6,\ y=3)$;
2) » » $(x=1,\ y=6)$ » $(x=4,\ y=-2)$;
3) » » $(x=0,\ y=4)$ » $(x=-4,\ y=-2)$;
4) » » $(x=-6,\ y=1)$ » $(x=1,\ y=-6)$;
5) » » $(x=-2,\ y=-2)$ » $(x=4,\ y=0)$;
6) » » $(x=-1,\ y=-2)$ » $(x=-4,\ y=-6)$;
7) » » $(x=3,\ y=4)$ » $(x=-3,\ y=6)$;
8) » » $(x=-1,\ y=-1)$ » $(x=4,\ y=-6)$.

Aufl. 1) $y = 1 + \frac{1}{3}x$; 2) $y = \frac{26}{3} - \frac{8}{3}x$;

3) $y = 4 + \frac{3}{2}x$; 4) $y = -5 - x$;

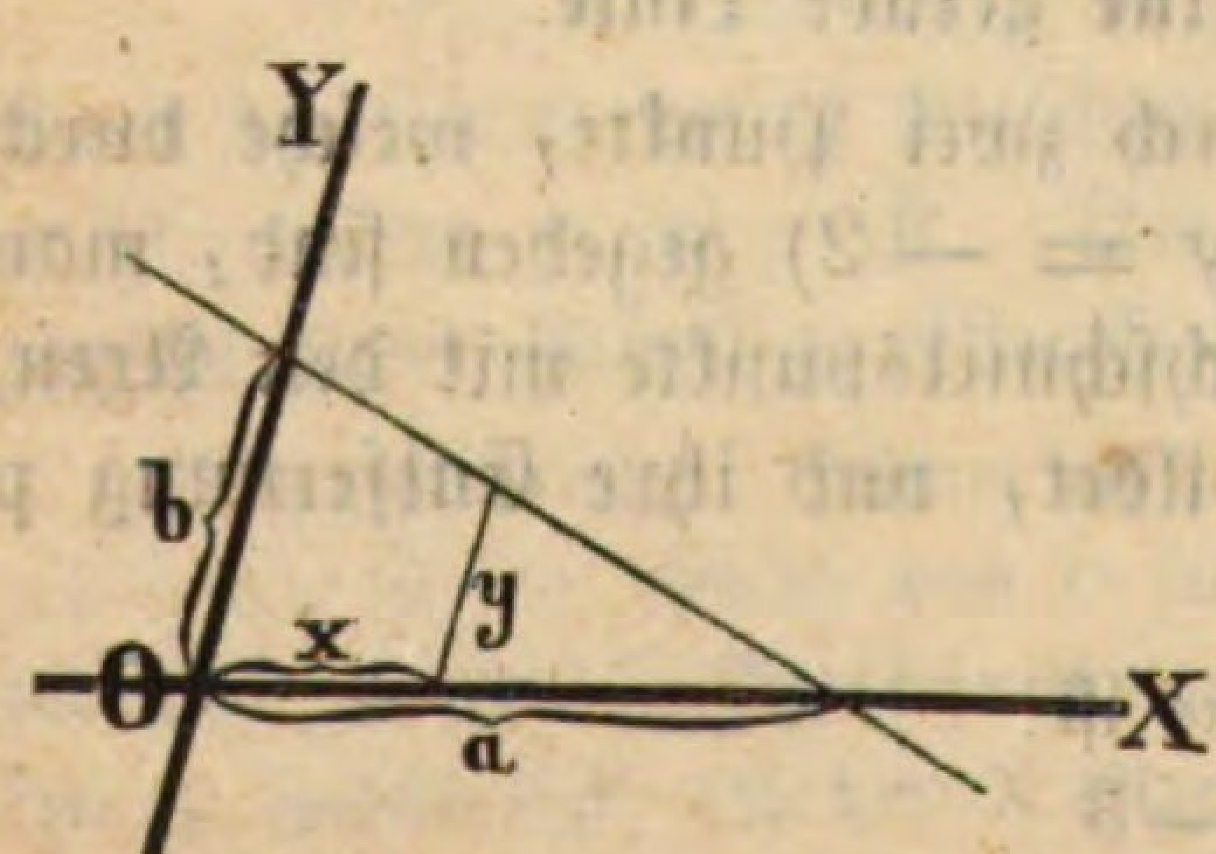
5) $y = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x$; 6) $y = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x$;

7) $y = 5 - \frac{1}{3}x$; 8) $y = -2 - x$.

Aufgabe 3. Wie heißt die Gleichung der Linie, welche die X-Axe im Endpunkt der Abscisse $x = a$, die Y-Axe im Endpunkt der Ordinate $y = b$ schneidet?

Aufl. Aus $\frac{y-0}{y-b} = \frac{x-a}{x-0}$ folgt $y = b - \frac{b}{a}x$. Diese Gleichung läßt sich auf die Form bringen:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



Anmerk. Auch bei schiefwinkligen Coordinaten (§. 183. II.) hat die Gleichung der geraden Linie, wenn sie die Axen in den Endpunkten der Coordinaten a und b schneidet, die Form:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Aus ähnlichen Dreiecken erhält man die Proportion $y : b = a - x : a$, aus welcher die vorstehende Gleichung folgt.

Aufgabe 4. Eine von O ausgehende Linie OP ist gleich p und bildet mit den Axen X und Y die Winkel α und β (im Sinne des §. 412.); man soll die Gleichung der Linie bestimmen, welche durch P geht und auf OP senkrecht steht.

Aufl. Die Linie schneidet die Axen in den Endpunkten der Coordinaten $p.\sec\alpha$ und $p.\sec\beta$; hieraus folgt mit Hülfe der Aufgabe 3. die Gleichung:

$$x.\cos\alpha + y.\cos\beta = p.$$

Aufgabe 5. Es ist eine Linie OA = a gegeben; man soll den geometrischen Ort des Punktes P der Bedingung gemäß finden, daß die von P auf OA gefällte Senkrechte der Differenz der Abschnitte (§. 70.) gleich sein soll, in welche sie OA zerlegt. Hierbei soll der dem Punkte O anliegende Abschnitt der Minuend sein.

Aufl. Nimmt man OA zur Axe und O zum Anfangspunkt der Abscissen, so ist der gesuchte Ort die gerade Linie

$$y = -a + 2x.$$

Es ist $x_0 = \frac{a}{2}$, $y_0 = -a$, $\varphi = 63^\circ\ 26'\ 6''$. Die Gleichung gilt unter der Voraussetzung, daß jeder dem Punkte O oder A anliegende äußere Abschnitt negativ zu nehmen ist, wenn er resp. links von O oder rechts von A liegt. Nimmt man die äußeren Abschnitte im absoluten Sinne, so ist bekanntlich ihre Differenz constant, gleich a. — Wollte man die Bedingung stellen, daß die von P gefällte Senkrechte der Differenz der absoluten Werthe der Abschnitte, in welche sie die Linie OA zerlegt, gleich sein soll, so ist diese Bedingung weder durch eine gerade noch durch eine krumme Linie zu erfüllen, sondern durch eine gebrochene Linie, welche aus drei Theilen besteht: aus der Linie $y = -a$ zwischen den Grenzen $x = -\infty$ bis $x = 0$, aus der Linie $y = -a + 2x$ zwischen den Grenzen $x = 0$ bis $x = a$, und aus der Linie $y = +a$ zwischen den Grenzen $x = a$ bis $x = +\infty$.

Aufgabe 6. Es ist ein Punkt P durch ($x = 9$, $y = 2$) gegeben; man soll die Gleichung der durch P gehenden Linie finden, welche in dem ersten Quadranten liegt und mit den Axen ein Dreieck vom Inhalt 48 Quadrat-Einheiten begrenzt.

Aufl. Jede durch P gehende Linie hat die Form

$$y - 2 = b(x - 9),$$

und b muß nun so bestimmt werden, daß auch die andere Bedingung der Aufgabe erfüllt wird. Aus der vorstehenden Gleichung folgt aber

$$x_0 = \frac{9b - 2}{b} \quad \text{und} \quad y_0 = 2 - 9b;$$

daher muß $\frac{-(9b - 2)^2}{b} = 96$ sein, woraus folgt:

$$b = -\frac{2}{27}, \quad \text{oder} \quad b = -\frac{2}{3}.$$

Es giebt also zwei Linien, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

$$1)\quad y = \frac{8}{3} - \frac{2}{27}x.$$

$$2)\quad y = 8 - \frac{2}{3}x.$$

Aufgabe 7. Dieselbe Aufgabe, aber P ist durch $(x = 4,\ y = 6)$ gegeben, und der Inhalt des Dreiecks soll 54 Quadrat-Einheiten enthalten.

Aufl. Man findet wieder zwei Linien:

$$1)\quad y = 18 - 3x.$$

$$2)\quad y = 9 - \frac{3}{4}x.$$

Aufgabe 8. Ein Punkt P ist durch $(x = 4,\ y = 3)$ gegeben; man soll eine durch P gehende Linie bestimmen, welche im 2ten Quadranten liegt und mit den Axen ein Dreieck vom Inhalt 8 Quadrat-Einheiten einschließt.

Aufl. $y = 2 + \frac{1}{4}x.$

Aufgabe 9. Dieselbe Aufgabe, aber die Linie soll in dem 4ten Quadranten liegen.

Aufl. $y = -6 + \frac{9}{4}x.$ — Die Auflösung ergiebt sich bei der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe.

Aufgabe 10. Die Linie zu bestimmen, welche durch einen Punkt P geht, der durch $(x = 2,\ y = -2)$ gegeben ist, und mit den Axen ein Dreieck vom Inhalt 9 Quadrat-Einheiten einschließt, wobei der Quadrant, in welchem die Linie liegt, beliebig sein soll.

Aufl. Man findet vier Linien:

$$1)\quad y = -6 + 2x,$$

$$2)\quad y = -3 + \frac{1}{2}x,$$

$$3)\quad y = -\frac{-9 + 3\sqrt{17}}{2} - \frac{13 - 3\sqrt{17}}{4}x \text{ und}$$

$$4)\quad y = +\frac{9 + 3\sqrt{17}}{2} - \frac{13 + 3\sqrt{17}}{4}x.$$

Die ersten beiden Linien liegen im 4ten Quadranten, die dritte im 3ten, die vierte im 1ten Quadranten. — In Bezug auf die Auflösung sei Folgendes bemerkt: Zuerst bestimmt man die Gleichung der Linie, welche durch P geht. In dieser Gleichung ist eine Constante, welche durch den Inhalt des Dreiecks zu bestimmen ist. Man findet zunächst x_0 und y_0 und urtheilt nun so: da P im 4ten Quadranten liegt, so kann die gesuchte Linie im 4ten, 1ten und 3ten Qua-

dranten liegen. Liegt sie im 4ten, so ist x_0 positiv und y_0 negativ; folglich muß, da man für x_0 und y_0 ihre absoluten Werthe zu nehmen hat,

$$(1.)\qquad x_0 \cdot (-y_0) = 18$$

sein. Liegt sie im 1ten, so ist x_0 positiv und y_0 positiv, folglich muß

$$(2.)\qquad x_0 \cdot y_0 = 18$$

sein. Liegt sie endlich im 3ten Quadranten, so ist x_0 negativ und y_0 negativ, daher muß

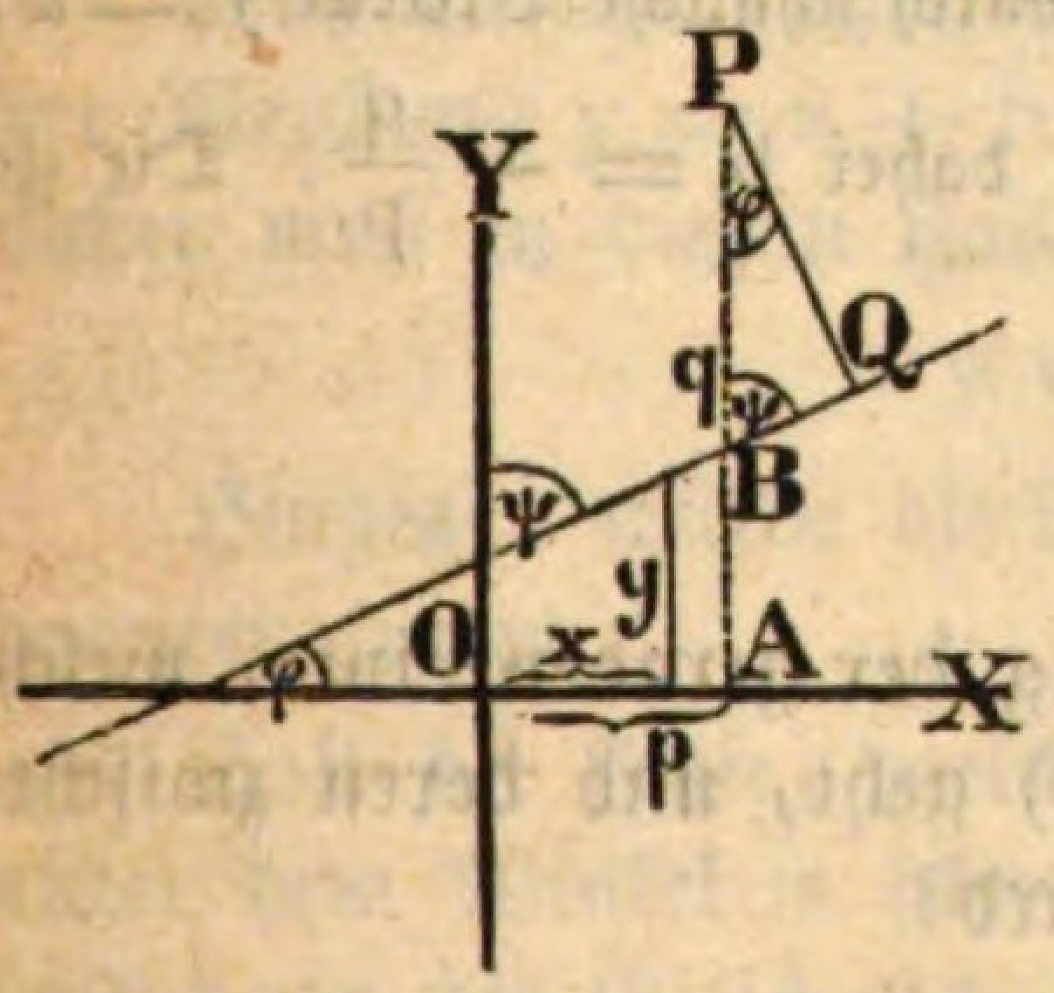
$$(3.)\qquad (-x_0) \cdot (-y_0) = 18$$

sein. Die Gleichung (3.) fällt mit (2.) zusammen; daher muß diese immer in Bezug auf die zu entwickelnde Constante eine quadratische Gleichung mit zwei ungleichen reellen Wurzeln werden. Die Wurzeln der Gleichung (1.) können reell und ungleich, reell und gleich, endlich auch imaginär werden.

Aufgabe 11. Wie untersucht man, ob ein Punkt, welcher durch $(x = p, y = q)$ gegeben ist, in der Linie $y = a + bx$ liegt, oder nicht?

Aufl. Der Punkt liegt in der Linie, wenn $q = a + bp$ ist, sonst nicht.

Aufgabe 12. Ein Punkt P ist durch $(x = p, y = q)$ gegeben, eine Linie durch die Gleichung $y = a + bx$; man soll die Länge der von P auf die Linie gefällten Senkrechten PQ berechnen.



Aufl. Schneidet die Ordinate q des Punktes P, nöthigenfalls verlängert, die gegebene Linie im Punkte B, so ist

$$PQ = PB . \sin\psi.$$

Um den Punkt B zu finden, braucht man nur die Ordinate der Linie zu suchen, welche zur Abscisse $x = p$ gehört. Man findet $AB = a + bp$ folglich $PB = q - (a + bp)$.

Aus $\cot g\,\psi = b$ folgt ferner $\sin\psi = \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}$, daher ist, wenn man die Werthe für PB und $\sin\psi$ oben substituirt:

$$PQ = \frac{q-(a+bp)}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Ergiebt sich der Ausdruck für PQ negativ, so muß man unter PQ sein absolutes Glied verstehen; der Nenner, welcher aus $\sin\psi$ hervorging, ist immer positiv zu nehmen. — Statt $\sin\psi$ kann man auch $\cos\varphi$ setzen, nur muß man, wenn φ stumpf ist, den absoluten Werth dieses cos. nehmen (also den cos. des Nebenwinkels von φ).

Aufgabe 13. Wie weit ist der Punkt, welcher durch $(x = -2, y = -8)$ gegeben ist, von der Linie $y + 4x + 1 = 0$ entfernt?

Aufl. Der Punkt der Linie, welcher zur Abscisse -2 gehört, hat die

Ordinate $+7$; ferner ist $\cot g \psi = -4$, daher $\sin \psi = \frac{1}{\sqrt{17}}$. Die gesuchte Entfernung ist daher:

$$\frac{7-(-8)}{\sqrt{17}} = \frac{15}{\sqrt{17}} = 3{,}638034.$$

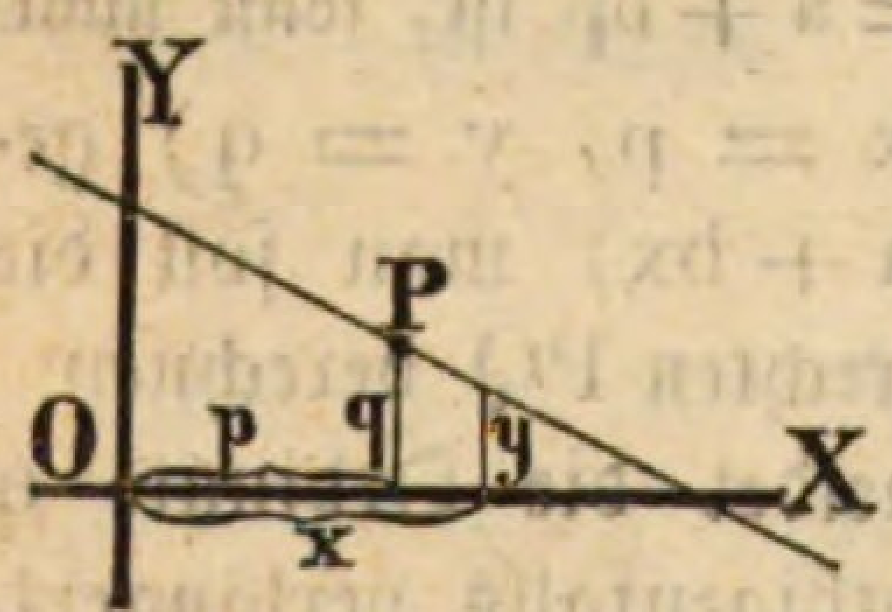
Aufgabe 14. Wie weit ist der durch $(x = 5,\ y = 8)$ gegebene Punkt von der Linie $3y + 2x + 12 = 0$ entfernt?

Antw. 12,7581.

Aufgabe 15. Wie weit ist der durch $(x = 10,\ y = -2)$ gegebene Punkt von der Linie $5y + 6x + 60 = 0$ entfernt?

Antw. 14,084.

Aufgabe 16. Ein Punkt P ist durch $(x = p,\ y = q)$ gegeben; man soll die Gleichung der durch P gehenden geraden Linie bestimmen, deren zwischen den Axen liegender Theil in P halbirt wird.



Aufl. Die Gleichung jeder durch P gehenden Linie hat die Form $y - q = b(x - p)$, und die Constante b bleibt noch zu bestimmen. Nun folgt aus der vorstehenden Gleichung $y_0 = q - bp$, und aus der Aufgabe folgt durch ähnliche Dreiecke $y_0 = 2q$; oder $q - bp = 2q$; daher $b = -\frac{q}{p}$. Die gesuchte Gleichung heißt also:

$$y = 2q - \frac{q}{p} \cdot x.$$

Aufgabe 17. Wie heißt die Gleichung der geraden Linie, welche durch den Punkt P $(x = -6,\ y = -9)$ geht, und deren zwischen den Axen liegendes Stück in P halbirt wird?

Antw. $y = -18 - \frac{3}{2} x.$

Aufgabe 18. Wie heißt die Gleichung der geraden Linie, welche durch den Punkt $(x = 3,\ y = 5)$ geht und die X-Axe unter einem Winkel von 60° schneidet?

Antw. $y = 5 - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot x.$

Aufgabe 19. Wie heißt die Gleichung der geraden Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und die X-Axe unter einem Winkel von 45° schneidet?

Antw. $y = x.$

Aufgabe 20. Wenn aber der Winkel in der vorigen Aufgabe gleich 135° sein soll?

Antw. $y = -x.$

Aufgabe 21. Wie heißt die Gleichung der geraden Linie, welche den durch ($x = -5$, $y = -12$) gegebenen Punkt mit dem Durchschnittspunkt der Axen verbindet?

Antw. $y = \frac{12}{5} x$.

Aufgabe 22. Die Gleichung aller geraden Linien zu bestimmen, deren Entfernung vom Durchschnittspunkt der Axen die absolute Länge p hat.

Aufl. Setzt man für die Linie die Form $y = a + bx$ voraus, so ist, a absolut genommen, nach §. 419. III.:

$$p = \frac{a}{\sqrt{1 + b^2}}.$$

Hieraus folgt $a = p\sqrt{1 + b^2}$; daher ist die Gleichung aller gesuchten Linien:

$$y = p\sqrt{1 + b^2} + bx,$$

so daß b unbestimmt bleibt und beliebig gewählt werden kann; ebenso kann $\sqrt{1 + b^2}$ positiv oder negativ genommen werden.

Soll die Linie etwa in dem 4ten Quadranten liegen, so folgt aus der Gleichung $y = a + bx$, daß a negativ und b positiv sein muß; daher muß in diesem Falle die gesuchte Gleichung sein:

$$y = -p\sqrt{1 + b^2} + bx.$$

Hingegen würde die Linie $y = -p\sqrt{1 + b^2} - bx$ im 3ten Quadranten liegen.

Soll die Linie, welche von O den Abstand p hat, die X-Axe unter dem Winkel φ schneiden, so ist $b = \operatorname{tg}\varphi$ zu setzen. Man erhält dann die Gleichung:

$$y = \pm p . \sec\varphi + \operatorname{tg}\varphi . x.$$

Soll die Linie mit der X-Axe parallel sein, so ist $\varphi = 0$ zu setzen; man erhält dann $y = \pm p$. — Soll die Linie mit der Y-Axe parallel sein, so ist $\varphi = 90°$ zu setzen. In diesem Falle multiplicire man die Gleichung $y = \pm p . \sec\varphi + \operatorname{tg}\varphi . x$ zunächst mit $\cos\varphi$ und setze dann $\varphi = 90°$. Man erhält $x = \mp p$.

Aufgabe 23. Die Gleichung der geraden Linie zu bestimmen, welche vom Durchschnittspunkt der Axen den Abstand 5 hat und die X-Axe unter einem Winkel von 60° schneidet.

Aufl. Man erhält zwei Linien dieser Art.

Im 2ten Quadranten: $y = 10 + \sqrt{3} . x$.

Im 4ten Quadranten: $y = -10 + \sqrt{3} . x$

Aufgabe 24. Welche gerade Linie hat vom Durchschnittspunkt der Axen den Abstand 6 und schneidet die X-Axe unter einem Winkel von 150°?

Antw. Man erhält zwei Linien dieser Art.

Im 1ten Quadranten: $y = 4\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{3}} . x.$

Im 3ten Quadranten: $y = -4\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{3}} . x.$

Aufgabe 25. Aus den Vorzeichen der Parameter a und b zu beurtheilen, in welchem Quadranten die Linie

$$y = a + bx$$

liegt.

Aufl. Im 1ten Quadranten, wenn a positiv, b negativ ist,
» 2ten » » a positiv, b positiv »
» 3ten » » a negativ, b negativ »
» 4ten » » a negativ, b positiv ».

§. 423.

Zwei gerade Linien.

Um die Lage zweier geraden Linien zu einander zu bestimmen, kommt es hauptsächlich darauf an, zu entscheiden, ob sie parallel sind, oder nicht, und im zweiten Falle ihren Durchschnittspunkt und den Winkel, unter welchem sie sich schneiden, zu finden. Wir setzen voraus, daß die Linien durch ihre Gleichungen gegeben sind, und daß diese Gleichungen auf dasselbe Coordinaten-System sich beziehen. Wir werden unserer Untersuchung folgende zwei Linien zum Grunde legen:

(1.) $y = a + bx.$

(2.) $y = a' + b'x.$

Die erste Linie mag die X-Axe unter dem Winkel φ schneiden, die zweite unter dem Winkel φ'. Schneiden sich die Linien, so sollen die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes mit x' und y' bezeichnet werden. Den Winkel, den die Linien mit einander bilden, werden wir mit δ bezeichnen, und wir setzen fest, daß von den Winkeln, welche beide Linien mit einander bilden, δ derjenige sein soll, **dessen Schenkel die X-Axe schneiden.** Den Fall, in welchem eine der Linien mit dieser Axe parallel ist, können wir übergehen, weil die andere Linie dann sie und die X-Axe unter gleichen Winkeln schneidet.

1) **Die Parallelität und die Convergenz beider Linien.** Sind die Linien parallel, so müssen sie die X-Axe unter gleichen Winkeln schneiden; es muß also in diesem Falle $\varphi = \varphi'$ sein, folglich auch $tg\varphi = tg\varphi'$, d. h. $b = b'$. Da auch der umgekehrte Schluß richtig ist, so folgt, daß bei convergirenden Linien b ungleich b′ ist, und umgekehrt. Wir haben also:

I. $\begin{cases} \text{die Linien sind parallel, wenn } b = b' \text{ ist;} \\ \text{die Linien schneiden sich, wenn } b \gtrless b' \text{ ist,} \end{cases}$

und umgekehrt.

2) Berechnung der Entfernung zweier parallelen Linien von einander.

Sind die Linien in (1.) und (2.) mit einander parallel, sind ihre Gleichungen also

$$y = a + bx \text{ und}$$
$$y = a' + bx,$$

so findet man ihre Entfernung h von einander am einfachsten aus ihren Durchschnittspunkten mit der Y-Axe und dem Winkel ψ, den sie mit dieser Axe bilden. Ihre Durchschnittspunkte mit der Y-Axe haben von einander die Entfernung $a - a'$, wenn man das Vorzeichen dieser Differenz außer Acht läßt. Unter dieser Voraussetzung ist

$$h = (a - a') . \sin\psi.$$

Aus $\cot g\psi = b$ folgt aber $\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}$; folglich ist die Entfernung der parallelen Linien von einander:

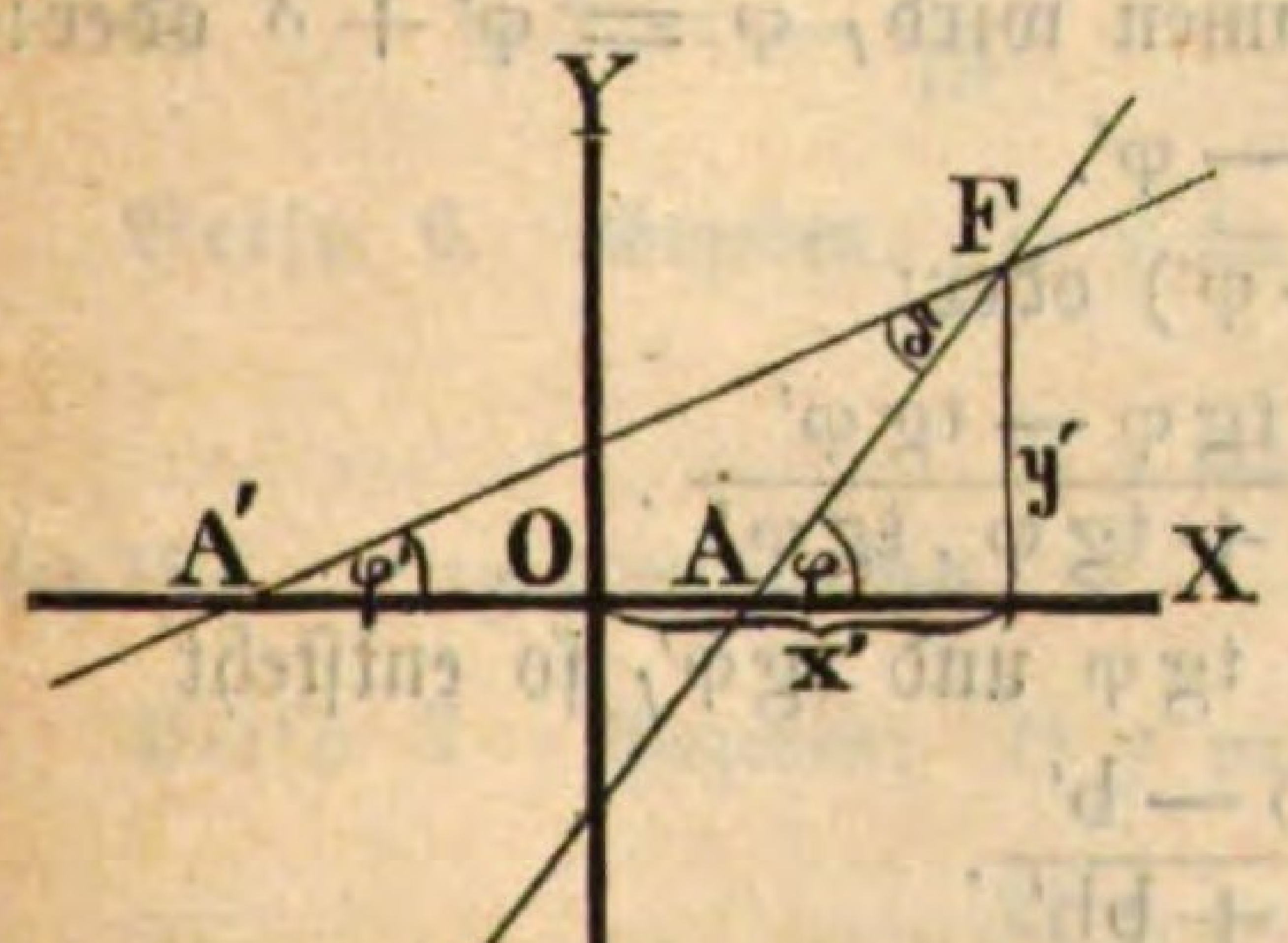
$$\text{II.} \quad h = \frac{a - a'}{\sqrt{1 + b^2}}.$$

3) Die Coordinaten x' und y' des Durchschnittpunktes zweier convergirenden Linien.

Da der Durchschnittspunkt ein Punkt beider Linien ist, so müssen die Gleichungen beider Linien richtig werden, wenn man seine Coordinaten x' und y' resp. statt x und y in diese Gleichungen einsetzt, d. h. es muß

$$y' = a + bx' \text{ und auch } y' = a' + b'y'$$

sein. Diese beiden Gleichungen dienen also als Bestimmungsgleichungen zur Entwicklung der Coordinaten x' und y'. — Der Leser sei darauf aufmerksam gemacht, daß das angegebene Verfahren nicht nur zur Bestimmung des Durchschnittspunktes zweier geraden Linien, sondern auch beliebiger gerader und krummer Linien dient. Sind die Gleichungen zweier beliebigen Linien gegeben, und will man ihre Durchschnittspunkte



finden, so hat man die Werthe von x aufzusuchen, für welche aus

beiden Gleichungen derselbe Werth für y sich ergiebt, oder auch: man hat die Werthe von y aufzusuchen, für welche aus beiden Gleichungen derselbe Werth für x entsteht, d. h. man hat die beiden Gleichungen als zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (x und y) zu betrachten und die Unbekannten zu entwickeln. Haben die Gleichungen mehr als eine reelle Auflösung, so giebt es mehr als einen Durchschnittspunkt. Hieraus erkennt man wieder, daß die Gleichung jeder geraden Linie vom ersten Grade sein muß, weil gerade Linien sich nur in **einem** Punkte schneiden können. — Kehren wir zu unserem Falle zurück, so finden wir x' und y', wenn wir x und y aus den beiden Gleichungen

$$y = a + bx$$
$$y = a' + b'x$$

entwickeln. Subtrahiren wir die Gleichungen von einander, so folgt

$$x = \frac{a - a'}{b' - b};$$

multipliciren wir die erste Gleichung mit b', die zweite mit b, und subtrahiren dann die Gleichungen von einander, so folgt

$$y = \frac{ab' - a'b}{b' - b}.$$

Hiermit ist nun der Durchschnittspunkt F beider Linien gefunden:

$$\text{III.}\quad x' = \frac{a - a'}{b' - b} \text{ und } y' = \frac{ab' - a'b}{b' - b}.$$

4) Berechnung des Winkels δ, unter welchem sich die Linien schneiden.

Betrachtet man das Dreieck, welches die beiden Linien mit der X-Axe bilden (Δ AFA'), so ist von den beiden Winkeln φ und φ' der größere immer ein Außenwinkel dieses Dreiecks; der kleinere (oder sein Scheitelwinkel) ist der eine gegenüberliegende innere Winkel, der andere ist δ. Da das Gesagte für jede Lage der beiden Linien zutrifft, so ist, wenn $\varphi > \varphi'$ angenommen wird, $\varphi = \varphi' + \delta$ oder:

$$\delta = \varphi - \varphi'.$$

Hieraus folgt aber $tg\delta = tg(\varphi - \varphi')$ oder:

$$tg\delta = \frac{tg\varphi - tg\varphi'}{1 + tg\varphi \,.\, tg\varphi'}.$$

Setzt man b und b' resp. statt $tg\varphi$ und $tg\varphi'$, so entsteht

$$\text{IV.}\qquad tg\delta = \frac{b - b'}{1 + bb'}.$$

Bei der Anwendung dieser Formel beachte man aber, daß im Zähler der Minuend **die tg. des größeren beider Winkel** (φ und φ') ist.

Man kann aber aus den Werthen der Constanten b und b' leicht erkennen, ob b oder b' in den Minuend zu setzen ist. Sind beide Werthe (b und b') positiv, oder beide negativ, so ist immer die größere Constante in den Minuend zu setzen (wobei nicht zu vergessen ist, daß $-b > -b'$ ist, wenn $b < b'$ ist); ist aber die eine Constante positiv, die andere negativ, so ist die negative der Minuend, weil der zugehörige Winkel als stumpfer Winkel der größere ist.

Beisp. 1. Gegeben: 1) $y = 5 + 4x$.
2) $y = -3 + 6x$.

Hier ist $$\operatorname{tg}\delta = \frac{6-4}{1+24} = \frac{2}{25} = 0{,}08.$$

Beisp. 2. Gegeben: 1) $y = 3 - 6x$.
2) $y = 4 - 2x$.

Hier ist $$\operatorname{tg}\delta = \frac{-2+6}{1+12} = \frac{4}{13}.$$

Beisp. 3. Gegeben: 1) $y = 6 - 3x$.
2) $y = 4 + 5x$.

Hier ist $$\operatorname{tg}\delta = \frac{-3-5}{1-15} = \frac{4}{7}.$$

Beisp. 4. Gegeben: 1) $y = -4 - \frac{2}{3}x$.
2) $y = -5 + \frac{5}{4}x$.

Hier ist $$\operatorname{tg}\delta = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{5}{4}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{-8-15}{12-10} = -11{,}5.$$

Beisp. 5. Gegeben: 1) $y = 4 + \frac{2}{3}x$.
2) $y = 3 - \frac{3}{8}x$.

Hier ist $$\operatorname{tg}\delta = -\frac{25}{18}.$$

Beisp. 6. Gegeben: 1) $y = -4 - \frac{2}{3}x$.
2) $y = -4 + \frac{2}{3}x$.

Hier ist $$\operatorname{tg}\delta = -2{,}4.$$

Beisp. 7. Gegeben: 1) $y = 1 + x$.
2) $y = 1 + \frac{1}{2}x$.

Hier ist $$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{3}.$$

Beisp. 8. Gegeben: 1) $y = 4 - \frac{3}{4}x$.

2) $y = 6 - \frac{2}{3}x$.

Hier ist $tg\delta = \frac{1}{18}$.

5) Die beiden Linien schneiden sich senkrecht, wenn $tg\delta = \infty$ ist, d. h. wenn der Nenner des Bruches für $tg\delta$ in III. gleich Null ist, also $1 + b.b' = 0$. Hieraus folgt also:

V. Ist $b.b' = -1$, so stehen die Linien auf einander senkrecht.

Von den Constanten b und b' ist dann jede die entgegengesetzte Reciproke der andern. Allgemein haben die Gleichungen der Linien dann die Form

$$1)\ y = a + bx \quad \text{und} \quad 2)\ y = a' - \frac{1}{b}x.$$

§. 424.

Uebungs-Aufgaben über zwei gerade Linien.

Aufgabe 1. Ein Punkt P ist durch ($x = p$, $y = q$) gegeben; man soll die Gleichung der Linie finden, welche durch P geht und mit der Linie $y = a + bx$ parallel ist.

Aufl. Die Linie $y - q = b'.(x - p)$ geht durch P; soll sie mit der Linie $y = a + bx$ parallel sein, so muß $b' = b$ sein; daher ist die Gleichung der gesuchten Linie

$$y - q = b(x - p).$$

Aufgabe 2. Ein Punkt P ist durch ($x = p$, $y = q$) gegeben; man soll die Gleichung der geraden Linie bestimmen, welche durch P geht und die Linie $y = a + bx$ senkrecht schneidet.

Aufl. Auf demselben Wege, wie in der vorhergehenden Aufgabe, erhält man die gesuchte Linie:

$$y - q = -\frac{1}{b}(x - p).$$

Aufgabe 3. Wie heißt die Gleichung der Linie, welche durch den Anfangspunkt O der Coordinaten geht und mit der Linie $y = 3 + \frac{2}{3}x$ parallel ist?

Antw. $y = \frac{2}{3}x$.

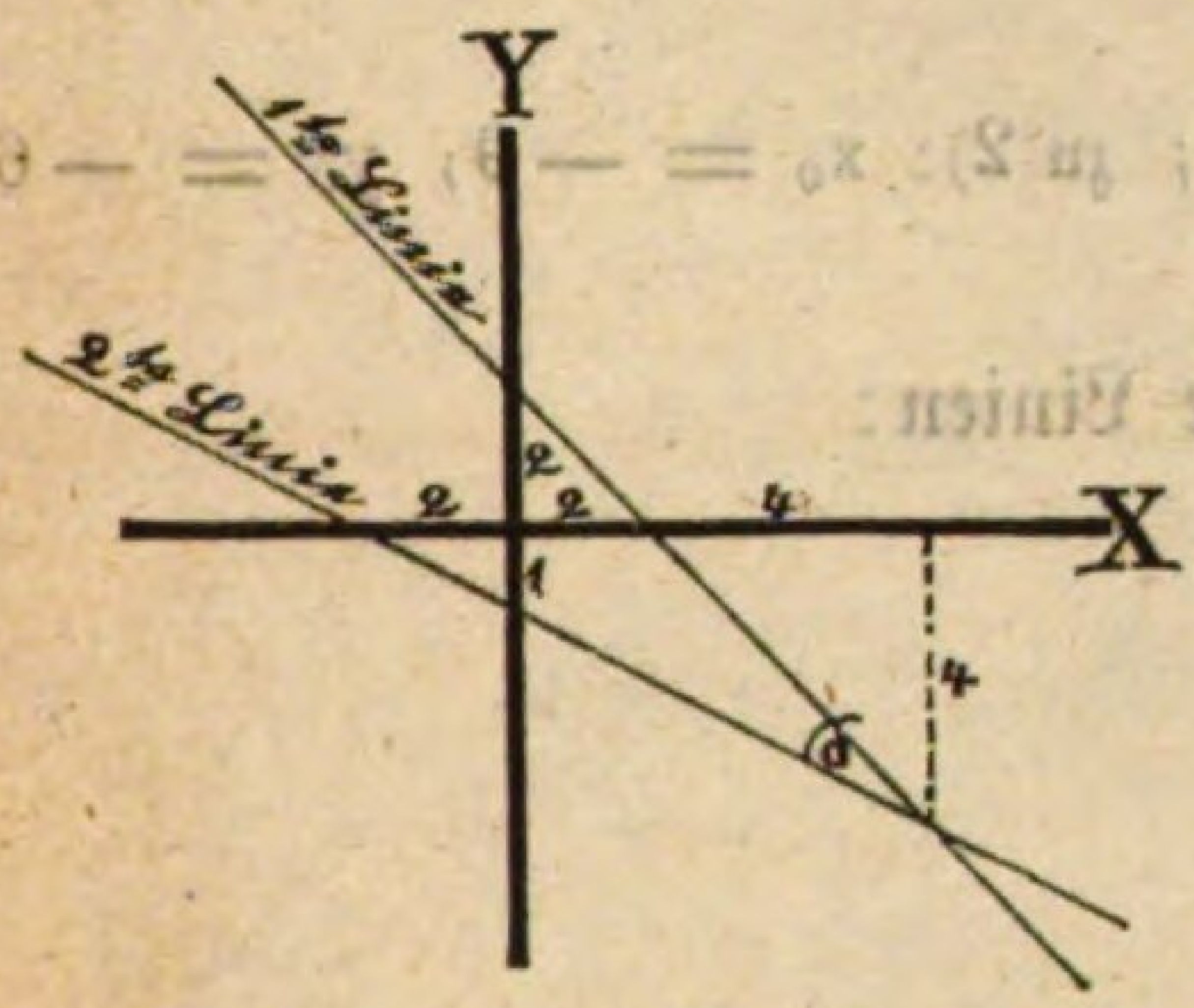
Aufgabe 4. Die Gleichung der geraden Linie zu bestimmen, welche durch O geht und auf der Linie $y = 3 - \frac{1}{2}x$ senkrecht steht.

Aufl. $y = 2x$.

Aufgabe 5. Es sind zwei Linien gegeben:

$$1)\quad y + x - 2 = 0$$
$$2)\quad 2y + x + 2 = 0;$$

man soll ihre Lage zu den Axen und ihre gegenseitige Lage, namentlich ihren Durchschnittspunkt und den Winkel, unter welchem sie sich schneiden, bestimmen.



Aufl. Für die erste Linie ist:

$$x_0 = 2, \quad y_0 = 2;$$

für die zweite Linie ist:

$$x_0 = -2, \quad y_0 = -1.$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes beider Linien sind:

$$x' = 6, \quad y' = -4.$$

Endlich schneiden sich die Linien unter dem Winkel

$$\delta = 18^\circ\ 26'\ 5{,}8''.$$

Der Leser möge bei den folgenden Aufgaben nach der Berechnung der gesuchten Stücke die Figur aufzeichnen.

Aufgabe 6. Dieselbe Aufgabe für folgende Linien:

$$1)\quad 8y - 3x - 24 = 0$$
$$2)\quad 2y - 5x + 20 = 0.$$

Aufl. Zu 1): $x_0 = -8$, $y_0 = +3$. Zu 2): $x_0 = +4$, $y_0 = -10$. Für den Durchschnittspunkt: $x' = 6\frac{2}{17}$, $y' = 5\frac{5}{17}$; endlich ist $\delta = 47^\circ\ 38'\ 33''$.

Aufgabe 7. Dieselbe Aufgabe für folgende Linien:

$$1)\quad 4y + 3x - 6 = 0$$
$$2)\quad 6y - 8x + 27 = 0.$$

Aufl. Zu 1): $x_0 = 2$, $y_0 = 1\frac{1}{2}$; zu 2): $x_0 = 3\frac{3}{8}$, $y_0 = -4\frac{1}{2}$; ferner $x' = 2{,}88$; $y = -0{,}66$. Die Linien schneiden sich senkrecht.

Aufgabe 8. Dieselbe Aufgabe für folgende Linien:

$$1)\quad y + 3x + 6 = 0$$
$$2)\quad y - x + 6 = 0.$$

Aufl. Zu 1): $x_0 = -2$, $y_0 = -6$; zu 2): $x_0 = 6$, $y_0 = -6$. Ferner ist $x' = 0$, $y' = -6$; $\delta = 63^\circ\ 26'\ 5{,}8''$.

Aufgabe 9. Dieselbe Aufgabe für die Linien:

$$1)\quad y = 2 + \tfrac{2}{3}x$$
$$2)\quad y = 4 - \tfrac{1}{2}x.$$

Aufl. Zu 1): $x_0 = -3$, $y_0 = 2$; zu 2): $x_0 = 8$, $y_0 = 4$. Ferner $x' = 1\frac{5}{7}$, $y' = 3\frac{1}{7}$; $\delta = 119^\circ\ 44'\ 42''$.

Aufgabe 10. Dieselbe Aufgabe für die Linien:

1) $y = 2 + 3x$
2) $y = 1 - 2x$.

Aufl. Zu 1): $x_0 = -\frac{2}{3}$, $y_0 = 2$; zu 2): $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = 1$. Ferner $x' = -0{,}2$; $y' = 1{,}4$; $\delta = 45°$.

Aufgabe 11. Dieselbe Aufgabe für die Linien:

1) $2y - 3x + 12 = 0$.
2) $3y + 2x + 18 = 0$.

Aufl. Zu 1): $x_0 = 4$, $y_0 = -6$; zu 2): $x_0 = -9$, $y_0 = -6$. Ferner $x' = 0$, $y' = -6$; $\delta = 90°$.

Aufgabe 12. Wie weit sind die Linien:

1) $4y - 5x - 20 = 0$
2) $4y - 5x + 20 = 0$

von einander entfernt?

Antw. $\frac{40}{\sqrt{41}} = 6{,}24695$.

Aufgabe 13. Es sind zwei Punkte gegeben: P durch ($x = 2$, $y = 3$) und P′ durch ($x = 6$, $y = 5$); man soll die Gleichungen der beiden Linien bestimmen, welche beide durch O gehen, von denen aber die eine mit der Linie PP′ parallel ist, die andere PP′ senkrecht schneidet.

Aufl. 1) $y = \frac{1}{2}x$, ist parallel PP′,
2) $y = -2x$, steht senkrecht auf PP′.

Aufgabe 14. Ein Punkt P ist durch ($x = 4$, $y = -6$) gegeben, man soll die durch P gehende Linie bestimmen, welche mit der Linie $y = -2 + 4x$ parallel ist.

Aufl. $y = -22 + 4x$.

Aufgabe 15. Ein Punkt P ist durch ($x = -3$, $y = 4$) gegeben; man soll die Gleichung der Geraden bestimmen, welche durch P geht und auf der Linie $y = 1 + \frac{1}{3}x$ senkrecht steht.

Aufl. $y = -5 - 3x$.

Aufgabe 16. Es sind drei Punkte gegeben: P durch ($x = -3$, $y = -4$), P′ durch ($x = 1$, $y = -2$) und P″ durch ($x = -5$, $y = 2$); man soll durch P″ zwei gerade Linien legen, von denen die eine der Linie PP′ parallel ist, die andere auf PP′ senkrecht steht.

Aufl. 1) $y = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}x$ ist parallel PP′;
2) $y = -8 - 2x$ steht senkrecht auf PP′.

Aufgabe 17. Es sind zwei Linien gegeben:

1) $y = \frac{8}{5} - \frac{2}{5}x$
2) $y = -2 - x$;

man soll die Gleichung der Halbirungslinie des Winkels finden, den die gegebenen Linien mit einander bilden.

Aufl. Die gesuchte Linie muß durch den Durchschnittspunkt der gegebenen Linien gehen. Es ist aber

$$x' = -6, \quad y' = +4,$$

folglich hat die Gleichung der gesuchten Linie die Form:

$$y - 4 = b(x + 6).$$

Um b zu bestimmen, erhält man aus der Bedingung, daß die gesuchte Linie mit den gegebenen Linien gleiche Winkel bilden soll, die Gleichung:

$$\frac{-\frac{2}{5} - b}{1 - \frac{2}{5}b} = \frac{b + 1}{1 - b}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$b = \tfrac{3}{7} \pm \tfrac{1}{7}\sqrt{58}.$$

Weil nun die beiden gegebenen Linien mit der X-Axe stumpfe Winkel bilden, so muß die Linie, welche den Winkel δ halbirt, diese Axe auch unter einem stumpfen Winkel schneiden; also muß b negativ sein, nämlich $b = \frac{3 - \sqrt{58}}{7}$. Der andere Werth, $b = \frac{3 + \sqrt{58}}{7}$, giebt die Linie, welche den Nebenwinkel von δ halbirt. Man erkennt dies am einfachsten daran, daß das Product der beiden Werthe von b gleich -1 ist. Die Linien stehen also auf einander senkrecht, und dieses Gesetz gilt bekanntlich für die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel. Die Auflösung der Aufgabe ist also:

1) die Linie $y = \frac{46 - 6\sqrt{58}}{7} + \frac{3 - \sqrt{58}}{7}x$ halbirt den $\measuredangle\, \delta$.

2) die Linie $y = \frac{46 + 6\sqrt{58}}{7} + \frac{3 + \sqrt{58}}{7}x$ halbirt den Nebenwinkel von δ. — Die Aufl. kann auch mit Hülfe von §. 72. und §. 421. 2) erfolgen.

Aufgabe 18. Es sind zwei Linien gegeben:

$$1)\ y = -4 + 2x \quad \text{und} \quad 2)\ y = 5 + \tfrac{1}{2}x;$$

man soll die Halbirungslinie des Winkels, den die Linien mit einander bilden, durch ihre Gleichung bestimmen.

Aufl. Man erhält zwei Linien:

1) die Linie $y = 2 + x$ halbirt den Winkel δ;

2) die Linie $y = 14 - x$ halbirt den Nebenwinkel von δ.

Aufgabe 19. Ein Punkt P ist durch $(x = -2,\ y = 1)$ gegeben; man soll die durch P gehende Linie durch ihre Gleichung bestimmen, welche die gerade Linie $y = 3 - \frac{3}{2}x$ unter einem Winkel von 45° schneidet.

Aufl. Es giebt zwei Linien, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

$$1)\ y = 11 + 5x; \quad 2)\ y = \tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{5}x.$$

Aufgabe 20. Durch den Durchschnittspunkt der Axen eine gerade Linie zu legen, und sie durch ihre Gleichung zu bestimmen, welche die beiden Geraden:

$$1)\quad 3y + 4x - 12 = 0$$
$$2)\quad 21y - 20x - 30 = 0$$

unter gleichen Winkeln schneidet.

Aufl. Die gesuchte Linie hat die Form

$$y = ax.$$

Bringt man die Gleichungen der gegebenen Linien auf die entsprechende Form, so hat man die drei Gleichungen:

$$1)\quad y = 4 - \tfrac{4}{3}x$$
$$2)\quad y = \tfrac{10}{7} + \tfrac{20}{21}x$$
$$3)\quad y = ax.$$

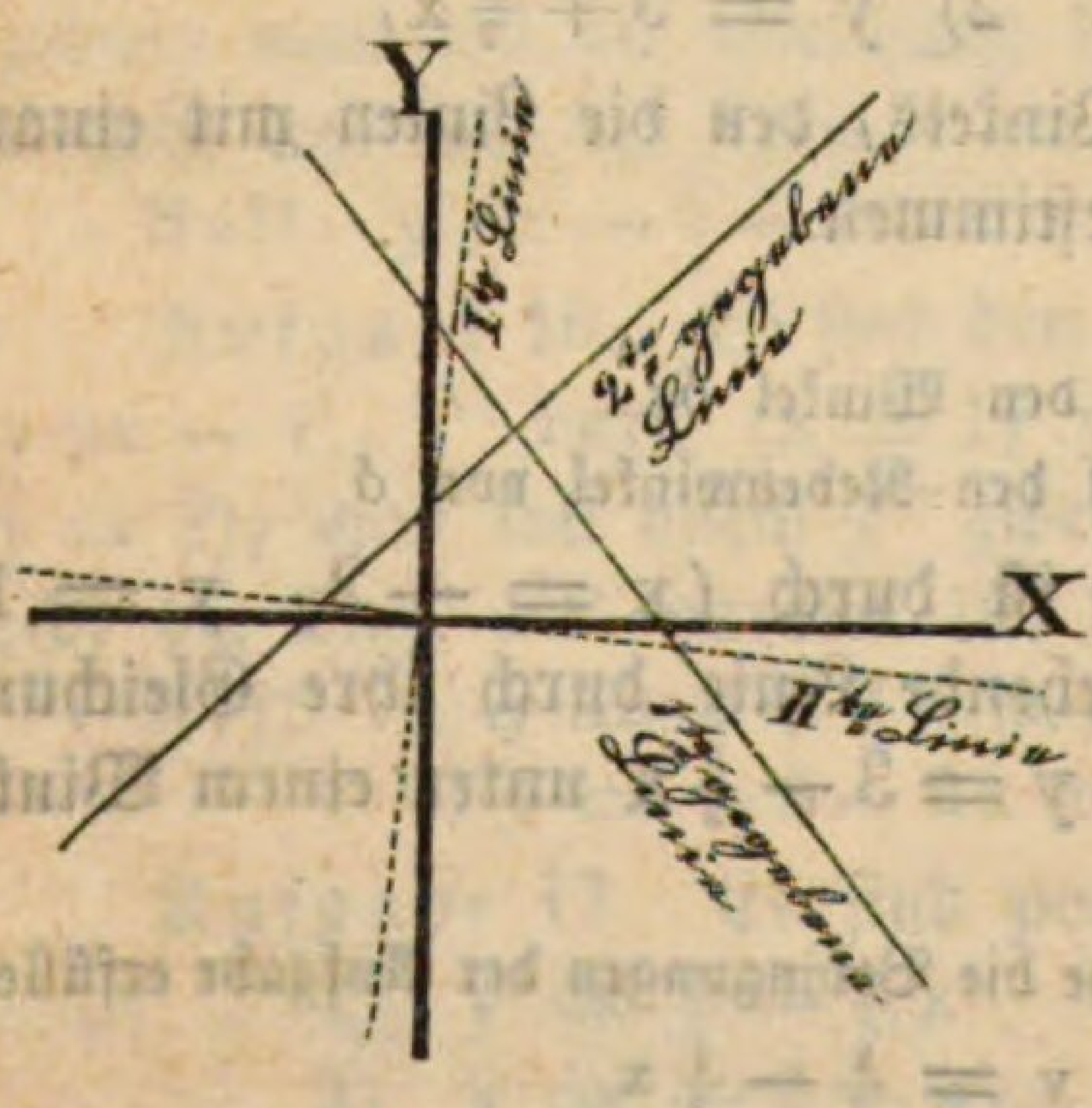
Wenn man nun die Lage der gegebenen Linien gegen die Axen ermittelt, so kann man in jedem besonderen Falle, wie der vorliegende, leicht entscheiden, ob die gleichen Winkel, unter denen die gesuchte Linie die gegebenen schneiden soll, die Winkel sind, welche wir mit δ bezeichnen, oder ihre Nebenwinkel, und ob die Constante a kleiner oder größer als die Constanten $-\frac{4}{3}$ und $\frac{20}{21}$ ist; hiernach wäre dann der Ansatz der Gleichung für a zu machen. Will man aber allgemein verfahren, so muß man davon ausgehen, daß die Tangenten dieser Winkel

$$\pm\frac{-\frac{4}{3} - a}{1 - \frac{4}{3}a} \quad \text{und} \quad \pm\frac{\frac{20}{21} - a}{1 + \frac{20}{21}a}$$

sein können. Man erhält dann den Ansatz:

$$\frac{-\frac{4}{3} - a}{1 - \frac{4}{3}a} = \pm\frac{\frac{20}{21} - a}{1 + \frac{20}{21}a}.$$

Aus dieser Doppel-Gleichung ergeben sich vier Werthe für a; da aber aus der Natur der Aufgabe hervorgeht, daß nur zwei Linien die Aufgabe lösen können, so werden sich auch nur zwei reelle Werthe für a ergeben. In der That wird a imaginär, wenn man in der vorstehenden Gleichung rechts das Vorzeichen + nimmt; man findet dann $a = \pm\sqrt{-1}$. Nimmt man hingegen das Vorzeichen —, so erhält man zwei Linien, welche die Aufgabe lösen:



$$\text{I.}\quad y = 12x$$
$$\text{II.}\quad y = -\tfrac{1}{12}x.$$

Die erste Linie geht aus dem dritten Quadranten durch O in den ersten, die zweite aus dem zweiten Quadranten durch O in den vierten; beide Linien stehen auf einander senkrecht. Man erkennt ferner aus der Figur, daß die gleichen Winkel, unter welchen die gegebenen Linien von

der Linie I. geschnitten werden, die Winkel sind, welche wir mit δ bezeichnen; bei der Linie II. ist nur der eine dieser Winkel δ, der andere ist der Nebenwinkel desjenigen Winkels, den wir δ nennen.

Aufgabe 21. Der Punkt P ist durch $(x = 3, y = 8)$ gegeben; man soll die Gleichung der Linie finden, welche durch P geht und auf der Linie $y = 3 - 4x$ senkrecht steht, und die Länge des Theils dieser Linie zwischen P und der gegebenen Linie angeben.

Aufl. Die Gleichung der gesuchten Linie ist $y = \frac{29}{4} + \frac{1}{4}x$. Die Länge des gesuchten Theiles der Linie kann man entweder nach Aufg. 12., oder aus den Coordinaten der beiden Endpunkte finden. Die Coordinaten von P sind gegeben, die des andern Endpunkts sind $x' = -1$, $y' = 7$; die gesuchte Länge ist daher (§. 413. IV.) gleich:

$$\sqrt{(3+1)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{17} = 4{,}1231.$$

Aufgabe 22. Die Entfernung der parallelen Linien

1) $y = 4 - 3x$
2) $y = 7 - 3x$

von einander soll mit Hülfe der Linie berechnet werden, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und auf diesen Linien senkrecht steht.

Aufl. Die Gleichung dieser Linie ist $y = \frac{1}{3}x$, und die gesuchte Entfernung gleich

$$\sqrt{(2{,}1 - 1{,}2)^2 + (0{,}7 - 0{,}4)^2} = \sqrt{0{,}9} = 0{,}94868.$$

Aufgabe 23. Welche Lage haben die drei Linien zu einander:

1) $6y + 4x = 3$
2) $9y + 6x = 4$
3) $2y - 3x = 6$?

Antw. Die beiden ersten Linien sind mit einander parallel und werden durch die dritte senkrecht geschnitten.

Aufgabe 24. Welche Lage haben die drei Linien zu einander

1) $y + 2x - 6 = 0$
2) $2y - x - 2 = 0$
3) $y - 3x + 6 = 0$?

Antw. Die beiden ersten Linien stehen auf einander senkrecht, und die dritte schließt mit ihnen ein gleichschenkliges Dreieck ein.

Aufgabe 25. Der Punkt P ist durch $(x = 10, y = 4)$ gegeben; man soll durch P eine Linie legen, welche die Linie $y = 6 + \frac{3}{4}x$ senkrecht schneidet. Wie heißt die Gleichung dieser Linie, unter welchen Winkeln und wo schneidet sie die Axen, wo liegt ihr Durchschnitts-

punkt mit der gegebenen Linie und wie weit ist dieser Durchschnittspunkt von P entfernt?

Antw. Die gesuchte Linie ist: $y = \frac{52}{3} - \frac{4}{3}x$; ferner ist $x_0 = 13$, $y_0 = 17\frac{1}{3}$; $\varphi = 126^\circ\ 52'\ 12''$; $\psi = 143^\circ\ 7'\ 48''$; $x' = 5,44$; $y' = 10,08$; endlich die gesuchte Entfernung gleich 7,6.

§. 425.

Das von drei gegebenen Linien begrenzte Dreieck.

Die Untersuchung über die gegenseitige Lage dreier Linien, welche durch ihre Gleichungen gegeben sind, bietet nichts Abweichendes von der Untersuchung über die Lage zweier Linien dar; auch beziehen sich einzelne Aufgaben des vorigen §. schon auf drei Linien. Als neu tritt bei drei Linien nur eine Frage hinzu:

Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks, welches die drei Linien, falls sie sich schneiden, einschließen?

Weil nun aber aus den gegebenen Gleichungen der drei Linien die Ecken des Dreiecks durch ihre Coordinaten bestimmt werden können, hieraus aber die Länge der Seiten und die Entfernungen der Ecken von ihnen (die Höhen) zu berechnen sind, und weil auch alle trigonometrischen Functionen der Winkel des Dreiecks aus den tg. derselben zu finden sind: so kann die Berechnung des Inhaltes des Dreiecks sich an die verschiedenen Formeln anschließen, welche wir für den Inhalt eines Dreiecks gehabt haben. Wir heben folgende Methoden der Berechnung des Dreiecks hervor:

1) durch die drei Seiten nach der Formel:

$$(4.\Delta)^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2;$$

2) durch eine Seite und die zugehörige Höhe nach der Formel:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ah;$$

3) aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel nach der Formel

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ab \,.\, \sin\gamma;$$

4) aus den Coordinaten der Ecken des Dreiecks durch algebraische Addition von Dreiecken und Paralleltrapezen.

Das nachstehende Beispiel soll nach diesen vier Methoden behandelt werden; wir rathen dem Leser, auch die nachfolgenden Beispiele zur Einübung der vorgetragenen Gesetze nach allen vier Methoden zu lösen.

Aufgabe 1. Es sind drei gerade Linien gegeben:

1) $y = 1 + x$
2) $y = 2 + 3x$
3) $y = 3 - 2x$;

wie groß ist der Inhalt des Dreiecks, welches diese Linien begrenzen?

Aufl. 1. Es mögen sich 1) und 2) in A, 1) und 3) in B, 2) und 3) in C schneiden, so hat

A die Coordinaten $x' = -\frac{1}{2}$, $y' = +\frac{1}{2}$;

B » » $x' = +\frac{2}{3}$, $y' = +\frac{5}{3}$;

C » » $x' = +\frac{1}{5}$, $y' = +\frac{13}{5}$.

Hieraus folgt aber

$$AB = \sqrt{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}\right)^2} = \frac{7}{6}\sqrt{2}.$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(\frac{21}{10}\right)^2} = \frac{7}{10}\sqrt{10}.$$

$$BC = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}-\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{15}\right)^2 + \left(\frac{14}{15}\right)^2} = \frac{7}{15}\sqrt{5}.$$

Es ergiebt sich jetzt

$$(4.\Delta ABC)^2 = \left(\frac{49}{15}\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{49}{18}+\frac{49}{10}-\frac{49}{45}\right)^2;$$

$$(4.\Delta ABC)^2 = 49^2.\left[\frac{1}{45}-\frac{4}{225}\right] = \left(\frac{49}{15}\right)^2; \text{ folglich}$$

$$\Delta ABC = \frac{49}{60}\,\square\text{-Einheiten.}$$

Aufl. 2. Bezeichnet δ den Winkel, welchen die Linien 1) und 2) mit einander bilden, so ist $\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{2}$, folglich $\sin\delta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Nun ist $\Delta ABC = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\delta$; folglich findet man

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{6}\sqrt{2}\cdot\frac{7}{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ oder}$$

$$\Delta ABC = \frac{49}{60}\,\square\text{-Einheiten.}$$

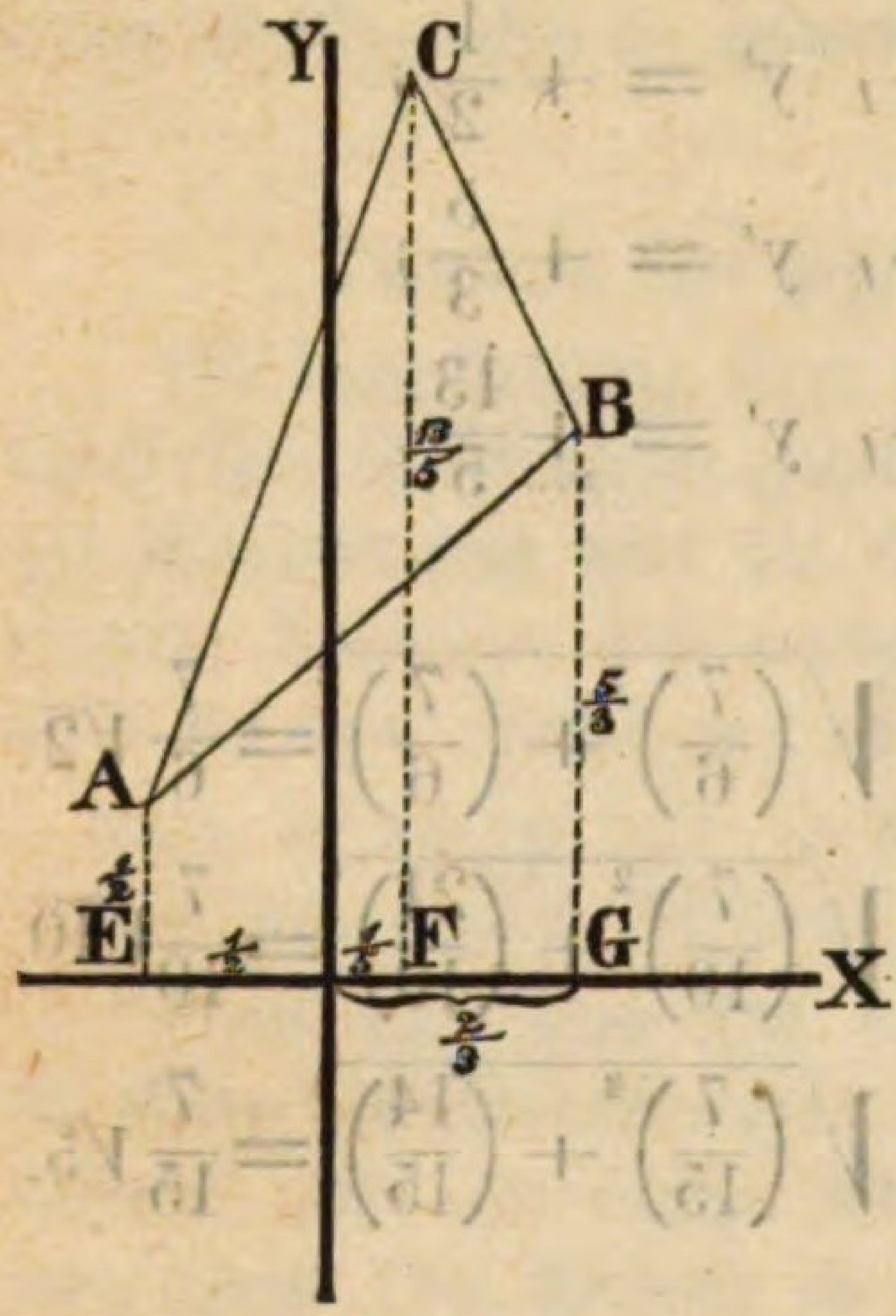
Aufl. 3. Bezeichnet h die Höhe auf AB (1te Linie), so ist nach §. 422. Aufg. 12.

$$h = \frac{\frac{13}{5}-\left(1+\frac{1}{5}\right)}{\sqrt{1+1}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

Hieraus folgt nun, weil $\Delta ABC = \frac{1}{2}AB.h$ ist,

$$\Delta\,ABC = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}} \text{ oder}$$

$$\Delta\,ABC = \frac{49}{60}\,\square\text{-Einheiten.}$$



Aufl. 4. Die Figur zeigt das Dreieck ABC, welches nach den für A, B und C gefundenen Coordinatenwerthen aufgezeichnet ist. Sein Inhalt läßt sich immer aus den Coordinaten der Ecken als algebraische Summe von Dreiecken und Paralleltrapezen berechnen, wobei es in einzelnen Fällen bequem ist, von den Ecken auch auf die Y-Axe Perpendikel zu fällen. Im vorliegenden Falle ist Δ ABC als algebraische Summe dreier Paralleltrapeze zu berechnen.

Δ ABC = ACFE + CBGF − ABGE; daher:

$$\Delta ABC = \frac{\frac{1}{2}+\frac{13}{5}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)+\frac{\frac{13}{5}+\frac{5}{3}}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)-\frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{3}}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta ABC = \frac{31}{20}\cdot\frac{7}{10}+\frac{64}{30}\cdot\frac{7}{15}-\frac{13}{12}\cdot\frac{7}{6} = 7\cdot\frac{210}{1800};$$

$$\Delta ABC = \frac{49}{60}\,\square\text{-Einheiten.}$$

Anmerkung. Aus der letzten Auflösung der vorhergehenden Aufgabe erkennt man, daß der Inhalt jedes Dreiecks, dessen Seiten durch Gleichungen mit rationalen Constanten gegeben sind, auch rational sein muß.

Aufgabe 2. Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks, dessen Seiten durch die Gleichungen:

$$1)\ y = \frac{5}{2}-\frac{3}{2}x;\quad 2)\ y = \frac{2}{3}+\frac{1}{3}x;\quad 3)\ y = \frac{18}{5}-\frac{2}{5}x$$

gegeben sind?

Antw. 5,5 $\square$-Einheiten.

Aufgabe 3. Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks dessen Seiten durch die Gleichungen

$$1)\ y = 2+x;\quad 2)\ y = 1+2x;\quad 3)\ y = 4-3x$$

gegeben sind?

Antw. 0,1 $\square$-Einheiten.

Aufgabe 4. Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks, dessen Seiten durch die Gleichungen

1) $y = 1 + x$; 2) $y = 3 - x$; 3) $y = 4 + 2x$

gegeben sind?

Antw. $5\frac{1}{3}$ □-Einheiten. — Zu der Berechnung des Inhaltes aus den Coordinaten der Ecken sei bemerkt, daß eine Ecke im dritten Quadranten liegt. Zieht man durch sie eine Parallele zur X-Axe und verlängert die Ordinaten der beiden andern Ecken bis zu dieser Parallelen, so findet man den gesuchten Inhalt, wenn man von der Summe eines Dreiecks und eines Paralleltrapezes ein anderes Dreieck abzieht.

Aufgabe 5. Den Inhalt des Dreiecks zu berechnen, dessen Seiten durch die Gleichungen

1) $y = 3 - 2x$; 2) $y = -1 + 2x$; 3) $y = 4 - x$

gegeben sind.

Aufl. $2\frac{2}{3}$ □-Einheiten.

Aufgabe 6. Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks, dessen Seiten durch die Gleichungen

1) $y = 2 - 3x$; 2) $y = 3 + 2x$; 3) $y = 1 + x$

gegeben sind?

Antw. $2\frac{1}{40}$ □-Einheiten.

Aufgabe 7. Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks, dessen Seiten durch die Gleichungen

1) $2y - 3x = 5$; 2) $4y - x = 10$; 3) $y + x = 10$

gegeben sind?

Antw. 11,25 □-Einheiten.

Aufgabe 8. Den Inhalt des Parallelogramms zu finden, dessen Seiten durch die Gleichungen

1) $y = -6 - 3x$; 3) $y = 5 + \frac{5}{3}x$

2) $y = 24 - 3x$; 4) $y = 9 + \frac{5}{3}x$

gegeben sind.

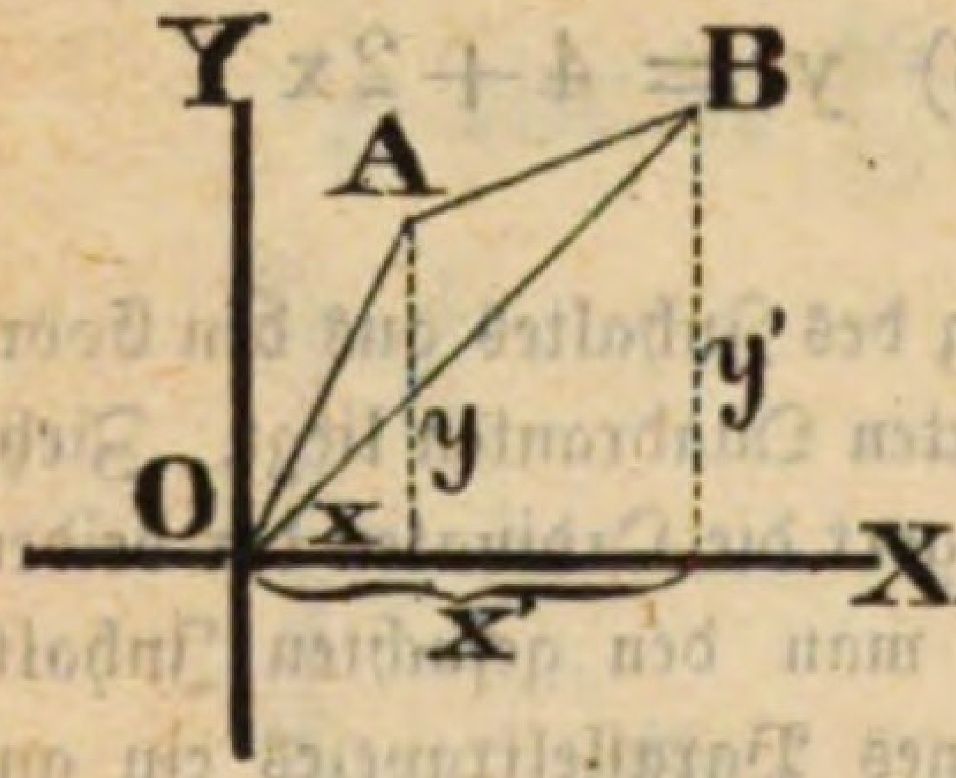
Aufl. $25\frac{5}{7}$ □-Einheiten.

§. 426.

Zusatz.

Die 4te Auflösung der Aufgabe im vorigen §. führt zu der Frage nach einer Formel für den Inhalt eines Dreiecks aus den Coordinaten seiner Ecken.

1) Zur Herleitung einer solchen Formel wollen wir zuerst den Fall betrachten, wenn der Durchschnittspunkt O der Axen eine Ecke des Dreiecks ist; die anderen Ecken A und B mögen die Coordinaten x, y und x', y' haben. Man findet dann leicht aus der Figur:



$$\Delta\, OAB = \tfrac{1}{2}xy + \frac{y+y'}{2}(x'-x) - \tfrac{1}{2}x'y'.$$

Reducirt man diesen Ausdruck, so entsteht:

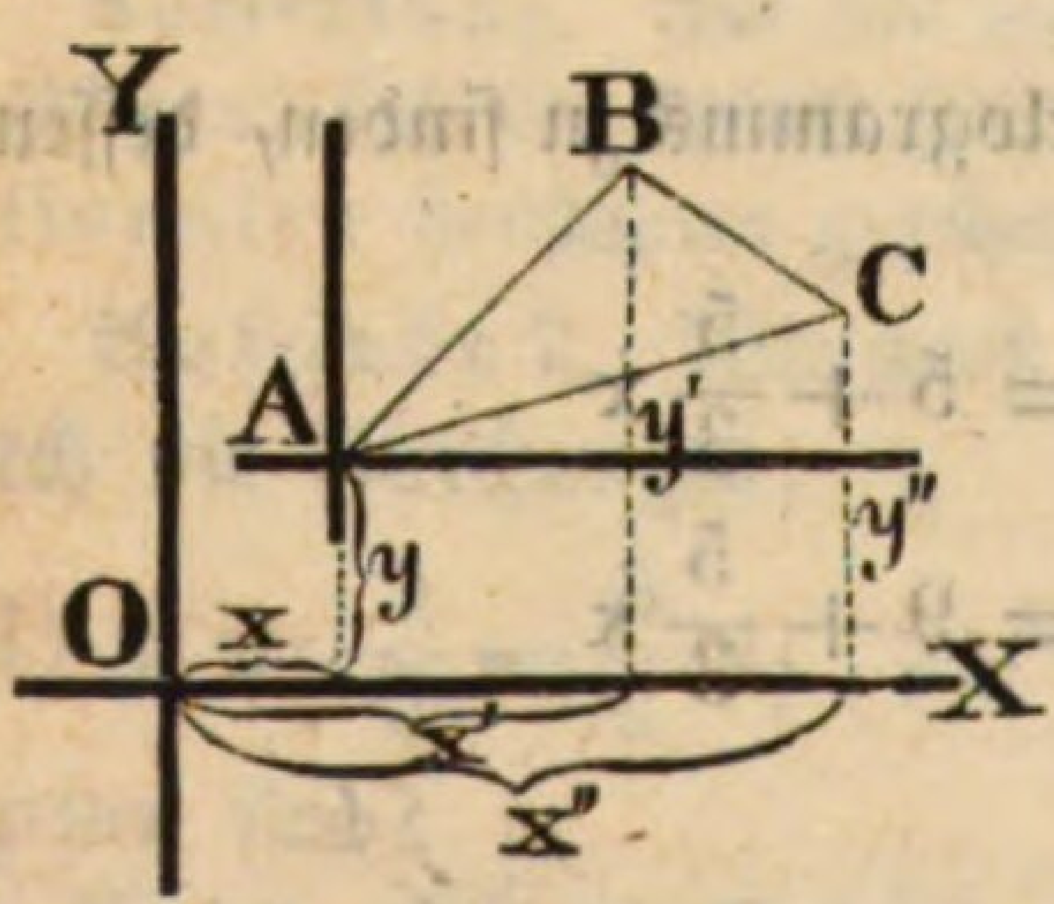
$$\text{I.}\quad \Delta\, OAB = \tfrac{1}{2}(x'y - xy').$$

Der Ausdruck $\frac{1}{2}(x'y - xy')$ wird Null oder negativ, wenn resp. $x'y = xy'$ oder $x'y < xy'$ ist. Im ersten Falle ergiebt sich $y : x = y' : x'$, d. h. OA und OB fallen in eine Richtung zusammen; im zweiten Falle ergiebt sich $\frac{y}{x} < \frac{y'}{x'}$, woraus folgt, daß dann $\Delta\, OAB$ auf der andern Seite der Linie OA liegt; OB liegt dann links von OA. Es bezieht sich sonach der negative Werth für den Inhalt des $\Delta\, OAB$ auf seine Lage und ist eine Folge der Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Sehen wir von der Lage des Dreiecks ab, so haben wir den absoluten Werth des Ausdrucks $\frac{1}{2}(x'y - xy')$ als den Inhalt des Dreiecks zu nehmen.

2) Um den Inhalt eines Dreiecks ABC zu bestimmen, dessen Ecken beliebig liegen und durch ihre Coordinaten gegeben sind, nämlich

A durch x und y, B durch x' und y', C durch x'' und y'',

denke man sich durch die eine Ecke, etwa durch A, zwei mit X und Y parallele Linien gelegt und mache diese Linien zu Axen eines neuen Coordinaten-Systems, dessen Anfangspunkt der Coordinaten A ist. In Bezug auf dieses System hat B die Coordinaten



$$x' - x \quad \text{und} \quad y' - y,$$

hingegen C die Coordinaten

$$x'' - x \quad \text{und} \quad y'' - y.$$

Hieraus ergiebt sich aber der Inhalt des Δ ABC nach der Formel I.:

$$\text{II.}\quad \Delta\, ABC = \tfrac{1}{2}[(x''-x)(y'-y) - (x'-x)(y''-y)].$$

Berechnen wir hiernach den Inhalt des Δ ABC in der Aufg. 1. §. 425., so waren die Coordinaten seiner Ecken folgende:

die Coordinaten von A: $x = -\frac{1}{2}$, $y = +\frac{1}{2}$

» » » B: $x' = +\frac{2}{3}$, $y' = +\frac{5}{3}$

» » » C: $x'' = +\frac{1}{5}$, $y'' = +\frac{13}{5}$.

Man erhält aus diesen Coordinaten:

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{13}{5}-\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{6}-\frac{7}{6}\cdot\frac{21}{10}\right]$$
$$= \frac{49}{120}(1-3)$$
$$= -\frac{49}{60}.$$

Es ergiebt sich also, wie in §. 425., der Inhalt des Dreiecks $= \frac{49}{60}$ □. Einheiten. Das Vorzeichen — zeigt an, daß Δ ABC in diesem Beispiele auf der linken Seite von AB liegt, daß also die Lage dieses Dreiecks derjenigen entgegengesetzt ist, für welche die Formel II. hergeleitet wurde.

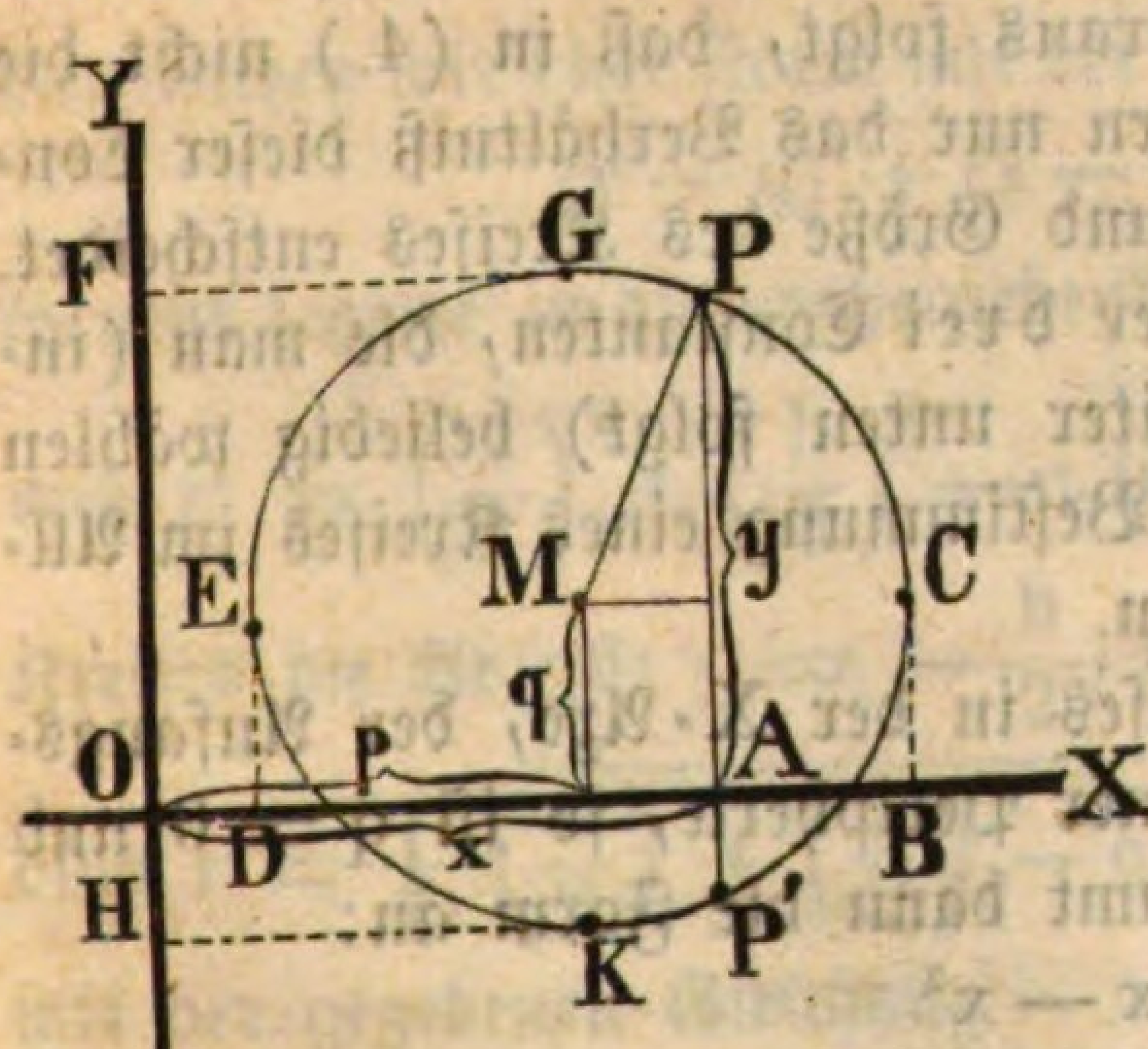
II. Die Kreislinie.

§. 427.

Die Gleichung des Kreises.

In Bezug auf ein gegebenes Coordinaten-System habe der Mittelpunkt M eines Kreises die Abscisse p und die Ordinate q, der Radius sei gleich r; es soll die Gleichung der Peripherie dieses Kreises hergeleitet werden.

Auflösung. Jeder Punkt der Peripherie des Kreises hat von M die Entfernung r; bezeichnet P einen beliebigen Punkt der Peripherie, und sind x und y seine Coordinaten, so ergiebt sich die gesuchte Gleichung aus §. 413. IV. Es sind zwei Punkte gegeben: P durch (x, y) und M durch (p, q); daher ist ihre Entfernung von einander gleich



$$\sqrt{(y-q)^2+(x-p)^2}.$$

Hieraus erhält man die Gleichung

$$(1.)\quad (y-q)^2+(x-p)^2 = r^2.$$

(Vergl. auch das Beisp. in §. 183. I. Nr. 1.) — Man erkennt die Richtigkeit dieser Gleichung auch unmittelbar aus der Figur, wenn man durch M eine Parallele mit der X-Axe zieht und sie bis zur Ordinate y verlängert (der Pythag. Lehrs.), und zwar gilt sie eben so für den Punkt P′, wie für den Punkt P. Für den Punkt P′ ist AP′ die Ordinate, und bezeichnen wir sie mit y, so entsteht, wenn man sich M mit P′ verbunden denkt: $(y+q)^2+(x-p)^2=r^2$. In diese Gleichung geht aber (1.) über, wenn man $-y$ statt y setzt. Der Leser möge auch für andere Punkte der Peripherie die Richtigkeit der Gleichung (1.) prüfen.

Löst man in (1.) die Klammern auf, so folgt:

$$(2.)\quad y^2+x^2-2qy-2px+q^2+p^2-r^2=0.$$

Bezeichnet man die Constanten $-2q$, $-2p$ und $q^2+p^2-r^2$ resp. mit a, b und c, so erhält man die allgemeine Form der Gleichung der Kreislinie:

$$(3.)\quad y^2+x^2+ay+bx+c=0.$$

Da durch die Peripherie des Kreises der Kreis selbst bestimmt ist, so pflegt man die Gleichung der Kreislinie gewöhnlich die **Gleichung des Kreises** zu nennen.

Die Gleichung des Kreises ist eine Gleichung des zweiten Grades zwischen x und y, in welcher aber ein mit xy behaftetes Glied fehlt, und in welcher die Coefficienten von y^2 und x^2 gleich 1 sind. Da man die Gleichung (3.) noch mit einer beliebigen Zahl multipliciren kann, etwa mit dem General-Nenner der Constanten a, b, c, wenn diese Brüche sind, so kann die Gleichung des Kreises auch die Form haben

$$(4)\quad \alpha y^2+\alpha x^2+\beta y+\gamma x+\delta=0,$$

so daß die Coefficienten von y^2 und x^2 einander gleich sind; allein diese Form kann nicht für eine allgemeinere gelten, als die Form der Gleichung (3.), weil sie sich durch Division mit α immer auf die Gleichung (3.) zurückführen läßt. Hieraus folgt, daß in (4.) nicht die Constanten α, β, γ, δ selbst, sondern nur das Verhältniß dieser Constanten zu einander über die Lage und Größe des Kreises entscheidet. Die Gleichung des Kreises hat daher **drei** Constanten, die man (innerhalb gewisser Grenzen, wie weiter unten folgt) beliebig wählen kann, woraus hervorgeht, daß zur Bestimmung eines Kreises im Allgemeinen **drei** Bedingungen gehören.

Liegt der Mittelpunkt des Kreises in der X-Axe, der Anfangspunkt O der Coordinaten aber in seiner Peripherie, so ist $q=0$ und $p=r$, und die Gleichung (2.) nimmt dann die Form an:

$$y^2=2rx-x^2$$

und heißt die **Scheitel-Gleichung** des Kreises.

Liegt der Mittelpunkt des Kreises im Durchschnittspunkt O der Axen, so ist q = 0 und p = 0, und man erhält aus (1.):

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

Diese Gleichung heißt die **Mittelpunkts-Gleichung** des Kreises.

Aus dem Gesagten folgt also:

I. **Die allgemeine Gleichung** des Kreises:

$$y^2 + x^2 + ay + bx + c = 0.$$

II. **Die Scheitel-Gleichung** des Kreises:

$$y^2 = 2rx - x^2$$

III. **Die Mittelpunkts-Gleichung** des Kreises:

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

§. 428.

Wir gehen jetzt zu der Untersuchung über, ob jede Gleichung des zweiten Grades, welche sich auf die Form

$$y^2 + x^2 + ay + bx + c = 0$$

bringen läßt, einen Kreis vorstellt, wobei wir voraussetzen, daß a, b und c beliebige **reelle** Zahlen, auch Null, sein sollen.

Schon die beiden Beispiele in §. 414. b) lehren, daß die vorliegende Frage nicht unbedingt bejaht werden kann; die Untersuchung giebt die Bedingungen, unter welchen die Gleichung oben die Gleichung eines Kreises ist.

Man kann diese Gleichung auf folgende Form bringen:

$$y^2 + ay + x^2 + bx = -c.$$

Ergänzt man nun die beiden ersten Glieder der linken Seite zu einem vollständigen Quadrat, dann auch die beiden letzten Glieder, so entsteht

$$\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c.$$

Vergleichen wir diese Form mit der Gleichung (1.) im vorhergehenden §.

$$(y - q)^2 + (x - p)^2 = r^2,$$

so geht letztere in die vorhergehende über, wenn $q = -\frac{a}{2}$, $p = -\frac{b}{2}$ und $r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ ist; d. h. hat der Mittelpunkt eines Kreises die Abscisse $p = -\frac{b}{2}$, die Ordinate $q = -\frac{a}{2}$ und den Radius $r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$, so wird die Gleichung dieses Kreises mit der gegebenen Gleichung

$$y^2 + x^2 + ay + bx + c = 0$$

identisch, woraus folgt, daß diese Gleichung jenen Kreis vorstellt. Weil nun a, b, c reelle Zahlen sein sollen, so kann man immer dem Mittelpunkte eines Kreises die Coordinaten $-\frac{b}{2}$ und $-\frac{a}{2}$ geben, hingegen nur den Radius r, wenn $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ positiv ist. Hieraus folgt also die Bedingung, unter welcher die gegebene Gleichung einen Kreis vorstellt. Ist c Null oder negativ, so ist die Gleichung

$$y^2 + x^2 + ay + bx + c = 0$$

immer die Gleichung eines Kreises; ist aber c positiv, so stellt die Gleichung nur dann einen Kreis vor, wenn

$$a^2 + b^2 > 4c$$

ist.

§. 429.

Zusatz.

Bringt man die Gleichung $y^2 + x^2 + ay + bx + c = 0$ auf die Form

$$\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 - c,$$

so erkennt man:

1) Ist $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$, so giebt es nur ein reelles Coordinaten-Paar, für welches die Gleichung richtig ist: für $x = -\frac{b}{2}$ ist $y = -\frac{a}{2}$, weil die Summe der Quadrate zweier reellen Zahlen nur Null sein kann, wenn jede Zahl Null ist. Die Gleichung stellt dann einen Punkt vor.

2) Ist $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$, so wird y für jeden reellen Werth von x imaginär und umgekehrt, weil die Summe der Quadrate zweier reellen Zahlen nicht negativ sein kann. Die Gleichung stellt dann weder eine Linie, noch einen Punkt vor.

3) Ist $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 > c$, so stellt die Gleichung einen Kreis vor; es giebt dann unendlich viele reelle Coordinaten-Paare, welche der Gleichung genügen; aber sie liegen zwischen bestimmten Grenzen, wie dies die Natur einer geschlossenen Kurve auch erfordert. Diese Grenzen ergeben sich aus der Bedingung, daß jedes der beiden

Quadrate $\left(y+\frac{a}{2}\right)^2$ und $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$ kleiner als $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c$ sein muß, höchstens aber diesem Ausdruck gleich sein kann. Aus

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c$$

folgt aber

$$x=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c},$$

und diese Werthe sind die Grenzwerthe für x, welche noch reelle Werthe für y zulassen; für jeden beider Werthe wird $y=-\frac{a}{2}$. Zu jedem Werthe von x innerhalb dieser Grenzen gehören zwei reelle Werthe von y, außerhalb derselben zwei imaginäre. Da zu jedem Grenzwerthe von x nur eine Ordinate y gehört, so sind diese Ordinaten Tangenten des Kreises, und zwischen ihnen liegt der Kreis. In der Figur zu §. 427. sind OB und OD die Grenzwerthe von x, ihre Differenz ist dem Durchmesser des Kreises gleich. Die zugehörigen Ordinaten BC und DE berühren den Kreis in ihren Endpunkten C und E; jede derselben ist der Ordinate q des Mittelpunktes M des Kreises gleich. — Auf dieselbe Weise kann man ferner schließen: aus

$$\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c$$

folgt

$$y=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c},$$

und diese Werthe sind die Grenzwerthe für y, welche noch reelle Werthe für x zulassen; für jeden beider Werthe wird $x=-\frac{b}{2}$. In der Figur zu §. 427. sind OF und OH die beiden Grenzwerthe von y, die zugehörigen Werthe von x sind FG und HK; jeder derselben ist eine Tangente des Kreises und der Abscisse p des Mittelpunktes M des Kreises gleich, und zwischen ihnen liegt wieder der Kreis. Zu jedem y zwischen den oben angegebenen Grenzwerthen gehören zwei reelle Werthe von x, außerhalb dieser Grenzen aber zwei imaginäre; auch giebt die Differenz der Grenzwerthe wieder den Durchmesser des Kreises.

§. 430.

Beurtheilung der Lage des Kreises aus seiner Gleichung.

1) Ist die Gleichung des Kreises gegeben:

$$y^2+x^2+ay+bx+c=0,$$

und bringt man diese Gleichung auf die Form:

$$\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c$$

so ist zunächst (§. 427. und 428.):

I. die Abscisse des Mittelpunktes $p=-\frac{b}{2}$

II. die Ordinate des Mittelpunktes $q=-\frac{a}{2}$

III. der Radius $r=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$.

Ist $a=0$, so liegt der Mittelpunkt des Kreises in der X-Axe (weil $q=0$); ist $b=0$, so liegt er in der Y-Axe (weil $p=0$); ist $a=0$ und auch $b=0$, so liegt er im Durchschnittspunkt O der Axen.

2) Um die Durchschnittspunkte des Kreises mit der X-Axe zu finden, setze man $y=0$ und entwickele aus der entstandenen Gleichung x. Ergiebt sich x imaginär, so schneidet oder berührt der Kreis die X-Axe nicht; erhält man für x nur einen Werth, so ist dieser x_0 und der Kreis berührt die X-Axe im Endpunkte der Abscisse x_0; endlich schneidet der Kreis die X-Axe, wenn sich zwei reelle Werthe für x ergeben, welche dann die beiden Werthe der Abscissen x_0 sind, durch deren Endpunkte der Kreis geht.

3) Aehnliches gilt für die Y-Axe. Man setzt $x=0$ und entwickelt aus der entstandenen Gleichung y; der gefundene Werth ist die Ordinate y_0, in deren Endpunkt der Kreis die Y-Axe schneidet. Je nachdem man für y_0 zwei imaginäre Werthe, oder nur einen reellen Werth, oder zwei reelle Werthe erhält, schneidet und berührt der Kreis die Y-Axe gar nicht, oder er berührt sie, oder er schneidet sie.

4) Der Kreis geht durch den Durchschnittspunkt O der Axen, wenn für $x=0$ auch $y=0$ ist, wenn also die Gleichung kein von x oder y unabhängiges Glied enthält, d. h. wenn $c=0$ ist.

Anmerk. Berührt der Kreis die X-Axe, so muß $q=\pm r$ sein; berührt er die Y-Axe, so muß sich $p=\pm r$ ergeben.

§. 431.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Die Lage und den Radius des Kreises zu finden:

$$y^2+x^2-30y+34x+225=0.$$

Aufl. $\quad y^2-30y+x^2+34x=-225.$

Addirt man zu beiden Seiten 15^2+17^2, so folgt:

$$(y-15)^2+(x+17)^2=17^2.$$

Hieraus ergiebt sich:

1) die Abscisse des Mittelpunktes $p = -17$

2) die Ordinate des Mittelpunktes $q = +15$

3) der Radius $r = 17$.

Um die Durchschnittspunkte mit der X-Axe zu finden, setzt man $y = 0$; dann folgt:

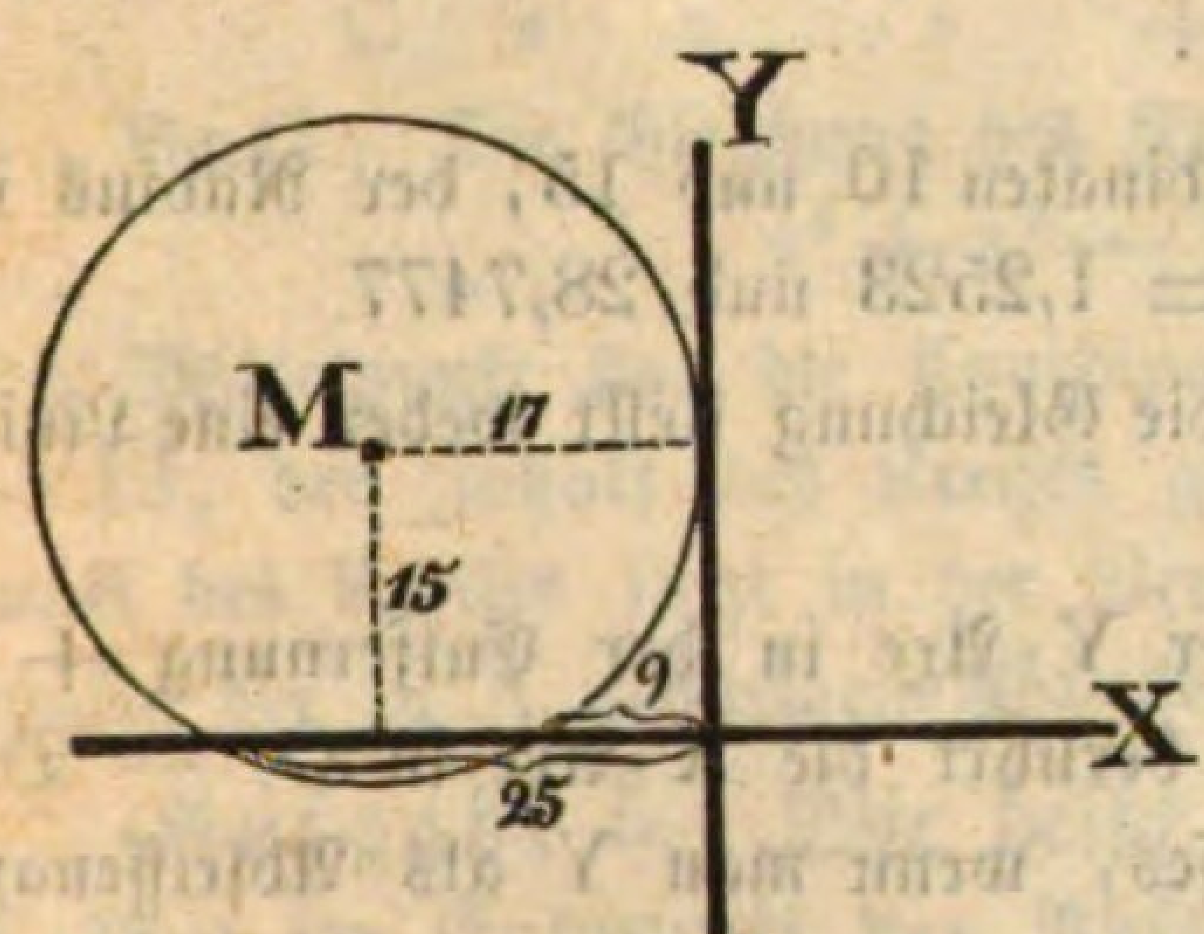
$$(x + 17)^2 = 17^2 - 15^2 \text{ oder}$$
$$(x + 17)^2 = 32 \times 2, \text{ daher}$$
$$x = -17 \pm 8; \text{ folglich:}$$

4) $x_0 = -9$ und auch $x_0 = -25$.

Um die Durchschnittspunkte mit der Y-Axe zu finden, setze man $x = 0$; dann folgt:

$$(y - 15)^2 = 17^2 - 17^2 \text{ oder}$$
$$y = 15 \pm 0; \text{ folglich:}$$

5) $y_0 = 15$.



Da sich der absolute Werth für die Abscisse des Mittelpunktes dem Radius gleich ergeben hat, so muß der Kreis die Y-Axe berühren; diese Lage folgt aber andrerseits auch daraus, daß für y_0 sich nur ein Werth ergeben hat. Die Figur zeigt die Lage des Kreises; der Leser möge nicht unterlassen, auch bei den folgenden Aufgaben nach der Berechnung die untersuchten Kreise aufzuzeichnen.

Aufgabe 2. Es soll die Lage und der Radius der Kreise, welche die nachfolgenden Gleichungen darstellen, bestimmt werden:

1) $y^2 + x^2 - 2y - 8x + 16 = 0$.

2) $y^2 + x^2 - 12y + 2x + 36 = 0$.

3) $y^2 + x^2 + 2y + 10x + 25 = 0$.

4) $y^2 + x^2 + 16y - 2x + 64 = 0$.

5) $y^2 + x^2 + 4y + 4x + 4 = 0$.

6) $y^2 + x^2 - 8y + 6x = 0$.

7) $y^2 + x^2 - 20y + 99 = 0$.

8) $y^2 + x^2 + 4y - 10x + 29 = 0$.

9) $y^2 + x^2 - 30y - 20x + 36 = 0$.

10) $y^2 + x^2 - 3y + 6x + 16 = 0$.

11) $x^2 = 16y - y^2$.

12) $y^2 + x^2 - 14x - 576 = 0$.

13) $2y^2 + 2x^2 - 4y + x - 6 = 0$.

14) $y^2 + x^2 - 18y + 16x + 109 = 0$.

Auflösung. Zu 1. Der Kreis berührt die X-Axe auf ihrer positiven Seite im Endpunkte der Ordinate $+4$ und hat den Radius 1.

Zu 2. Der Kreis berührt die Y-Axe auf ihrer negativen Seite im Endpunkte der Ordinate $+6$ und hat den Radius 1.

Zu 3. Der Kreis berührt die X-Axe auf ihrer negativen Seite im Endpunkte der Abscisse -5 und hat den Radius 1.

Zu 4. Der Kreis berührt die Y-Axe auf ihrer positiven Seite im Endpunkte der Ordinate -8 und hat den Radius 1.

Zu 5. Der Kreis liegt im dritten Quadranten und berührt beide Axen; sein Mittelpunkt hat von O den Anstand $2\sqrt{2}$.

Zu 6. Der Kreis geht durch O und hat den Radius 5; sein Mittelpunkt hat die Coordinaten -3 und $+4$.

Zu 7. Der Mittelpunkt des Kreises liegt in der Y-Axe, in der Entfernung 10 von O; der Radius ist gleich 1.

Zu 8. Die Gleichung gehört keinem Kreise an, sondern stellt einen Punkt $(+5, -2)$ vor.

Zu 9. Der Mittelpunkt hat die Coordinaten 10 und 15, der Radius ist gleich 17; ferner ist $x_0 = 2$ und 18, $y_0 = 1{,}2523$ und $28{,}7477$.

Zu 10. Es ergiebt sich r imaginär; die Gleichung stellt weder eine Linie, noch einen Punkt vor.

Zu 11. Der Mittelpunkt liegt in der Y-Axe in der Entfernung $+8$ von O; der Kreis hat den Radius 8 und berührt die X-Axe in O. — Die Gleichung ist die Scheitelgleichung des Kreises, wenn man Y als Abscissenaxe und X als Ordinatenaxe ansieht.

Zu 12. Der Mittelpunkt liegt in der X-Axe in der Entfernung $+7$ von O; der Radius ist gleich 25. Ferner ist $x_0 = 32$ und -18, $y_0 = \pm 24$.

Zu 13. Der Mittelpunkt hat die Coordinaten $-\frac{1}{4}$ und $+1$, der Radius ist $= 2{,}01556$. Ferner ist $x_0 = +\frac{3}{2}$ und -2, $y_0 = +3$ und -1.

Zu 14. Der Mittelpunkt hat die Coordinaten -8 und $+9$, der Radius ist gleich 6.

Aufgabe 3. Drei Punkte sind durch ihre Coordinaten gegeben:

A	hat	die Abscisse	1	und	die Ordinate	0
B	»	»	2	»	»	2
C	»	»	0	»	»	3;

man soll den Mittelpunkt, den Radius und den Inhalt des Kreises bestimmen, der durch A, B und C geht.

Aufl. Die Gleichung des Kreises sei

$$y^2 + x^2 + ay + bx + c = 0.$$

Damit der Kreis durch A geht, muß $y = 0$ sein, wenn $x = 1$ ist; hieraus und aus gleichem Schließen in Bezug auf B und C folgt:

1) $b+c+1=0$
2) $2a+2b+c+8=0$
3) $3a+c+9=0$.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$a=-3,\quad b=-1,\quad c=0.$$

Die Gleichung des Kreises heißt also

$$y^2+x^2-3y-x=0;$$

aus ihr folgt, daß der Kreis durch O geht, also die Linie AC ein Durchmesser des Kreises ist; daher ist auch $\measuredangle$ ABC $=90°$. Der Mittelpunkt des Kreises hat die Coordinaten $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$, der Radius ist $=\frac{1}{2}\sqrt{10}$, der Inhalt des Kreises $=\frac{10}{4}\pi=7{,}85398$ □-Einheiten.

Aufgabe 4. Dieselbe Aufgabe, wenn die Coordinaten der drei Punkte folgende sind:

A hat die Abscisse -1 und die Ordinate -1
B » » » $+1$ » » » $+3$
C » » » $+2$ » » » $+1$

Aufl. Die Gleichung des Kreises ist:

$$y^2+x^2-\tfrac{9}{4}y+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{15}{4}=0.$$

Der Mittelpunkt hat die Coordinaten $-\frac{1}{4}$ und $+\frac{9}{8}$, der Radius ist gleich $\frac{5}{8}\sqrt{13}$, der Inhalt des Kreises gleich 15,9534 □-Einheiten. — Der Mittelpunkt des Kreises liegt in der Verbindungslinie des Punktes B mit dem Endpunkte der zu A gehörigen Abscisse.

Aufgabe 5. Wie heißt die Gleichung des Kreises, welcher die X-Axe im Endpunkt der Abscisse $+1$ berührt und durch den Punkt geht, welcher die Abscisse $+3$ und die Ordinate $+2$ hat?

Aufl. Setzt man in die Gleichung

$$y^2+x^2+ay+bx+c=0$$

$y=0$, so muß die quadratische Gleichung

$$x^2+bx+c=0$$

zwei gleiche Wurzeln $(+1)$ haben, d. h. es muß

$$x^2+bx+c=(x-1)^2$$

sein, woraus $b=-2$ und $c=+1$ folgt. Setzt man diese Werthe in die ursprüngliche Gleichung ein, so findet man noch a aus der Bedingung, daß $y=2$ für $x=3$ sein muß. Die gesuchte Gleichung ist:

$$y^2+x^2-4y-2x+1=0.$$

Man kann auch a, b, c aus der Bedingung finden, daß y gleich $+2$, 0 und $+2$ sein muß, wenn x resp. gleich -1, $+1$ und $+3$ ist.

Aufgabe 6. Wie heißt die Gleichung des Kreises, der die Y-Axe im Endpunkt der Ordinate -2 berührt und durch den Punkt geht, dessen Abscisse -3 und dessen Ordinate $+1$ ist?

Antw. $y^2+x^2+4y+6x+4=0$.

Aufgabe 7. Wie heißt die Gleichung des Kreises, der beide Axen berührt und durch den Punkt geht, welcher die Abscisse $+9$ und die Ordinate -2 hat?

Aufl. Man erhält zwei Kreise:

1) $y^2 + x^2 + 34y - 34x + 289 = 0.$

2) $y^2 + x^2 + 10y - 10x + 25 = 0.$

Aufgabe 8. Ein Punkt P hat die Abscisse $+4$ und die Ordinate $+1$, ein zweiter Punkt Q hat die Abscisse -2 und die Ordinate $+3$; wie heißt die Gleichung des Kreises, der durch den Durchschnittspunkt der Axen und durch die Punkte P und Q geht?

Antw. $7y^2 + 7x^2 - 43y - 19x = 0.$

§. 432.

Zwei Kreise.

Bei der Untersuchung über die gegenseitige Lage zweier Kreise kommt es hauptsächlich darauf an, zu entscheiden, ob die Kreise concentrisch sind, oder nicht, und ob sie im letzteren Falle sich schneiden, oder berühren, oder weder schneiden, noch berühren.

Wir setzen natürlich für beide Kreise dasselbe Coordinaten-System voraus; ihre Gleichungen mögen sein:

$$(1.)\quad y^2 + x^2 + ay + bx + c = 0$$

$$(2.)\quad y^2 + x^2 + a'y + b'x + c' = 0.$$

1) Da die Ordinate des Mittelpunktes eines Kreises nur von dem Factor von y, die Abscisse nur von dem Factor von x abhängig ist, so sind die beiden Kreise concentrisch, wenn

$$a = a' \text{ und zugleich } b = b'$$

ist; in allen anderen Fällen sind sie excentrisch, und es ist dann (§. 430. I. und II. und §. 413. IV.)

$$\text{die Centrale} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2}.$$

Auch aus der Centrale folgt die oben für concentrische Kreise angegebene Bedingung. — Ist $a = a'$, aber $b \gtrless b'$, so ist die Centrale der X-Axe parallel; ist $b = b'$, aber $a \gtrless a'$, so ist die Centrale der Y-Axe parallel.

2) Zur Beantwortung der andern Fragen muß man die Punkte suchen, welche beiden Kreisperipherien angehören, d. h. man muß die zusammengehörigen Werthe von x und y finden, welche den beiden Gleichungen (1.) und (2.) genügen (§. 423. Nr. 3.). Man hat also diese Gleichungen als zwei algebraische Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y zu betrachten und x und y zu entwickeln. Zieht man aber (2.) von (1.) ab, so folgt

$$(3.)\quad (a - a')y + (b - b')x + c - c' = 0.$$

Da die Verbindung dieser Gleichung mit (1.) oder (2.) immer zu einer quadratischen Gleichung führt, so kann man nie mehr als zwei Paar zusammengehöriger Coordinaten finden, welche beiden Gleichungen genügen, d. h. die Kreise können sich nie in mehr als zwei Punkten schneiden.

Erhält man für x zwei verschiedene Werthe und auch für y zwei verschiedene, oder erhält man für x zwei gleiche Werthe, aber für y zwei verschiedene, oder endlich erhält man für x zwei verschiedene Werthe, aber für y zwei gleiche, und sind alle diese Werthe reell: so schneiden sich die Kreise in zwei Punkten, welche durch die zusammengehörigen Werthe von x und y bestimmt sind.

Sind aber die Werthe von x und y imaginär, so haben die Kreisperipherien keinen gemeinschaftlichen Punkt, d. h. die Kreise schneiden und berühren sich nicht.

Ergiebt sich endlich nur ein reeller Werth für x und nur ein reeller Werth für y, so berühren sich die Kreise in dem durch diese Werthe bestimmten Punkte.

In den Beispielen im nächsten §. kommen alle angegebenen Fälle vor.

§. 433.

Uebungs-Aufgaben über zwei Kreise.

Aufgabe 1. Gegeben:

1) $y^2 + x^2 - 10y - 6x + 30 = 0$

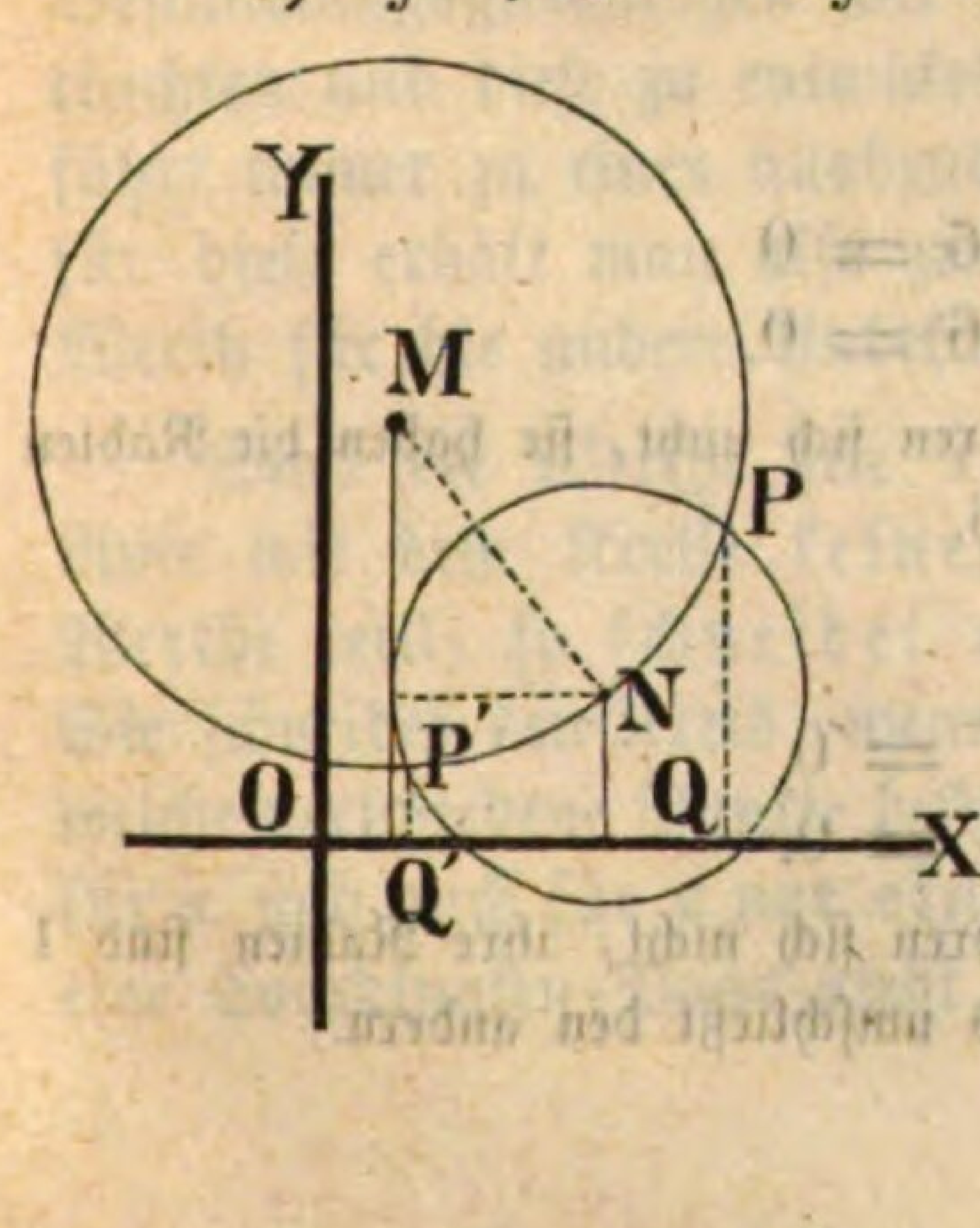
2) $y^2 + x^2 - 10y - 6x - 2 = 0.$

Aufl. Die beiden Kreise sind concentrisch, ihr Mittelpunkt hat die Coordinaten 3 und 5, der Radius des ersten Kreises ist gleich 2, der des anderen gleich 6.

Aufgabe 2. Gegeben:

1) $y^2 + x^2 - 24y - 4x + 48 = 0$

2) $y^2 + x^2 - 8y - 16x + 44 = 0.$



Aufl. Zunächst erkennt man unmittelbar, daß die Kreise nicht concentrisch sind. Um ihre Durchschnittspunkte zu finden, wenn solche existiren, ziehe man beide Gleichungen von einander ab; man erhält dann:

$$4y = 1 + 3x.$$

Substituirt man den Werth von y in 2), so erhält man die Gleichung:

$$x^2 - 13{,}84x + 26{,}92 = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist x zu entwickeln und dann aus der vorhergehenden Gleichung das zugehörige y zu finden. Bezeichnen

wir die Coordinaten der Durchschnittspunkte, wie früher, mit x′ und y′, so erhalten wir:

$$x' = 11{,}4989 \text{ und } y' = 8{,}8742; \text{ oder}$$
$$x' = 2{,}3411 \text{ und } y' = 2{,}0058.$$

Die Kreise schneiden sich also; in der Figur sind OQ und QP die zuerst gefundenen zusammengehörigen Coordinaten, OQ′ und Q′P′ die beiden andern; P und P′ sind die Durchschnittspunkte der Kreise. — Man findet ferner, daß der Mittelpunkt N des zweiten Kreises in der Peripherie des ersten liegt, und daß der zweite Kreis die Ordinate des Mittelpunktes M des ersten Kreises berührt. Die Gründe möge der Leser selbst aufsuchen.

Aufgabe 3. Gegeben:

$$1)\; y^2 + x^2 - 42y - 20x + 252 = 0$$
$$2)\; y^2 + x^2 - 20x = 0.$$

Aufl. Die beiden Kreise schneiden sich. Es ist $x' = 2$ und $y' = 6$, oder $x' = 18$ und $y' = 6$. Die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise ist der X-Axe parallel. — Der Leser möge die Mittelpunkte und die Radien der Kreise aufsuchen und dann die Kreise aufzeichnen.

Aufgabe 4. Gegeben:

$$1)\; y^2 + x^2 - 7y - 4x + 10 = 0$$
$$2)\; y^2 + x^2 - 7y - 3x + 8 = 0.$$

Aufl. Die Kreise schneiden sich. Es ist $x' = 2$ und $y' = 6$, oder $x' = 2$ und $y' = 1$. Die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise ist der Y-Axe parallel und ein Durchmesser des ersten Kreises.

Aufgabe 5. Gegeben:

$$1)\; y^2 + x^2 + 4y - 8x + 16 = 0$$
$$2)\; y^2 + x^2 - 6y + 8 = 0.$$

Aufl. Die Kreise schneiden und berühren sich nicht; sie haben die Radien 2 und 1, und ihre Centrale ist $= \sqrt{41}$.

Aufgabe 6. Gegeben:

$$1)\; y^2 + x^2 - 6y + 12x + 36 = 0$$
$$2)\; y^2 + x^2 + 12y - 8x + 36 = 0.$$

Aufl. Die Kreise schneiden und berühren sich nicht, sie haben die Radien 3 und 4, und ihre Centrale ist $= 13{,}4536$.

Aufgabe 7. Gegeben:

$$1)\; y^2 + x^2 - 4y - 4x + 7 = 0$$
$$2)\; y^2 + x^2 - 12y + 2x - 63 = 0.$$

Aufl. Die Kreise schneiden und berühren sich nicht; ihre Radien sind 1 und 10, ihre Centrale $= 5$; der eine Kreis umschließt den andern.

Aufgabe 8. Gegeben:

1) $y^2 + x^2 - 20y - 20x + 136 = 0$
2) $y^2 + x^2 - 20y - 28x + 280 = 0$.

Aufl. Die Kreise berühren sich von innen; der Berührungspunkt hat die Coordinaten $x' = 18$, $y' = 10$; die Centrale ist der X-Axe parallel.

Aufgabe 9. Gegeben:

1) $y^2 + x^2 - 4y - 20x + 4 = 0$
2) $y^2 + x^2 - 28y - 38x + 532 = 0$.

Aufl. Die Kreise berühren sich von außen; der Berührungspunkt hat die Coordinaten $x' = 16$, $y' = 10$. Die Radien der Kreise sind 10 und 5, die Centrale also 15.

Aufgabe 10. Gegeben:

1) $y^2 + x^2 - 12y - 6x + 20 = 0$
2) $y^2 + x^2 - 4y - 12x + 40 = 0$.

Aufl. Man erhält $x' = 6$, $y' = 2$. Bei näherer Betrachtung findet man, daß die zweite Gleichung keinen Kreis, sondern einen Punkt vorstellt, welcher die Coordinaten 6 und 2 hat und in der Peripherie des Kreises liegt, der durch die erste Gleichung bestimmt ist.

§. 434.

Der Kreis und die gerade Linie.

Um die gemeinschaftlichen Punkte eines Kreises und einer geraden Linie, welche durch ihre Gleichungen

1) $y^2 + x^2 + ay + bx + c = 0$
2) $y = a' + b'x$

gegeben sind, zu finden, hat man wieder diese Gleichungen als zwei Bestimmungsgleichungen mit den beiden Unbekannten x und y zu betrachten und diese zu entwickeln. Die Verbindung beider Gleichungen führt immer zu einer quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten; für diese erhält man also zwei Werthe und zu jedem aus 2) einen Werth für die andere Unbekannte.

Sind die Werthe für x und y imaginär, so hat die gerade Linie mit dem Kreise keinen Punkt gemein; werden aber diese Werthe reell, so schneidet oder berührt die Linie den Kreis. Sie schneidet den Kreis, wenn sich zwei Coordinaten-Paare ergeben, welche verschiedene Punkte bestimmen; sie berührt den Kreis, wenn sich für x und auch für y nur ein Werth ergiebt (gleiche Wurzeln); dieses eine Coordinaten-Paar giebt dann den Berührungspunkt.

Beispiel 1. 1) $y^2 + x^2 + 4y - 6x - 3 = 0$
2) $y = 4 + \frac{4}{3}x$.

Aufl. Die gerade Linie hat mit dem Kreise keinen Punkt gemein; sie liegt oberhalb des Kreises. Der Leser möge in diesem und in den folgenden Fällen die Linie und den Kreis aufzeichnen.

Beispiel 2. 1) $y^2 + x^2 - 2y - 6x + 5 = 0$
2) $y = 3 - x$.

Aufl. Die Linie schneidet den Kreis; der eine Durchschnittspunkt hat die Coordinaten $+1$ und $+2$, der andere: $+4$ und -1. Die Sehne, welche die Linie im Kreise erzeugt, hat die Länge 4,2426.

Beispiel 3. 1) $y^2 + x^2 - 4y - 10x + 9 = 0$
2) $y = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}x$.

Aufl. Die gerade Linie berührt den Kreis; der Berührungspunkt hat die Coordinaten $+3$ und $+6$.

Beispiel 4. 1) $y^2 + x^2 - 12y - 2x + 12 = 0$
2) $y = \frac{21}{4} + \frac{3}{4}x$.

Aufl. Die gerade Linie schneidet den Kreis und geht durch seinen Mittelpunkt. Die Coordinaten des einen Durchschnittspunktes sind -3 und $+3$, die des anderen $+5$ und $+9$.

§. 435.

Die Tangenten des Kreises.

Ist ein Kreis durch seine Gleichung gegeben, und soll durch einen Punkt P seiner Peripherie eine Tangente an den Kreis gelegt und durch ihre Gleichung bestimmt werden, so reducirt sich diese Aufgabe darauf, durch P eine gerade Linie zu legen, welche auf dem zu P gehörigen Radius senkrecht steht. Ist M der Mittelpunkt des Kreises, so bestimme man zunächst die Gleichung des Radius MP und verfahre dann nach §. 424. Aufg. 2.

Ist P ein Punkt außerhalb des Kreises, gegeben durch ($x = p$, $y = q$), und soll durch P eine Linie gelegt und durch ihre Gleichung bestimmt werden, welche den Kreis berührt, so hat diese Linie zunächst die Form

$$y - q = b(x - p)$$

und die Constante b ist jetzt so zu bestimmen, daß die Linie und die Kreisperipherie nur einen Punkt gemein haben. Substituirt man etwa y aus der vorstehenden Gleichung in die des Kreises, so muß die entstandene Gleichung mit der Unbekannten x zwei gleiche Wurzeln haben; aus dieser Bedingung ist b zu bestimmen.

Aufgabe 1. Es ist der Kreis gegeben:

$$y^2 + x^2 - 4y - 8x - 149 = 0,$$

man soll die Gleichung der Linie bestimmen, welche diesen Kreis in dem Punkte P ($x = -8$, $y = 7$) berührt.

Aufl. Ist M der Mittelpunkt des Kreises, so ist die Gleichung der Linie MP

$$y = \frac{11}{3} - \frac{5}{12}x;$$

hieraus folgt die Gleichung der gesuchten Linie:

$$y = \frac{131}{5} + \frac{12}{5}x.$$

Aufgabe 2. Ein Punkt P ist durch ($x = 1$, $y = 4$) gegeben; man soll von P an den Kreis $y^2 + x^2 - 8y - 12x + 43 = 0$ eine Tangente legen.

Aufl. Jede durch P gehende Linie hat die Form

$$y - 4 = b.(x - 1),$$

und b ist nun so zu bestimmen, daß die Linie Tangente des Kreises wird. Substituirt man aber $y = 4 - b + bx$ in die Gleichung des Kreises und ordnet die entstandene Gleichung, so folgt:

$$x^2 - \frac{2b^2 + 12}{b^2 + 1}x + \frac{b^2 + 27}{b^2 + 1} = 0.$$

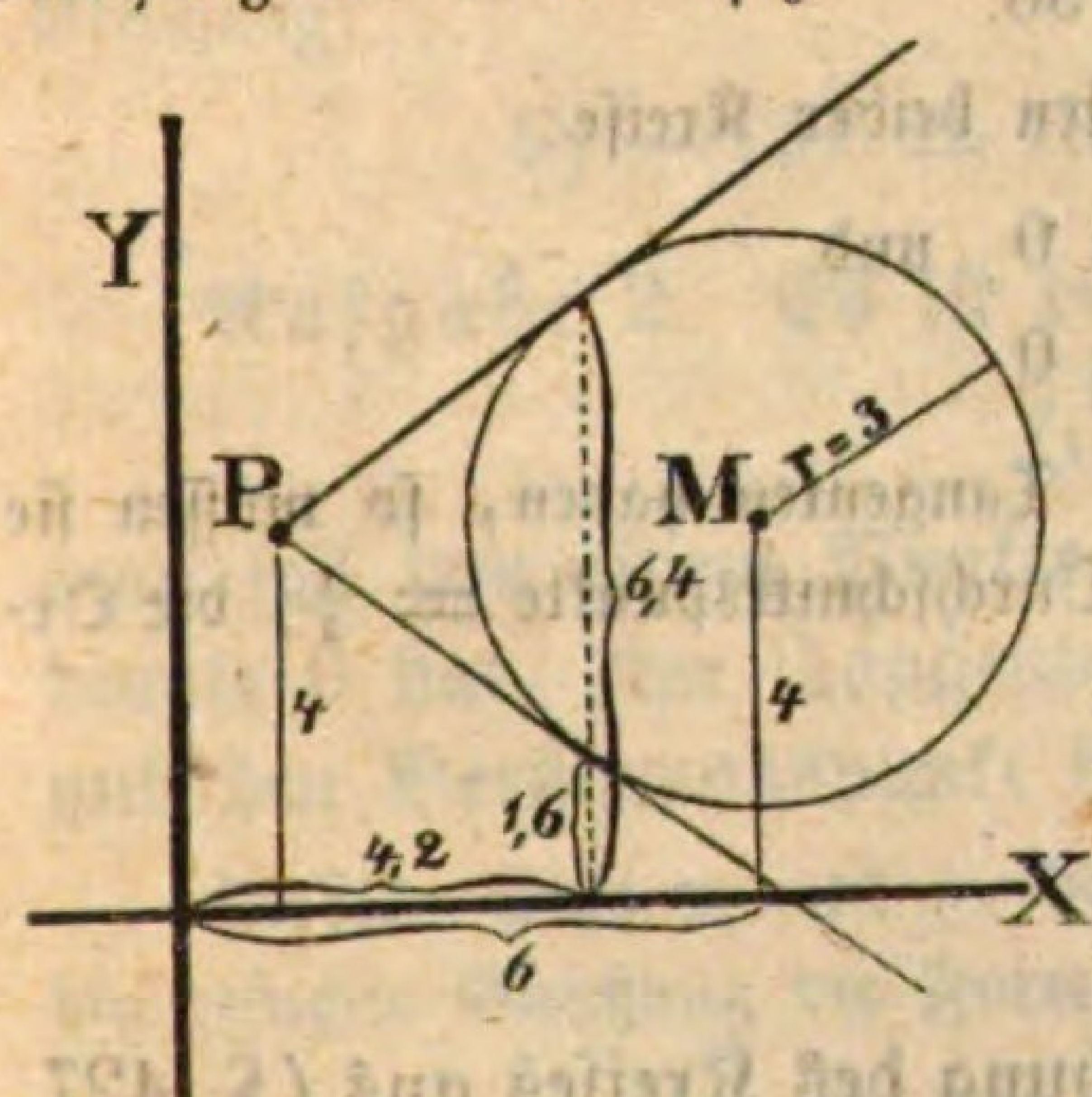
Wenn die gesuchte Linie eine Tangente des Kreises sein soll, so muß diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln haben, d. h. es muß

$$\left(\frac{b^2 + 6}{b^2 + 1}\right)^2 = \frac{b^2 + 27}{b^2 + 1}$$

sein. Entwickelt man b, so ergiebt sich:

$$b = \pm \frac{3}{4}.$$

Man hat sonach beide Tangenten gefunden, welche sich von P an den Kreis legen lassen, und erhält ihre Gleichungen, wenn man b in die ursprüngliche Gleichung der Linie einsetzt. Die beiden Tangenten sind:



$$1)\ y = \frac{13}{4} + \frac{3}{4}x$$

$$2)\ y = \frac{19}{4} - \frac{3}{4}x.$$

Die Abscisse des Berührungspunktes ergiebt sich aus der quadratischen Gleichung oben: $x = \frac{b^2 + 6}{b^2 + 1}$; sie ist also für beide Tangenten dieselbe, weil $b = \pm \frac{3}{4}$ war.

Man erhält:

für die erste Tangente $x' = 4{,}2$; $y' = 6{,}4$;
für die zweite Tangente $x' = 4{,}2$; $y' = 1{,}6$.

Die Figur zeigt die Lage des Kreises und beider Tangenten. Die Länge jeder Tangente vom Punkte P bis zum Berührungspunkt findet man $= 4$.

Aufgabe 3. Die Gleichung der Tangenten zu bestimmen, welche man an den Kreis $y^2 + x^2 - 4y - 6x + 12 = 0$ vom Durchschnittspunkt der Axen legen kann.

Aufl. Die gesuchte Linie hat die Form $y = bx$. Auf demselben Wege, wie in der vorhergehenden Aufgabe findet man $b = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}$ und erhält die beiden Tangenten:

$$1) \quad y = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} x$$

$$2) \quad y = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} x.$$

Die Berührungspunkte haben die Coordinaten:

zu 1) $x' = 2{,}236$ und $y' = 2{,}646$.
zu 2) $x' = 3{,}302$ und $y' = 1{,}047$.

Aufgabe 4. Es sind zwei Kreise gegeben:

$$1) \quad y^2 + x^2 = 4$$
$$2) \quad y^2 + x^2 = 12x;$$

man soll die gerade Linie bestimmen, welche beide Kreise berührt.

Aufl. Die Gleichung der gesuchten geraden Linie hat die Form

$$y = a + bx.$$

Setzt man den Werth von y in 1) und dann auch in 2) ein und entwickelt aus jeder der so entstandenen Gleichungen x, so muß sich aus jeder Gleichung nur ein Werth für x ergeben. Aus dieser Bedingung erhält man die Bestimmungsgleichungen:

$$a^2 - 4b^2 = 4$$
$$a^2 + 12ab = 36.$$

Es ergeben sich zwei gemeinschaftliche Tangenten beider Kreise:

$$y . \sqrt{5} - 2x - 6 = 0 \quad \text{und}$$
$$y . \sqrt{5} + 2x + 6 = 0.$$

Da die Kreise nur zwei gemeinschaftliche Tangenten haben, so müssen sie sich schneiden; man findet die Abscisse beider Durchschnittspunkte $= \frac{1}{3}$, die Ordinaten $= \pm \frac{1}{3}\sqrt{35}$.

§. 436.

Zusatz.

Geht man von der Mittelpunktsgleichung des Kreises aus (§. 427. III.), so läßt sich die Gleichung der Tangente für einen beliebigen Punkt der Peripherie auf folgende Weise entwickeln:

Ein Punkt P der Kreisperipherie habe die Coordinaten x_1 und y_1, so daß

$$(1.)\quad y_1^2 + x_1^2 = r^2$$

ist. Der Anfangspunkt O der Coordinaten ist der Mittelpunkt des Kreises; folglich ist die Gleichung des Radius OP:

$$(2.)\quad y_2 = \frac{y_1}{x_1} \cdot x_2,$$

wenn x_2 und y_2 die Coordinaten dieser Linie sind. Die Coordinaten der Tangente mögen x und y sein; ihre Gleichung muß, weil die Tangente durch P gehen soll, die Form haben:

$$(3.)\quad y - y_1 = b.(x - x_1).$$

Die Linien (2.) und (3.) sollen auf einander senkrecht stehen, folglich muß $b = -\frac{x_1}{y_1}$ sein; daher folgt aus (3.):

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \text{ oder}$$

$$y_1 . y - y_1^2 = -x_1 x + x_1^2 \text{ oder}$$

$$y_1 . y + x_1 x = x_1^2 + y_1^2; \text{ folglich aus (1.):}$$

$$(4.)\quad y_1 . y + x_1 . x = r^2$$

und diese Gleichung ist also die der gesuchten Tangente.

Aufgabe 1. Es ist der Kreis gegeben:

$$y_1^2 + x_1^2 = 169;$$

man soll durch den Punkt P seiner Peripherie, welcher die Abscisse $x_1 = -12$ und eine positive Ordinate hat, eine Tangente an den Kreis legen und ihre Gleichung bestimmen.

Aufl. Für $x_1 = -12$ wird $y_1 = +5$; daher ist die verlangte Gleichung:

$$5y - 12x = 169 \text{ oder } y = \frac{169}{5} + \frac{12}{5}x.$$

Aufgabe 2. Es ist der Kreis gegeben:

$$y_1^2 + x_1^2 = 9;$$

man soll von einem Punkte P, welcher die Abscisse -5 und die Ordinate 0 hat, eine Tangente an den Kreis legen und ihre Gleichung und den Berührungspunkt bestimmen.

Aufl. Sind x_1 und y_1 die Coordinaten des Berührungspunktes, so hat die gesuchte Gleichung die Form:

$$(1.)\quad y_1 . y + x_1 . x = 9.$$

Es kommt jetzt darauf an, die Constanten x_1 und y_1 zu bestimmen. Weil aber die Tangente durch P gehen soll, also $y = 0$ für $x = -5$ werden

muß, und weil ferner zwischen x_1 und y_1 die gegebene Gleichung des Kreises Statt finden muß, so hat man:

$$(2.)\quad -5x_1 = 9$$
$$(3.)\quad y_1^2 + x_1^2 = 9.$$

Aus diesen Gleichungen folgt $x_1 = -\frac{9}{5}$ und $y_1 = \pm\frac{12}{5}$. Es giebt also, wie bekannt, zwei Tangenten, deren Berührungspunkte die Coordinaten haben

die erste Tangente: $x_1 = -1{,}8$ und $y_1 = +2{,}4$
die zweite Tangente: $x_1 = -1{,}8$ und $y_1 = -2{,}4$.

Die Gleichung der ersten Tangenten ist:

$$2{,}4y - 1{,}8x = 9 \quad \text{oder} \quad y = \frac{15}{4} + \frac{3}{4}x.$$

Die Gleichung der zweiten Tangente:

$$-2{,}4y - 1{,}8x = 9 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{15}{4} - \frac{3}{4}x.$$

Reduction der Gleichung einer Linie auf ein anderes Coordinaten-System.

§. 437.

Der Leser sei darauf aufmerksam gemacht, daß die beiden Aufgaben in dem vorhergehenden §. schon früher gegeben und gelöst worden sind; sie waren nur in anderer Form gegeben. Es sind die beiden Aufgaben 1) und 2) in §. 435., die im vorhergehenden §. nur dahin abgeändert worden sind, daß statt der allgemeinen Gleichungen der Kreise ihre Mittelpunktsgleichungen gegeben wurden, und daß auch die Coordinaten des gegebenen Punktes P sich auf das Coordinaten-System bezogen, dessen Axen sich im Mittelpunkte der Kreise schneiden. Denkt man sich in der Figur zu §. 435. Aufg. 2. durch den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises zwei mit X und Y parallele Axen gelegt und bezieht auf sie die gegebenen und gesuchten Punkte und Linien, so hat man die Aufgabe 2. in §. 436. Weil nämlich der Kreis in jener Figur den Radius 3 hat, so ist seine Gleichung für das neue Coordinaten-System: $y_1^2 + x_1^2 = 9$, und für dieses System hat der Punkt P die Coordinaten -5 und 0. Die Uebereinstimmung der Auflösung in §. 436. mit der in §. 435. ist leicht aus der Figur zu erkennen. Aehnliches gilt für die Aufgabe 1. — Wenn aber die zweite Auflösung beider Aufgaben einfacher und kürzer als die erste ist, so haben wir den Grund in dem veränderten Coordinaten-System zu suchen, für welches die Gleichungen der Kreise eine einfachere Form annehmen, und diese Beispiele mögen den Leser lehren daß bei der Untersuchung über Linien mit Hülfe ihrer Gleichungen,

die Lage der Axen, auf welche sich die Gleichungen beziehen, von Einfluß ist; eine zweckmäßige Wahl der Lage dieser Axen kann eine solche Untersuchung wesentlich vereinfachen. Den Hauptgrund der bequemeren und kürzeren Rechnung haben wir also in der einfacheren Form zu suchen, welche die Gleichungen für ein verändertes Coordinaten-System annehmen können, und wir erinnern den Leser in Bezug hierauf an die Gleichung der geraden Linie. Bei beliebiger Lage der Axen zu der geraden Linie, hat deren Gleichung die Form $y = a + bx$; schneiden sich aber die Axen in einem Punkt der Linie, so hat sie die einfachere Form $y = bx$, und ist eine der Axen mit der Linie parallel, so erhält ihre Gleichung die noch einfachere Form $y = a$ oder $x = a$. Eben so haben wir beim Kreise die allgemeine Gleichung

$$y^2 + x^2 + ay + bx + c = 0$$

gefunden, dann die einfachere Scheitel-Gleichung $y^2 = 2rx - x^2$ und die noch einfachere Mittelpunkts-Gleichung $y^2 + x^2 = r^2$. Auch hier ist die einfachere Form der beiden letzten Gleichungen eine Folge der besonderen Lage der Axen zum Kreise. — Die vorstehenden Bemerkungen führen zu der allgemeinen Aufgabe im nächsten §., welche im Besonderen für die Kegelschnitte wichtig ist. Eine erfolgreiche Anwendung dieser Aufgabe zu dem Zwecke, statt einer gegebenen Gleichung eine bequemere zu erhalten, erfordert aber im Allgemeinen die Kenntniß der Lage und Gestalt der Linie, welche durch die gegebene Gleichung bestimmt ist.

§. 438.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung einer Linie gegeben; man soll die Gleichung derselben Linie für ein anderes Coordinaten-System herleiten, wenn die Lage dieses neuen Coordinaten-Systems zu dem, auf welches sich die gegebene Gleichung bezieht, bekannt ist.

Auflösung. Die Axen des gegebenen Coordinaten-Systems sind X und Y, ihr Durchschnittspunkt ist O; x und y sind die Coordinaten der Linie. Die Axen des neuen Coordinaten-Systems sollen mit U und Z bezeichnet werden, ihr Durchschnittspunkt sei O'; die Coordinaten der Linie für dieses neue System sollen u und z sein, und zwar soll u die Abscisse, z die Ordinate bezeichnen.

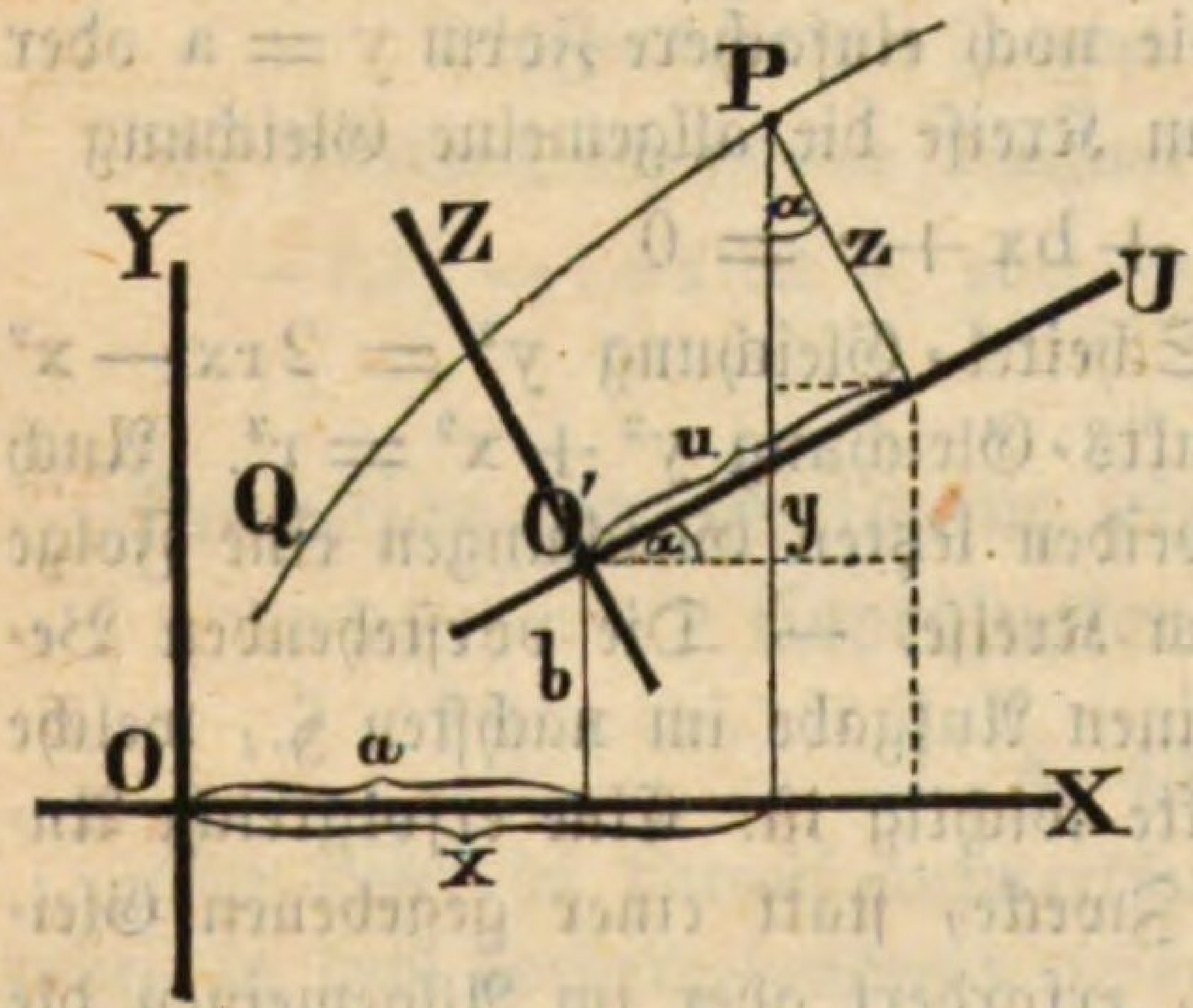
Bringt man alle Glieder der gegebenen Gleichung zwischen x und y auf die linke Seite, so daß auf der andern Seite 0 steht, so ist die linke Seite eine Function von x und y; daher kann man die gegebene Gleichung schreiben:

$$f(x, y) = 0,$$

und diese Gleichung soll nun in eine zwischen u und z verwandelt, also auf die Form gebracht werden:

$$\varphi(u, z) = 0.$$

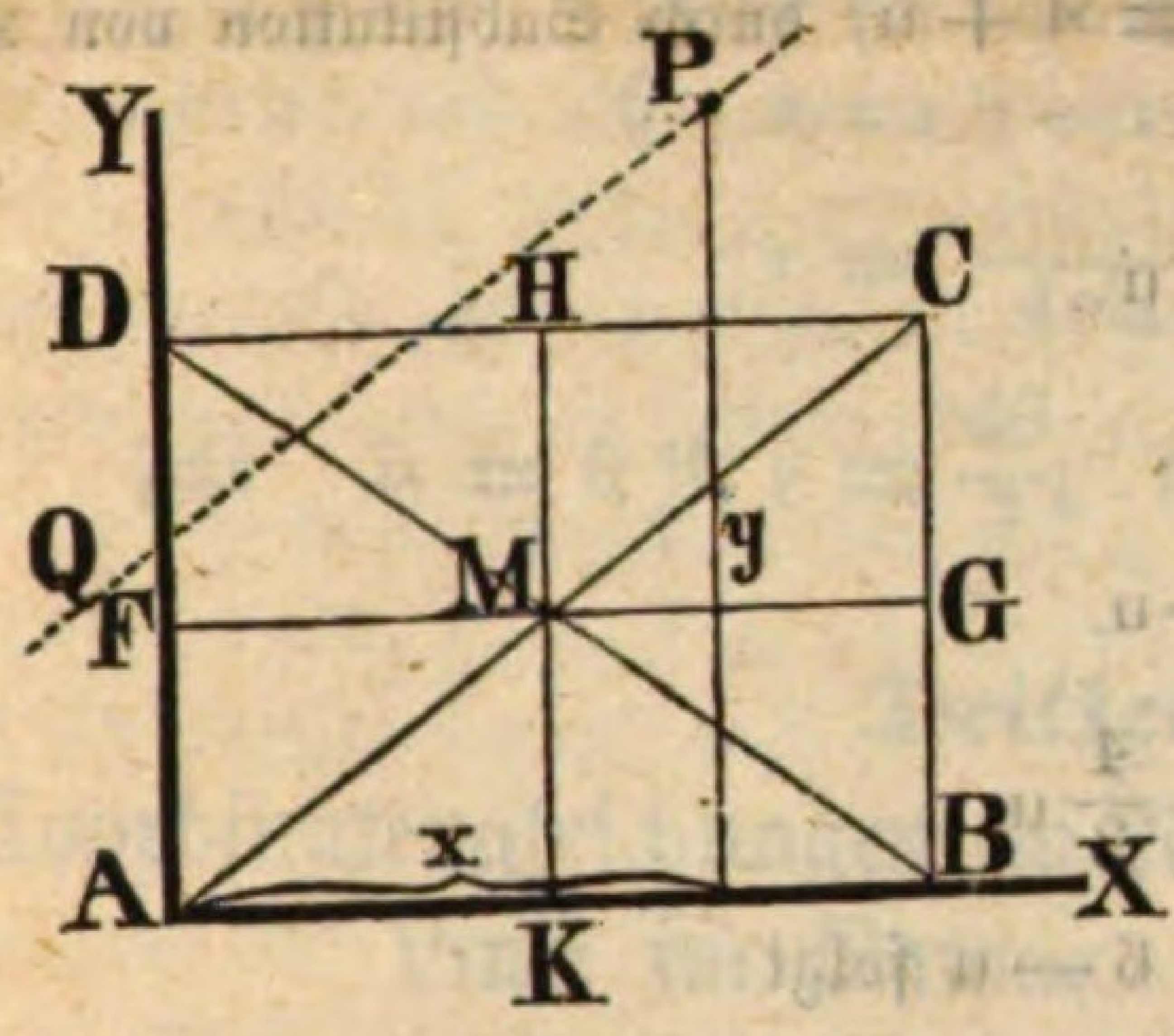
Zu diesem Zwecke fälle man von einem beliebigen Punkte P der Linie QP, deren Gleichung die gegebene sei, eine Senkrechte auf X und eine zweite Senkrechte auf U; durch diese Senkrechten erzeugt man die Coordinaten x, y, u und z des Punktes P, und drückt man nun trigonometrisch x und y durch u und z aus und substituirt ihre Werthe in die gegebene Gleichung $f(x, y) = 0$, so wird diese in eine Gleichung zwischen u und z, also in die gesuchte Gleichung verwandelt. Hat nun der Durchschnittspunkt O′ der Axen U und Z in Beziehung auf das ursprüngliche Coordinatensystem die Coordinaten a und b, und bildet die Axe U mit X den Winkel α, wie die Figur ihn zeigt, zieht man ferner durch die Endpunkte der Abscisse u Parallelen mit X und Y: so findet man leicht, da z und y auch den Winkel α mit einander bilden, die beiden Gleichungen:



1) $x = a + u\cos\alpha - z\sin\alpha$
2) $y = b + u\sin\alpha + z\cos\alpha.$

Die beiden Werthe für x und y hat man nun in $f(x, y) = 0$ zu substituiren. Da die beiden Ausdrücke für x und y in Bezug auf u und z vom ersten Grade sind, so wird, wenn die Gleichung $f(x, y) = 0$ eine algebraische ist, auch die Gleichung $\varphi(u, z) = 0$ eine algebraische Gleichung von demselben Grade. — Die Grundlage der Gleichungen 1) und 2) bildet die Figur; da man bei dem Ansatze dieser Gleichungen alle Längen als absolute in Rechnung gebracht hat, so muß man in Bezug auf die gegebene Gleichung die Coordinatenrichtungen von x und y in der Figur als die positiven betrachten, in Bezug auf die gesuchte Gleichung aber die von u und z als die positiven. Sollen also etwa in der gesuchten Gleichung die entgegengesetzten Richtungen der Coordinaten ihre positiven Richtungen sein, so muß man in die entstandene Gleichung, oder auch in die Gleichungen 1) und 2), nach §. 415. $-u$ statt u, und $-z$ statt z setzen.

Aufgabe. Es sei ABCD ein Rechteck und K, G, H, F die Mittelpunkte seiner Seiten; die Seite AB sei = 8, die Seite



AD = 6 Einheiten. Betrachtet man AB und AD als die Axen X und Y eines Coordinaten-Systems, so sei die Gleichung einer Linie QP gegeben:

$$y = 4 + \frac{3}{4}x;$$

man soll die Gleichung dieser Linie für folgende Coordinaten-Systeme herleiten:

1) KB sei die Abscissen-Axe, K der Anfangspunkt der Abscissen; die positiven Abscissen sollen die Richtung nach rechts, die positiven Ordinaten nach oben haben.

2) BA sei die Abscissen-Axe, B der Anfangspunkt der Abscissen; die positiven Abscissen sollen die Richtung nach links, die positiven Ordinaten nach oben haben.

3) AD sei die Abscissen-Axe, A der Anfangspunkt der Abscissen; die positiven Abscissen sollen die Richtung nach oben, die positiven Ordinaten nach rechts haben.

4) DA sei die Abscissen-Axe, D der Anfangspunkt der Coordinaten; die positiven Abscissen sollen die Richtung nach unten, die positiven Ordinaten nach links haben.

5) CB sei die Abscissen-Axe, C der Anfangspunkt der Abscissen; die positiven Abscissen sollen die Richtung nach unten, die positiven Ordinaten nach links haben.

6) MH sei die Abscissen-Axe, M der Anfangspunkt der Abscissen; die positiven Abscissen sollen die Richtung nach oben, die positiven Ordinaten nach links haben.

7) DB sei die Abscissen-Axe, D der Anfangspunkt der Abscissen; die positiven Abscissen sollen die Richtung von D nach B hin, die positiven Ordinaten nach rechts haben.

8) AC sei die Abscissen-Axe, A der Anfangspunkt der Abscissen; die positiven Abscissen sollen die Richtung von A nach C hin, die positiven Ordinaten nach links haben.

9) Die Verlängerung von CD über C hinaus sei die Abscissen-Axe, C der Anfangspunkt der Abscissen; die positiven Abscissen sollen die Richtung nach rechts, die positiven Ordinaten nach oben haben.

10) GF sei die Abscissen-Axe, G der Anfangspunkt der Abscissen; die positiven Abscissen sollen die Richtung nach links, die positiven Ordinaten nach unten haben.

Aufl. In allen gesuchten Gleichungen soll u die Abscisse und z die Ordinate sein.

Zu 1) Man erhält $y = z$ und $x = 4 + u$; durch Substitution von x und y in die gegebene Gleichung entsteht:

$$z = 7 + \frac{3}{4}u.$$

Zu 2) Die gesuchte Gleichung wird:

$$z = 10 - \frac{3}{4}u.$$

Zu 3) Man erhält $z = -\frac{16}{3} + \frac{4}{3}u.$

Zu 4) Aus $x = -z$ und $y = 6 - u$ folgt:

$$z = -\frac{8}{3} + \frac{4}{3}u.$$

Zu 5) $z = \frac{16}{3} + \frac{4}{3}u.$

Zu 6) $z = \frac{16}{3} - \frac{4}{3}u.$

Zu 7) Man erhält: 1) $y = 6 - \frac{6}{10}u + \frac{8}{10}z$

2) $x = \frac{8}{10}u + \frac{6}{10}z.$

Setzt man die Werthe von x und y in die gegebene Gleichung ein, so folgt:

$$z = -\frac{40}{7} + \frac{24}{7}u.$$

Zu 8) $z = 3{,}2.$

Zu 9) $z = 4 + \frac{3}{4}u.$

Zu 10) $z = -7 + \frac{3}{4}u.$

Anmerkung. Es soll noch die gegebene Gleichung in eine für schiefwinklige Coordinaten und in eine für Polar-Coordinaten verwandelt werden.

1) Schiefwinklige Coordinaten (§. 183. II.). BC soll die U-Axe, BD die Z-Axe sein, also B der Anfangspunkt der Coordinaten. Die positiven Abscissen (u) sollen die Richtung von B nach C hin, die positiven Ordinaten (z) die Richtung von B nach D hin haben. Man erhält:

1) $y = u + \frac{6}{10}z$

2) $x = 8 - \frac{8}{10}z$, und hieraus:

$$z = \frac{25}{2} - \frac{5}{6}u.$$

2) Polar-Coordinaten (§. 183. III.). Es sei B der Pol, BA die Polar-Axe, α der Polarwinkel und positiv, wenn er oberhalb BA an diese Axe anzutragen ist; r sei der Radius vector. Man erhält:

1) $y = r\sin\alpha$

2) $x = 8 - r\cos\alpha$, und hieraus:

$$r = \frac{40}{4\sin\alpha + 3\cos\alpha}.$$

Für $\alpha = 0$ ist $r = \frac{40}{3}$; für $\alpha = 90^\circ$ ist $r = 10$.

Drittes Kapitel.

Coordinatengleichungen im Raume. Die Ebene. Die gerade Linie im Raume. Die Kugeloberfläche.

§. 439.

Nach §. 398. werden Linien und Flächen durch diophantische Gleichungen zwischen den Coordinaten eines Punktes bestimmt. In der Ebene hat ein Punkt nur zwei Coordinaten x und y; daher hatten wir hier nur den einen Fall: eine Gleichung zwischen den zwei Unbekannten x und y. Im Raume, wo wir Punkte auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System mit den drei Axen X, Y und Z beziehen, hat ein Punkt drei Coordinaten; folglich sind hier zwei Fälle zu unterscheiden:

1) eine Gleichung zwischen den drei Unbekannten x, y und z;

2) zwei Gleichungen zwischen den drei Unbekannten x, y und z.

Ist eine einfache Gleichung zwischen den Coordinaten x, y und z eines Punktes P gegeben, so kann man für zwei derselben, z. B. für x und z, beliebige Werthe setzen; der zugehörige Werth von y ergiebt sich dann aus der Gleichung. Durch x und z ist aber der Fußpunkt B der von P auf die Ebene XZ gefällten Senkrechten bestimmt (vgl. die Figur Seite 242.), denn x und z sind die Coordinaten dieses Punktes B in Bezug auf die Axen OX und OZ; y ist die Länge der Senkrechten. Hieraus folgt, daß man zu jedem Punkte B der Ebene XZ die zugehörige Ordinate PB aus der gegebenen Gleichung berechnen kann, oder: die eine Gleichung zwischen x, y und z bestimmt zu jedem Punkt B der Ebene XZ einen senkrecht über oder unter diesem Punkte befindlichen Punkt P im Raume. Alle diese Punkte P bestimmen wieder, weil sie stetig neben einander liegen, eine ebene oder krumme Fläche. Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man x und y beliebig wählt und z aus der Gleichung bestimmt, oder endlich, wenn man y und z beliebig wählt und x aus der Gleichung berechnet, d. h. wenn man resp. von C oder A zum Punkte P übergeht. Da das Gesagte auf höhere Gleichungen übertragen werden kann, so erkennt man hieraus, daß durch eine Gleichung zwischen den Coor-

binaten x, y und z eines Punktes P eine ebene oder krumme Fläche im Raume bestimmt werden kann; die Gleichung zwischen x, y und z heißt dann die Gleichung dieser Fläche.

Daß nicht jede Gleichung zwischen x, y und z diese Bedeutung zuläßt, folgt daraus, daß nicht jede solche Gleichung zusammengehörige reelle Werthe von x, y und z hat, z. B. die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$. Ueberhaupt möge der Leser das in §. 414. über Coordinatengleichungen in der Ebene Gesagte auf Coordinatengleichungen im Raume übertragen.

Zwei Gleichungen zwischen x, y und z bestimmen eine gerade oder krumme Linie im Raume; das Weitere hierüber folgt in den Lehren dieses Kapitels.

I. Die Ebene.

§. 440.

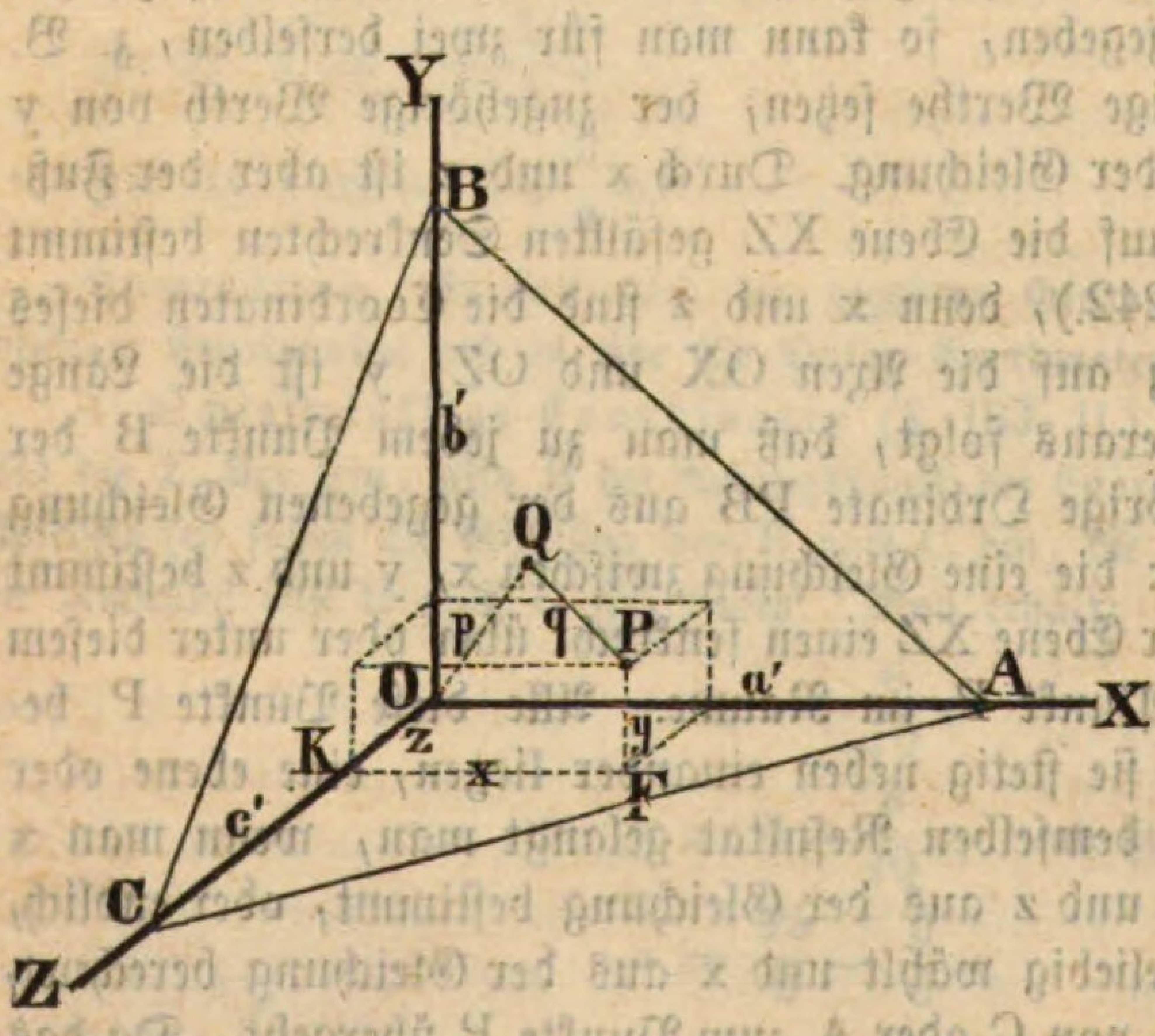
Die Gleichung der Ebene.

Eine Ebene schneide die Axen X, Y und Z eines Coordinaten-Systems in den Endpunkten A, B und C der Coordinaten

$$OA = a', \quad OB = b', \quad OC = c';$$

man soll die Gleichung der Ebene herleiten.

Auflösung 1. P sei ein beliebiger Punkt der Ebene, x, y und z sind seine Coordinaten. Man denke sich vom Durchschnittspunkt der Axen eine Senkrechte OQ = p auf die Ebene ABC gefällt und ihren Fußpunkt Q mit P verbunden (q); die Winkel, welche p mit den Axen X, Y und Z bildet, sollen resp. mit α, β und γ bezeichnet werden. Die Linien p und q schließen mit den Coordinaten PF, FK und KO ein windschiefes Fünfeck OQPFK ein, und



drückt man die Seite p dieses Fünfecks durch die andern Seiten und die Winkel, welche sie mit p bilden, aus, so erhält man nach §. 410.:

(1.) $p = q . \cos pq + y . \cos py + x . \cos px + z . \cos pz.$

Nun ist der Winkel $pq = 90°$; zur Bestimmung der andern Winkel denke man sich durch P, F und K Parallelen mit QO (nicht mit OQ) gelegt; dann erkennt man leicht (§. 259.):

$\measuredangle py = \beta$ (entgegengesetzt parallele Schenkel)
$\measuredangle px = \alpha$ (entgegengesetzt parallele Schenkel)
$\measuredangle pz = \gamma$ (als Wechselwinkel).

Substituirt man diese Winkel in (1.), so entsteht:

(2.) $x . \cos\alpha + y . \cos\beta + z . \cos\gamma = p.$

Denkt man sich ferner Q mit A, B und C durch gerade Linien verbunden, so erhält man aus den entstandenen rechtwinkligen Dreiecken:

$$a' . \cos\alpha = b' . \cos\beta = c' . \cos\gamma = p.$$

Entwickelt man aus diesen Gleichungen $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ und setzt die Werthe in (2.) ein, so folgt

$$x . \frac{p}{a'} + y . \frac{p}{b'} + z . \frac{p}{c'} = p,$$

oder, wenn man durch p hebt:

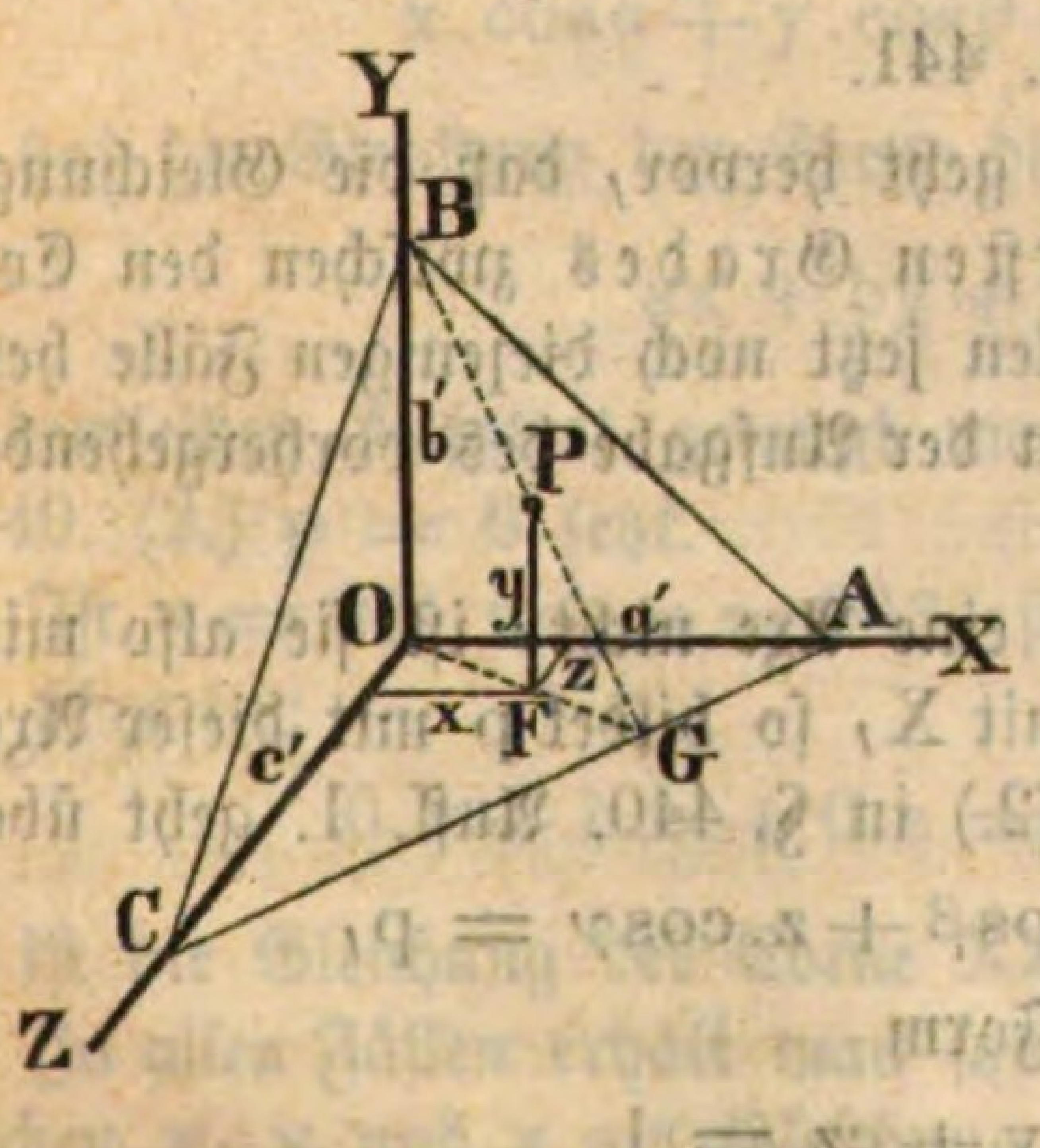
(3.) $$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1.$$

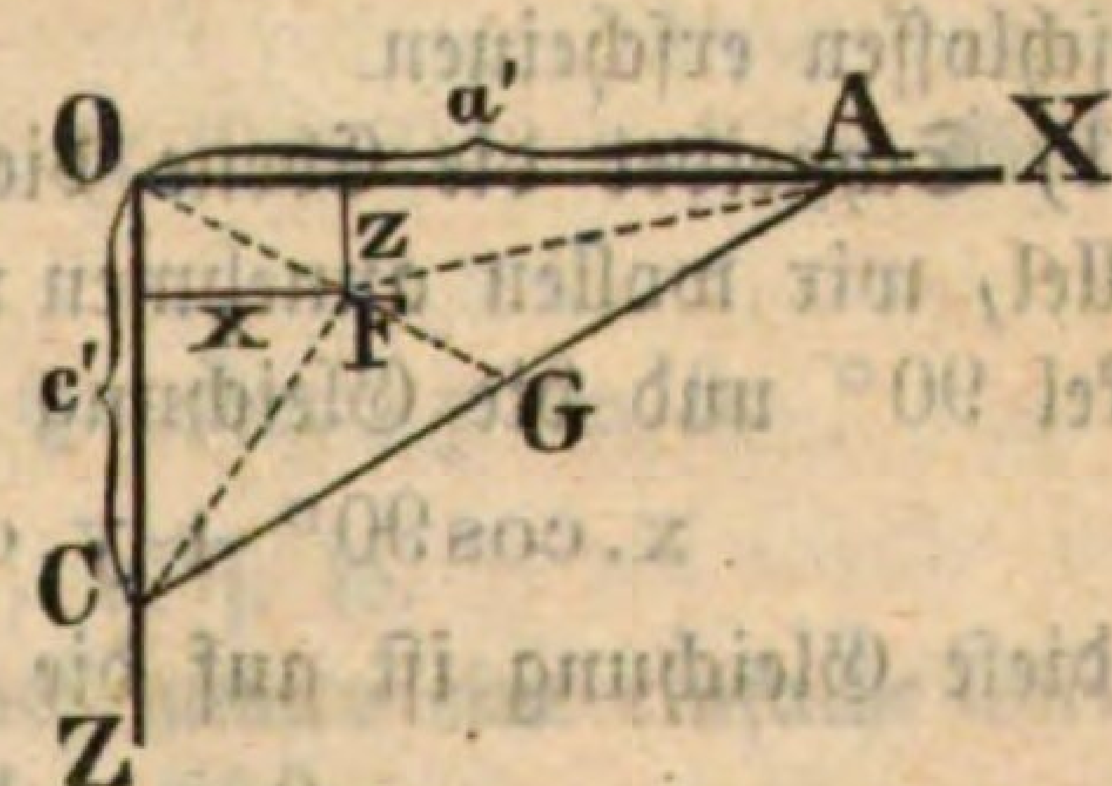
Bezeichnet man die reciproken Werthe der Coordinaten a', b' und c' resp. mit a, b und c, so folgt aus (3.):

(4.) $ax + by + cz = 1,$

und diese Gleichung ist die gesuchte **Gleichung der Ebene** ABC.

Auflösung 2. Die nachfolgende Entwickelung der Gleichung der Ebene schließt sich mehr an die Elemente der Geometrie an. — Es sei P ein beliebiger Punkt der Ebene ABC; man lege durch P





und die Axe Y eine Ebene. Diese Ebene muß durch die Ordinate y (PF) gehen, und sie mag die Ebene ABC in der Linie BG, die Ebene XZ in der Linie OG schneiden. Aus ähnlichen Dreiecken erhält man:

$$b' : y = OG : FG, \text{ daher auch}$$

$$1) \quad b' : b' - y = OG : OF.$$

Verbindet man nun F mit A und C durch gerade Linien, so verhält sich

$$OG : OF = \Delta\, OGA : \Delta\, OFA, \text{ und}$$
$$OG : OF = \Delta\, OGC : \Delta\, OFC.$$

Hieraus folgt (Arithm. §. 44.):

$$2) \quad OG : OF = \Delta\, AOC : \square\, OAFC.$$

Aus 1) und 2) folgt, wenn man für $\Delta\, AOC$ und für $\square\, OAFC$ ihre Inhalte setzt:

$$b' : b' - y = \tfrac{1}{2}a'c' : \tfrac{1}{2}a'z + \tfrac{1}{2}c'x.$$

Hieraus folgt, wenn man hebt und das Product der äußeren Glieder dem der innern gleich setzt:

$$b'c'x + a'b'z = a'b'c' - a'c'y \text{ oder}$$
$$b'c'x + a'c'y + a'b'z = a'b'c'.$$

Dividirt man die Gleichung durch $a'b'c'$, so folgt:

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1.$$

Setzt man endlich $\frac{1}{a'} = a$, $\frac{1}{b'} = b$, $\frac{1}{c'} = c$, so erhält man die Gleichung der Ebene:

$$ax + by + cz = 1.$$

§. 441.

Aus dem vorhergehenden §. geht hervor, daß die Gleichung der Ebene eine Gleichung des ersten Grades zwischen den Coordinaten x, y und z ist. Wir wollen jetzt noch diejenigen Fälle hervorheben, welche nicht unmittelbar in der Aufgabe des vorhergehenden §. eingeschlossen erscheinen.

1) Schneidet die Ebene die eine Axe nicht, ist sie also mit ihr parallel, wir wollen annehmen mit X, so bildet p mit dieser Axe den Winkel 90° und die Gleichung (2.) in §. 440. Aufl. 1. geht über in

$$x.\cos 90° + y.\cos\beta + z.\cos\gamma = p,$$

und diese Gleichung ist auf die Form

$$0.x + by + cz = 1$$

zu bringen. In dieselbe Form geht aber auch die Gleichung (3.) über, wenn man $a' = \infty$ setzt, oder die Gleichung (4.), wenn man $a = 0$ setzt.

Eben so findet man: ist die Ebene mit Y parallel, so ist ihre Gleichung:

$$ax + 0.y + cz = 1,$$

und ist sie mit Z parallel:

$$ax + by + 0.z = 1.$$

Ist die Ebene mit zwei Axen parallel, etwa mit X und Z, so erhält man ihre Gleichung:

$$0.x + 0.y + cz = 1.$$

2) Geht die Ebene durch den Anfangspunkt O der Coordinaten, so ist $a' = b' = c' = 0$ und die Lage der Ebene ist dann durch diese Coordinaten nicht bestimmt. Bezeichnet man aber die Winkel, welche die Ebene mit den Coordinatenebenen YZ, XZ und XY bildet, mit α, β und γ, so läßt sich die Gleichung der Ebene finden. Ein beliebiger Punkt P der Ebene habe die Coordinaten x, y und z; man denke sich in O auf die Ebene eine Senkrechte errichtet, welche bekanntlich dann mit X, Y, Z die Winkel α, β und γ bildet, gebe ihr die Länge p und verbinde ihren Endpunkt mit P. Bezeichnet q die Verbindungslinie und schließen p und q den Winkel φ ein, so erhält man, wie in §. 440. Aufl. 1) aus dem windschiefen Fünfeck, dessen Seiten p, q, y, x und z sind, die Gleichung:

$$p = q.\cos\varphi + y.\cos\beta + x.\cos\alpha + z.\cos\gamma.$$

Es ist aber $q.\cos\varphi = p$; folglich entsteht:

$$x.\cos\alpha + y.\cos\beta + z.\cos\gamma = 0,$$

also hat die Gleichung der Ebene die Form:

$$ax + by + cz = 0.$$

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man in die Gleichung §. 440. (2.) $p = 0$ setzt.

Ist $\alpha = 90^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$, so ist $\beta = 0^\circ$, und die Gleichung geht über in:

$$0.x + b.y + 0.z = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0$$

und ist die Gleichung der Ebene XZ, u. s. w.

In allen Fällen erhält man sonach immer eine einfache Gleichung zwischen x, y und z als Gleichung der Ebene.

§. 442.
Beurtheilung der Lage einer Ebene aus ihrer Gleichung.

Es fragt sich zunächst, ob auch jede Gleichung vom ersten Grade zwischen x, y und z eine Ebene vorstellt. Dies ist der Fall und kann immer dadurch bewiesen werden, daß man eine Ebene bestimmt, deren Gleichung mit der gegebenen identisch ist.

Im Allgemeinen hat jede Gleichung vom ersten Grade zwischen x, y und z die Form:

$$nx + my + pz = q.$$

Dividirt man durch q, so entsteht:

$$\frac{n}{q}x + \frac{m}{q}y + \frac{p}{q}z = 1,$$

und trägt man nun von O aus resp. auf X, Y und Z die Längen $\frac{q}{n}$, $\frac{q}{m}$ und $\frac{q}{p}$ ab, so wird die Gleichung der Ebene, welche durch die Endpunkte dieser Längen geht, nach §. 440. (3.) und (4.) mit der gegebenen Gleichung identisch; daher ist diese Gleichung die Gleichung jener Ebene. — Die Gleichung der Ebene hat drei Constanten $\left(\frac{n}{q}, \frac{m}{q}\right.$ und $\frac{p}{q}$ in der vorstehenden Gleichung$\Big)$, ihre Lage ist also durch drei Bedingungen bestimmt, z. B. dadurch, daß die Ebene durch drei gegebene Punkte gehen soll. Allerdings kann man alle vier Constanten n, m, p, q beliebig wählen, aber man erkennt auch, daß die Lage der Ebene dann nicht von diesen Constanten, sondern nur von dem Verhältniß derselben zu einander abhängig ist. So stellen z. B. die beiden Gleichungen

$$6x + 3y - 4z = 8 \quad \text{und}$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}y - z = 2$$

dieselbe Ebene vor, weil jede dieser Gleichungen sich in die andere verwandeln läßt.

Zur Beurtheilung der Lage einer Ebene aus den Constanten ihrer Gleichung heben wir zuerst die Form hervor:

$$ax + by + cz = 0.$$

Im vorhergehenden §. haben wir gefunden, daß jede durch O gehende Ebene die Form hat:

$$x.\cos\alpha + y.\cos\beta + z.\cos\gamma = 0;$$

können wir also die Gleichung $ax + by + cz = 0$ auf diese Form

bringen, so haben wir die Ebene, welche sie vorstellt, gefunden. Hierzu ist aber nicht allein nöthig, daß a, b und c innerhalb der Grenzen + 1 und — 1 liegen, sondern es muß auch die Summe der Quadrate der drei Constanten gleich 1 sein (§. 404. III.). Dividirt man aber die Gleichung $ax + by + cz = 0$ durch w und wählt w so, daß

$$\left(\frac{a}{w}\right)^2 + \left(\frac{b}{w}\right)^2 + \left(\frac{c}{w}\right)^2 = 1$$

wird, d. h. dividirt man die Gleichung durch

$$w = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

so nimmt sie die Form an:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot z = 0.$$

Bestimmt man jetzt die Winkel α, β und γ so, daß

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

wird, so ist die Gleichung der Ebene, welche durch O geht und die Ebenen YZ, XZ und XY unter den Winkeln α, β und γ schneidet, mit der Gleichung $ax + by + cz = 0$ identisch, und die gegebene Gleichung stellt also diese Ebene vor. — Daß die Ebene durch O geht, folgt schon daraus, daß für $x = y = 0$ auch $z = 0$ wird.

Zur Beurtheilung der Lage aller andern Ebenen legen wir immer die Gleichung zum Grunde:

$$ax + by + cz = 1.$$

Die Lage der Ebene ist bestimmt, wenn man die Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte mit den Axen kennt. Bezeichnen wir die Entfernungen (Coordinaten) der Durchschnittspunkte mit den Axen X, Y und Z von O resp. mit x_0, y_0 und z_0, so findet man zunächst x_0 durch folgende Betrachtung. Es bezeichnen x, y und z die Entfernungen jedes Punktes der Ebene von den Coordinatenebenen YZ, XZ und XY. Der Punkt der Ebene, in welchem sie die X-Axe schneidet, hat aber von XZ und von XY den Abstand Null; setzt man daher $y = 0$ und $z = 0$, so erhält man aus der gegebenen Gleichung

$$a \,.\, x_0 = 1,\ \text{folglich}\ x_0 = \frac{1}{a}.$$

Da man auf dieselbe Weise y_0 und z_0 finden kann, so folgt:

1. Die Durchschnittspunkte der Ebene mit den Axen:

$$x_0 = \frac{1}{a},\quad y_0 = \frac{1}{b},\quad z_0 = \frac{1}{c}.$$

Dasselbe Resultat kann man auch aus §. 440. (3.) und (4.) folgern.

Um die Linie zu finden, in welcher die Ebene eine der Coordinatenebenen schneidet, z. B. die Ebene XZ, hat man alle Punkte zu suchen, welche von dieser Ebene den Abstand Null haben, d. h. man hat in die gegebene Gleichung $y = 0$ zu setzen. Man erhält $ax + cz = 1$, und alle Punkte der Ebene XZ, welche dieser Gleichung genügen, sind auch Punkte der gegebenen Ebene. Diese Gleichung ist aber die Gleichung einer geraden Linie, also des Grundschnittes der gegebenen Ebene in der Coordinatenebene XZ (der Linie AC in der Figur zu §. 440.). Auf dieselbe Weise kann man die andern Grundschnitte finden und erhält:

II. Die Grundschnitte in den Coordinatenebenen:

in YZ: $by + cz = 1$
in XZ: $ax + cz = 1$
in XY: $ax + by = 1$.

Aus §. 411. Aufg. 1. ergiebt sich ferner:

III. Die Winkel, welche die Ebene mit YZ, XZ und XY bildet:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

IV. Die Entfernung p der Ebene von dem Durchschnittspunkt O der Coordinatenaxen:

$$p = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Anmerk. Die Lage der Ebene $ax + by + cz = 1$, wenn eine Constante oder zwei Constanten gleich Null sind, ergiebt sich aus dem vorhergehenden §.

§. 443.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Ein Punkt P ist durch seine Coordinaten $x = p$, $y = q$ und $z = r$ gegeben; man soll die Gleichung jeder Ebene bestimmen, welche durch P geht.

Aufl. $a(x - p) + b(y - q) + c(z - r) = 0$, oder, da man durch a dividiren kann:

$$x - p + b'(y - q) + c'(z - r) = 0,$$

so daß die Gleichung nur noch zwei beliebig zu bestimmende Constanten hat. — Die Gleichung $ax + by + cz = 1$ muß richtig werden, wenn man $x = p$, $y = q$ und $z = r$ setzt. Zieht man die neue Gleichung von der gegebenen ab, so erhält man die oben angegebene Gleichung.

Aufgabe 2. Ein Punkt P ist durch $x = 1$, $y = 1$ und $z = 1$ gegeben, ein zweiter Punkt Q durch $x = 3$, $y = 4$ und $z = 2$;

man soll die Gleichung jeder Ebene bestimmen, welche durch P und Q geht.

Aufl. $(3-2c)x+(c-2)y+cz=1$, so daß c beliebig zu bestimmen bleibt.

Aufgabe 3. Drei Punkte P, Q und R sind durch ihre Coordinaten x, y, z gegeben, P durch $x=2$, $y=3$, $z=3$, Q durch $x=3$, $y=2$, $z=1$ und R durch $x=y=z=4$; man soll die Gleichung der Ebene PQR bestimmen.

Aufl. $x-5y+3z+4=0$.

Aufgabe 4. In welchen Punkten schneidet die Ebene $4x-3y+2z+12=0$ die Axen und unter welchen Winkeln die Coordinatenebenen?

Antw. $x_0=-3$, $y_0=+4$, $z_0=-6$; $\alpha=137^\circ\ 58'\ 8''$; $\beta=56^\circ\ 8'\ 44''$; $\gamma=111^\circ\ 48'\ 5''$.

Aufgabe 5. Die Lage der Ebene $2x+0.y-6z=1$ zu bestimmen.

Aufl. Die Ebene steht auf der Coordinatenebene XZ senkrecht; $x_0=\frac{1}{2}$, $z_0=-\frac{1}{6}$.

Aufgabe 6. Die Lage der Ebene $0.x+\frac{1}{3}y+0.z=1$ anzugeben.

Aufl. Die Ebene ist mit der Ebene XZ parallel und schneidet die Y-Axe im Endpunkt der Ordinate $y_0=3$.

Aufgabe 7. Die Lage der Ebene $4x-4y+7z=0$ anzugeben.

Aufl. Die Ebene geht durch den Durchschnittspunkt der Axen und schneidet die Coordinatenebenen unter den Winkeln: $\alpha=63^\circ\ 36'\ 44''$, $\beta=116^\circ\ 23'\ 16''$ $\gamma=38^\circ\ 56'\ 33''$.

Aufgabe 8. Die Grundschnitte der Ebene zu bestimmen:

$$4y-6x+9z-12=0.$$

Aufl. In YZ: $z=\frac{4}{3}-\frac{4}{9}y$;

in XZ: $z=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}x$;

in XY: $y=3+\frac{3}{2}x$.

Aufgabe 9. In welcher Region liegt die Ebene

$$3x+4y-6z-12=0?$$

Antw. In der fünften Region.

Aufgabe 10. Es ist die Ebene gegeben:

$$12x - 8y - 9z + 4 = 0;$$

man soll bestimmen:

1) ihre Durchschnittspunkte mit den Axen;
2) die Gleichungen der Grundschnitte;
3) die Winkel α, β und γ, welche die Ebene mit den Coordinatenebenen bildet, und die Winkel α', β' und γ', welche sie mit den Axen bildet;
4) die Region, in welcher die Ebene liegt, und den Inhalt des Dreiecks, welches sie in dieser Region erzeugt;
5) die Länge der Senkrechten p, welche man von O auf die Ebene fällen kann;
6) die Coordinaten des Fußpunktes dieser Senkrechten.

Aufl. Zu 1) $x_0 = -\frac{1}{3}$, $y_0 = +\frac{1}{2}$, $z_0 = +\frac{4}{9}$.

Zu 2) Der Grundschnitt in XY: $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$

» » » XZ: $z = \frac{4}{9} + \frac{4}{3}x$

» » » YZ: $z = \frac{4}{9} - \frac{8}{9}y$.

Zu 3) $\alpha = 134^\circ\ 54'\ 3''$; $\alpha' = 44^\circ\ 54'\ 3''$
$\beta = 61^\circ\ 55'\ 39''$; $\beta' = 28^\circ\ 4'\ 21''$
$\gamma = 58^\circ\ 2'\ 3{,}4''$; $\gamma' = 31^\circ\ 57'\ 56{,}6''$.

(Vergl. §. 402. Anmerk.)

Zu 4) Die Ebene liegt in der zweiten Region, und der Inhalt des Dreiecks ist gleich $\frac{17}{108}$ □-Einheiten.

Zu 5) $p = \frac{4}{17}$ Einheiten.

Zu 6) $x_1 = -\frac{48}{289}$, $y_1 = \frac{32}{289}$, $z_1 = \frac{36}{289}$.

§. 444.

Zwei Ebenen.

Bei der Untersuchung über die Lage zweier Ebenen zu einander kommt es hauptsächlich darauf an, zu bestimmen, ob sie parallel sind, oder nicht, im ersten Falle aber ihren Abstand von einander, im zweiten den Winkel, unter welchem sie sich schneiden, und die Linie, in der sie sich schneiden, zu finden. Wir wollen unserer Untersuchung die beiden Ebenen zum Grunde legen:

$$(1.)\quad ax + by + cz = 1$$
$$(2.)\quad a'x + b'y + c'z = 1.$$

1) Sind die Ebenen parallel, so müssen auch ihre Grundschnitte in jeder Coordinatenebene parallel sein; umgekehrt folgt die Parallelität der Ebenen aus der Parallelität ihrer Grundschnitte in zwei Coordinatenebenen. Nun sind aber die Grundschnitte in der Ebene XY (wenn man $z = 0$ setzt):

$$y = \frac{1}{b} - \frac{a}{b}x \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{b'} - \frac{a'}{b'}x,$$

und in der Ebene XZ (wenn man $y = 0$ setzt):

$$z = \frac{1}{c} - \frac{a}{c}x \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{c'} - \frac{a'}{c'}x,$$

und aus der Parallelität dieser Grundschnitte folgt (§. 423. I.):

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{und} \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \quad \text{oder:}$$

$$a : b : c = a' : b' : c',$$

d. h. zwei Ebenen sind parallel, wenn die (constanten) Coefficienten von x, y und z in den Gleichungen beider Ebenen proportional sind, nämlich:

$$\text{I.} \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Findet aber die vorstehende laufende Proportion Statt, so kann man die Gleichung $a'x + b'y + c'z = 1$ durch Multiplication mit einer Zahl $\left(\frac{a}{a'}\right)$ immer so umformen, daß die Constanten a', b' und c' resp. in a, b und c übergehen, und bezeichnet man diese Zahl mit n, so erhält die Gleichung dann die Form

$$ax + by + cz = n.$$

Hieraus folgt: Sind zwei Ebenen parallel, so lassen sie sich immer auf die Form bringen:

$$\text{II.} \quad \begin{cases} ax + by + cz = 1 \quad \text{und} \\ ax + by + cz = n, \end{cases}$$

und umgekehrt: zwei Ebenen sind parallel, wenn sie sich auf diese Form bringen lassen, sonst nicht. — Leicht erkennt man auch, daß beide Ebenen in derselben Region liegen, wenn n positiv ist, aber in entgegengesetzten Regionen, wenn n negativ ist. — Hieraus folgt noch: wenn man in der Gleichung einer Ebene

$$ax + by + cz = 1$$

die Constante 1 stetig ändert, aber a, b und c unverändert läßt, so rückt die Ebene parallel mit ursprünglicher Lage im Raume fort.

Um den Abstand p zweier parallelen Ebenen von einander zu finden, denken wir uns dieselben auf die Form in II. gebracht. Wir finden dann p, wenn wir ihre Abstände vom Durchschnittspunkt O der Coordinatenaxen von einander abziehen, oder zu einander addiren, je nachdem die Ebenen in derselben Region oder in entgegengesetzten Regionen liegen. Da aber bei der zweiten Lage n negativ ist, so ist in jedem Falle (§. 442. IV.)

der Abstand der parallelen Ebenen von einander:

$$\text{III.} \quad p = \frac{1 - n}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ergiebt sich p negativ, so ist das absolute Glied des gefundenen Ausdrucks die gesuchte Entfernung.

2) Sind zwei Ebenen

$$(1.) \quad ax + by + cz = 1$$

$$(2.) \quad a'x + b'y + c'z = 1$$

nicht parallel, und bilden sie mit den Coordinatenebenen YZ, XZ, XY resp. die Winkel α und α', β und β', γ und γ', so ist der Winkel φ, unter dem sie sich schneiden, nach §. 407. aus der Gleichung zu berechnen:

$$\cos\varphi = \cos\alpha . \cos\alpha' + \cos\beta . \cos\beta' + \cos\gamma . \cos\gamma'.$$

Nach §. 442. III. findet man daher:

$$\text{IV.} \quad \cos\varphi = \frac{a . a' + b . b' + c . c'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} . \sqrt{(a')^2 + (b')^2 + (c')^2}}.$$

Da $\varphi = 90°$ wird, wenn $\cos\varphi = 0$ ist, so folgt noch:

Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn:

$$\text{V.} \qquad a . a' + b . b' + c . c' = 0$$

ist. — Ueber die Linie, in welcher sich die Ebenen schneiden, enthält der nächste §. das Nöthige. — Beispiele folgen in §. 448.

II. Die gerade Linie im Raume.

§. 445.

Die gerade Linie im Raume als Durchschnittslinie zweier Ebenen. Bestimmung derselben durch die Gleichungen ihrer Projectionen.

Wenn zwei Ebenen nicht parallel sind, z. B.

$$1) \quad 2x - 5y + z + 7 = 0$$

$$2) \quad x - y + 2z - 7 = 0,$$

so schneiden sie sich in einer geraden Linie. Jeder Punkt dieser Linie hat dann drei Coordinatenwerthe x, y und z, welche beiden Gleichungen genügen müssen; folglich können die beiden Gleichungen 1) und 2) zur Bestimmung jener geraden Linie im Raume dienen (der Durchschnittslinie beider Ebenen), wenn festgesetzt wird, daß nur die Coordinatenwerthe Gültigkeit haben sollen, welche beiden Gleichungen genügen. Setzt man nun etwa in beide Gleichungen

$$x = 1 \quad \text{und} \quad z = 2$$

ein, so erhält man

$$\text{aus 1): } \quad y = 2\tfrac{1}{5}, \qquad \text{aus 2): } \quad y = -2;$$

folglich gehört zu x = 1 und z = 2 kein Punkt der Durchschnittslinie beider Ebenen. Nun ist durch x = 1 und z = 2 ein Punkt der Ebene XZ bestimmt, und senkrecht über diesem Punkte liegt daher zwar ein Punkt jeder Ebene, aber kein gemeinschaftlicher Punkt, also kein Punkt der Durchschnittslinie, weil die Werthe von y verschieden sind ($y = 2\frac{1}{5}$ und $y = -2$). Setzt man hingegen in die Gleichungen 1) und 2)

$$x = 5 \quad \text{und} \quad z = 3$$

ein, so folgt aus jeder Gleichung

$$y = 4;$$

folglich liegt senkrecht über dem Punkte der Ebene XZ, welcher die Coordinaten x = 5 und z = 3 hat, ein Punkt der Durchschnittslinie beider Ebenen.

Man erkennt hieraus, daß durch die Gleichungen 1) und 2) eine gerade Linie im Raume völlig bestimmt ist, daß man aber noch eine Methode aufsuchen muß, durch welche sich alle Punkte der Linie leicht und sicher ergeben. Zu diesem Zwecke bestimmt man zunächst die zusammengehörigen Werthe zweier Coordinaten, z. B. x und z, welche immer einem Punkte jener Linie angehören, d. h. man stellt die Frage: für welche Werthe von x und z ergeben sich aus 1) und 2) gleiche Werthe für y? Es folgt aber

$$\text{aus 1): } \quad y = \frac{2x + z + 7}{5}$$

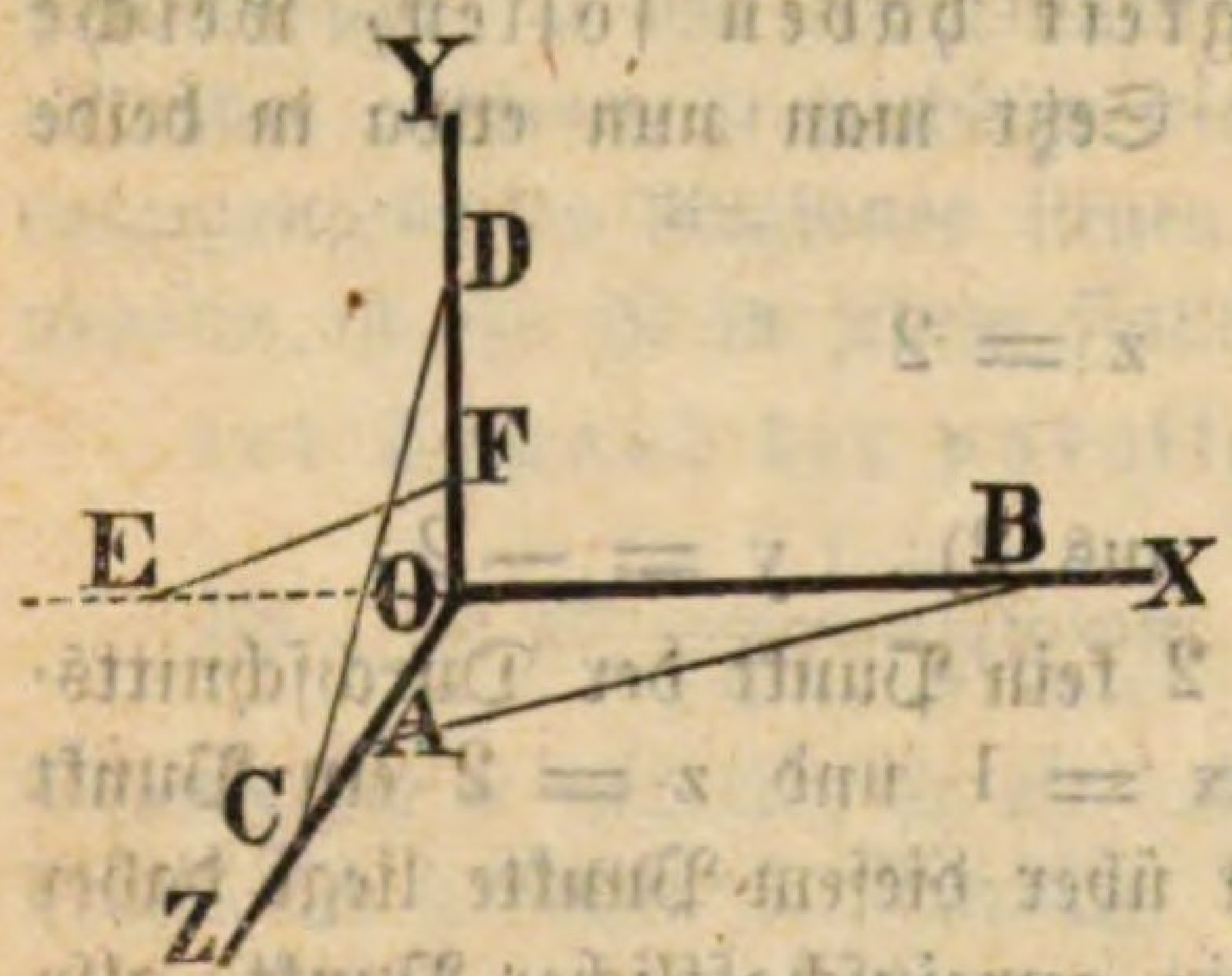
$$\text{aus 2): } \quad y = x + 2z - 7;$$

daher muß $\frac{2x + z + 7}{5} = x + 2z - 7$ sein, oder

$$\text{I.} \quad x + 3z - 14 = 0.$$

Alle Werthe von x und z, welche dieser Gleichung entsprechen, geben also, in 1) und 2) gesetzt, gleiche Werthe für y. Nun ist aber

$x + 3z - 14 = 0$ die Gleichung einer geraden Linie in der Ebene XZ, nämlich der Linie AB, wenn $OB = 14$ und $OA = \frac{14}{3}$ ist, denn die Coordinaten x und z jedes Punktes dieser Linie genügen der Gleichung I. Hieraus folgt, daß senkrecht über (oder unter) jedem Punkte der Linie AB ein Punkt der Linie im Raume liegt, welche durch die Gleichungen 1) und 2) gegeben ist, d. h. die Linie AB ist die Projection der Linie im Raume auf die Ebene XZ, und die Gleichung



$$x + 3z - 14 = 0$$

ist die Gleichung dieser Projection.

Aus dem Vorstehenden folgt nun: Ist eine Linie im Raume durch die Gleichungen zweier Ebenen gegeben, welche sich in der Linie schneiden, und eliminirt man y aus beiden Gleichungen, so erhält man die Gleichung der Projection der Linie im Raume auf die Ebene XZ.

Auf dieselbe Weise findet man aber auch die Projection der Linie im Raume auf die Ebene YZ, wenn man x aus 1) und 2) eliminirt; man erhält:

$$\text{II.} \quad y + z - 7 = 0.$$

In der Figur ist CD diese Projection, wenn man $OC = 7$ und $OD = 7$ macht.

Endlich findet man die Projection der Linie im Raume auf die Ebene XY, wenn man z aus den Gleichungen 1) und 2) eliminirt; es entsteht:

$$\text{III.} \quad x - 3y + 7 = 0.$$

In der Figur ist EF diese Linie, wenn man $OE = 7 (x_0 = -7)$ und $OF = \frac{7}{3}$ macht. Dieselbe Gleichung entsteht aber auch aus I. und II., wenn man z aus diesen Gleichungen eliminirt.

Die Gleichungen I., II. und III. sind von einander nicht unabhängig; durch zwei derselben ist die Linie im Raume vollkommen bestimmt, und zwar einfacher und klarer, als durch die beiden Ebenen, deren Durchschnittslinie sie ist. Aus diesem Grunde giebt man auch gewöhnlich die Linie im Raume durch die Gleichungen ihrer Projectionen auf zwei Coordinatenebenen, oder man sucht diese Gleichungen zunächst auf, wenn die Gleichungen der Ebenen gegeben sind, und beurtheilt aus

den Gleichungen der Projectionen die Lage der Linie. — Bemerkt sei noch, daß dieselbe Linie im Raume durch unendlich viele Paare von Ebenen gegeben sein kann; aus jedem Paare entstehen aber dieselben Gleichungen für ihre Projectionen.

§. 446.
Zusatz.

Das im vorhergehenden §. Gesagte gilt auch von der Durchschnittslinie beliebiger ebener und krummer Flächen im Raume. Sind zwei beliebige Flächen im Raume gegeben:

$$1)\ f(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad 2)\ \varphi(x, y, z) = 0,$$

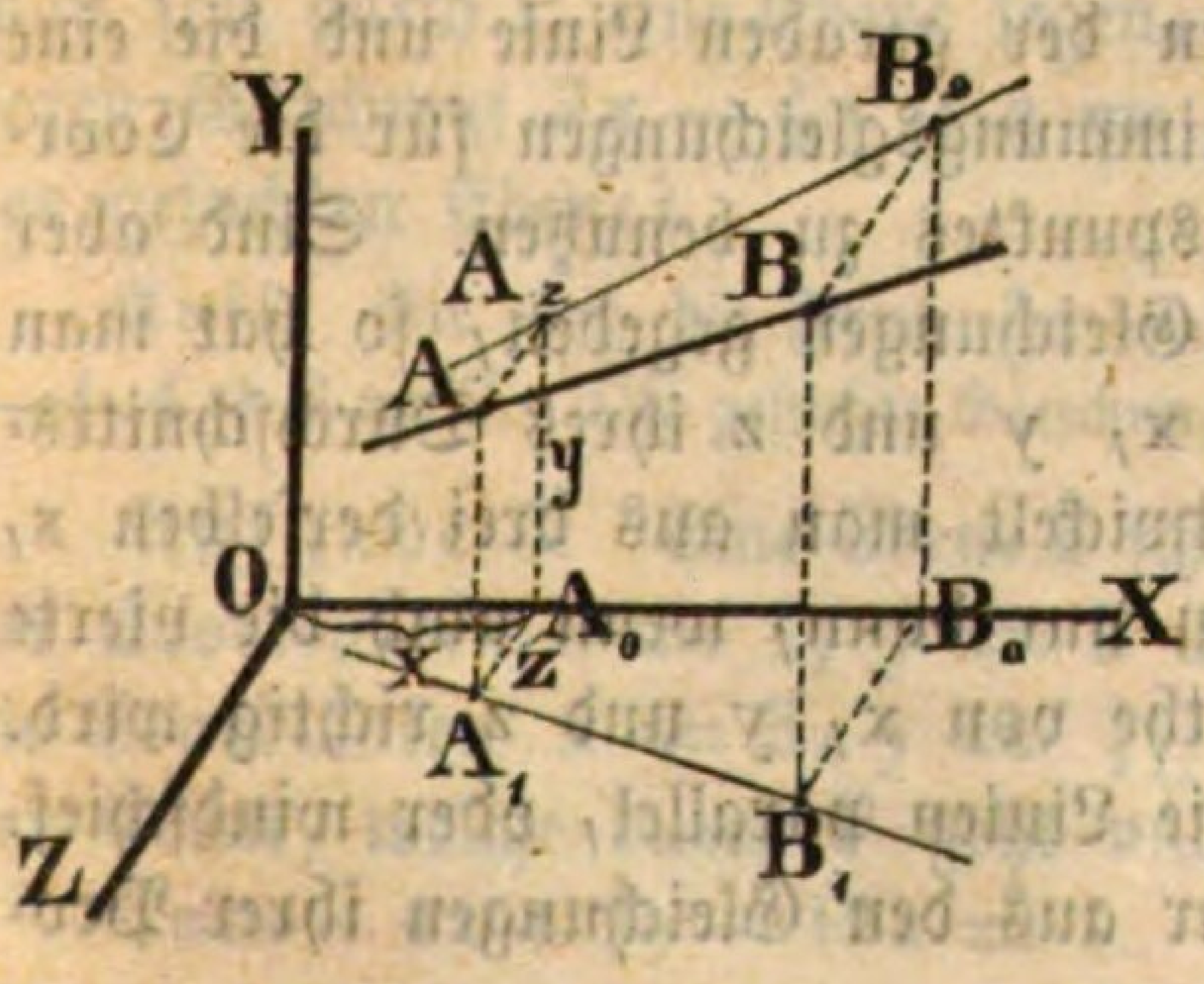
so sind diese Gleichungen die Gleichungen ihrer geraden oder krummen Durchschnittslinie, wenn man sie als zusammengehörig, d. h. als zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, betrachtet. Je nachdem man aus beiden Gleichungen x, y oder z eliminirt, erhält man die Gleichung der Projection der Linie auf die Ebene YZ, XZ oder XY.

§. 447.
Beurtheilung der Lage der geraden Linie im Raume aus den Gleichungen ihrer Projectionen.

Die Linie im Raume mag durch die Gleichungen ihrer Projectionen auf die Ebenen XY und XZ gegeben sein:

$$(1.)\quad y = a + bx.$$
$$(2.)\quad z = c + dx.$$

1) Zunächst findet man aus diesen Gleichungen die zusammengehörigen Coordinatenwerthe jedes Punktes der Linie (AB) im Raume. Man setzt für eine Ordinate, etwa für x, einen beliebigen Werth (OA_0) und findet dann den zugehörigen Werth für y aus (1.) und für z aus (2.); x, y und z sind die Coordinaten des Punktes A der Linie AB. Denn zunächst sind x und y die Coordinaten eines Punktes (A_2) der Projection A_2B_2 der Linie AB auf die Ebene XY; da aber $AA_1 = A_2A_0$ ist [§. 377. (1.)], so ist auch y der Abstand des Punktes A von der Ebene XZ. Eben so bestimmen x und z zunächst einen Punkt (A_1) der Projection A_1B_1 der Linie AB auf die Ebene XZ; aber weil $AA_2 = A_1A_0$ ist, so ist z der Abstand des Punktes A von der Ebene XY. Endlich ist noch x



der Abstand des Punktes A von der Ebene YZ; folglich sind x, y und z die zusammengehörigen Coordinatenwerthe des Punktes A der Linie AB.

2) Man findet ferner die Projection der Linie im Raume auf die Ebene YZ, wenn man x aus beiden Gleichungen eliminirt:

$$(3.)\quad y = \frac{ad - bc}{d} + \frac{b}{d}z.$$

3) Um den Durchschnittspunkt der Linie im Raume mit einer Coordinatenebene zu finden, geht man davon aus, daß seine Entfernung von dieser Ebene gleich Null ist, daß aber eine der Coordinaten x, y, z diese Entfernung ist.

Man setzt also x, oder y, oder z gleich Null, je nachdem der Durchschnittspunkt mit der Ebene YZ, oder XZ, oder XY gesucht wird, und berechnet aus (1.) und (2.) die beiden andern Coordinatenwerthe. Man erhält die Coordinaten des Durchschnittspunktes mit der Ebene YZ: $x = 0,\ y = a,\ z = c;$

$$\text{mit XZ:}\quad y = 0,\ x = -\frac{a}{b},\ z = c - \frac{ad}{b};$$

$$\text{mit XY:}\quad z = 0,\ x = -\frac{c}{d},\ y = a - \frac{bc}{d}.$$

4) Die Winkel, welche die Linie im Raume mit den Axen des Coordinaten-Systems bildet, findet man aus den Coordinaten zweier Punkte der Linie nach §. 405. II. bis IV.; man kann zu diesen Punkten die Durchschnittspunkte der Linie mit zwei Coordinatenebenen wählen. Aus den Coordinaten solcher zwei Durchschnittspunkte findet man auch die Länge des Theiles der Linie, welcher zwischen zwei Coordinatenebenen liegt.

Anmerkung. Will man den Punkt finden, in welchem eine Linie im Raume eine Ebene schneidet, deren Gleichung gegeben ist, so hat man die beiden Gleichungen der geraden Linie und die eine Gleichung der Ebene als drei Bestimmungsgleichungen für die Coordinaten des gesuchten Durchschnittspunktes zu benutzen. Sind aber zwei Linien im Raume durch ihre Gleichungen gegeben, so hat man zur Bestimmung der Coordinaten x, y und z ihres Durchschnittspunktes vier Gleichungen, und entwickelt man aus drei derselben x, y und z, so schneiden sich die Linien nur dann, wenn auch die vierte Gleichung für die gefundenen Werthe von x, y und z richtig wird. Ist dies nicht der Fall, so sind die Linien parallel, oder windschief. Ob sie parallel sind, ist unmittelbar aus den Gleichungen ihrer Pro-

jectionen zu erkennen, weil diese Projectionen auch parallel sein müssen; sind sie nicht parallel (in zwei Coordinatenebenen), so sind die Linien windschief.

§. 448.

Uebungs-Aufgaben über Ebenen und gerade Linien im Raume.

Aufgabe 1. Zwei Ebenen sind durch ihre Gleichungen gegeben:

1) $6x - 3y + 4z - 6 = 0$
2) $12x - 6y + 8z + 15 = 0$;

woran erkennt man, daß die Ebenen parallel sind, und wie weit sind sie von einander entfernt?

Antw. Sie sind parallel, weil die Coefficienten von x, y und z proportional sind, oder weil ihre Gleichungen sich auf die Form bringen lassen:

1) $x - \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z = 1$
2) $x - \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z = -\frac{5}{4}$.

Ihre Entfernung von einander ist gleich

$$\frac{1 + \frac{5}{4}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{4}{9}}} = \frac{27}{2\sqrt{61}} = 1{,}728498.$$

Aufgabe 2. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Ebenen

1) $3x - 2y + 4z = 1$
2) $2x + 4y + \frac{1}{2}z = 1$?

Antw. Unter einem rechten Winkel.

Aufgabe 3. Eine Ebene F schneidet die Axen X, Y und Z in den Endpunkten der Coordinaten $x = \frac{1}{2}$, $y = 3$, $z = \frac{1}{4}$; man soll die Gleichung der Ebene bestimmen, welche durch O geht und mit der Ebene F parallel ist.

Aufl. $2x + \frac{1}{3}y + 4z = 0$.

Aufgabe 4. Ein Punkt P hat die Coordinaten $x=2$, $y=4$, $z=3$; man soll durch P eine Ebene legen, welche mit der Ebene parallel ist, deren Gleichung $3x - \frac{1}{2}y + z = 1$ heißt. Welche Gleichung ist die der gesuchten Ebene?

Aufl. Sie hat die Form $3x - \frac{1}{2}y + z = n$, und es ist $n = 3.2 - \frac{1}{2}.4 + 3 = 7$. Die gesuchte Gleichung heißt also: $\frac{3}{7}x - \frac{1}{14}y + \frac{1}{7}z = 1$.

Aufgabe 5. Eine Ebene F schneidet die Axen in den Endpunkten der Coordinaten $x = 1$, $y = 2$ und $z = -\frac{1}{3}$, ein Punkt P hat die Coordinaten $x = 3$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 1$; wie heißt die Gleichung der Ebene, welche durch P geht und mit der Ebene F parallel ist?

Antw. $4x + 2y - 12z = 1$.

Aufgabe 6. Es sind zwei Punkte P und P' durch ihre Coordinaten gegeben: P durch $x = 3$, $y = 2$ und $z = 1$, P' durch $x = 2$, $y = 4$ und $z = 3$, und eine Ebene F durch ihre Gleichung: $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y - 2z = 1$; man soll die Gleichung der Ebene bestimmen, welche durch P und P' geht und auf der Ebene F senkrecht steht.

Aufl. Die gesuchte Gleichung hat die Form

$$ax + by + cz = 1.$$

Zur Bestimmung der Constanten a, b, c hat man die drei Gleichungen:

$$1)\ \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{3}b - 2c = 0 \text{ (§. 444. V.)}$$
$$2)\ 3a + 2b + c = 1$$
$$3)\ 2a + 4b + 3c = 1.$$

Man erhält die Gleichung der gesuchten Ebene:

$$\tfrac{28}{107}x + \tfrac{9}{107}y + \tfrac{5}{107}z = 1.$$

Aufgabe 7. Zwei Punkte P und P' sind durch ihre Coordinaten gegeben: P durch $x = 1$, $y = 1$ und $z = -1$, P' durch $x = -1$, $y = -3$ und $z = 3$, und eine Ebene F durch ihre Gleichung: $x + 2y - 2z = 1$; man soll die Gleichung der Ebene finden, welche durch P und P' geht und auf der Ebene F senkrecht steht.

Aufl. Zur Bestimmung der Constanten erhält man drei Gleichungen, die nicht von einander unabhängig sind; die eine Constante bleibt daher unbestimmt. Man erhält die Gleichung der gesuchten Ebene:

$$2x + b.y + (b+1).z = 1,$$

und für b kann jede beliebige Zahl gesetzt werden. Hieraus folgt aber, daß die Linie PP' die Ebene F senkrecht schneidet. — Um die Richtigkeit dieser Eigenschaft der Linie PP' zu prüfen, kann man das Gesetz §. 390. anwenden, nach welchem die Projection von PP' auf die Ebene XY den Grundschnitt der Ebene F in der Ebene XY senkrecht schneiden muß. Man findet aber die Gleichung

der Projection: $y = -1 + 2x$

des Grundschnitts: $y = +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$;

diese Linien stehen nach §. 423. V. auf einander senkrecht. Eben so kann man in Bezug auf die beiden anderen Coordinatenebenen verfahren.

Aufgabe 8. Zwei Punkte P und P' sind durch ihre Coordinaten gegeben: P durch $x = 1$, $y = 2$ und $z = 1$, P' durch $x = 3$, $y = 1$ und $z = 2$, eine Ebene F durch ihre Gleichung: $x + y + z = 1$; man soll die Gleichung der Ebene bestimmen, welche durch P und P' geht und auf der Ebene F senkrecht steht.

Aufl. $2x + y - 3z = 1$.

Aufgabe 9. Es sind zwei Ebenen gegeben:

$$1)\ \tfrac{1}{2}x - y + \tfrac{1}{2}z = 1$$
$$2)\ \tfrac{1}{4}x + y + \tfrac{1}{5}z = 1;$$

unter welchem Winkel φ schneiden sich diese Ebenen?

Antw. $\varphi = 127^\circ\ 3'\ 36{,}3''$.

Aufgabe 10. Zwei Ebenen sind durch ihre Gleichungen gegeben:

1) $2x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1$

2) $3x + y - \frac{1}{2}z = 1$;

man soll die Durchschnittslinie beider Ebenen durch die Gleichungen ihrer Projectionen bestimmen.

Aufl. Man erhält die Gleichung der Projection

auf XY: $y = 10 - 24x$
auf XZ: $z = 18 - 42x$
auf YZ: $y = -\frac{2}{7} + \frac{4}{7}z$.

Von diesen Gleichungen bestimmen zwei beliebige die Durchschnittslinie der gegebenen Ebenen.

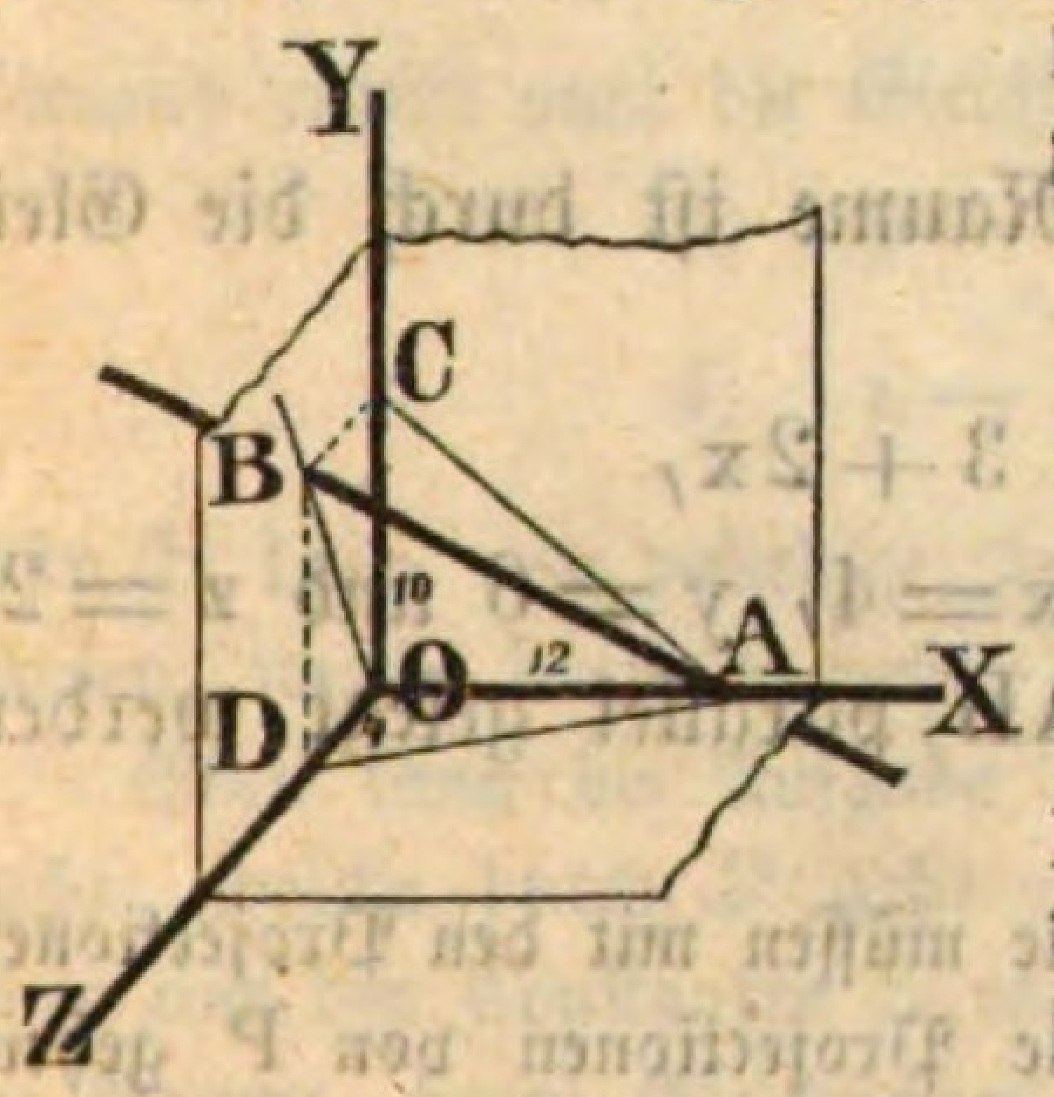
Aufgabe 11. Eine Linie im Raume ist durch die Gleichungen ihrer Projectionen auf zwei Coordinatenebenen gegeben:

1) $6y + 5x - 60 = 0$

2) $3z + x - 12 = 0$;

man soll die Lage der Linie bestimmen.

Aufl. Die Lage ergiebt sich am einfachsten aus den Durchschnittspunkten der Linie mit den Coordinatenebenen. Man findet die Coordinaten des Durchschnittspunktes



mit XY: $x = 12$, $y = 0$
mit XZ: $x = 12$, $z = 0$
mit YZ: $y = 10$, $z = 4$.

Die Linie geht also durch die X-Axe; ihre Projectionen auf die Coordinatenebenen sind AC, AD und OB; die Gleichung der Projection auf YZ heißt $5z - 2y = 0$.

Aufgabe 12. Eine Linie im Raume ist durch die Gleichungen gegeben:

1) $2x + 3y = 6$ und 2) $5x - 3z = -3$;

man soll die Länge der Theile dieser Linie finden, welche zwischen den Coordinatenebenen liegen.

Aufl. Die Linie schneide die Ebene XZ in P, YZ in P′ und XY in P″, so findet man:

$PP' = 6{,}164414$; $P'P'' = 1{,}232883$; $PP'' = 7{,}397297$.

Aufgabe 13. Eine Linie im Raume ist durch folgende Gleichungen gegeben:

1) $y = -2 + \frac{3}{2}x$ und 2) $z = -\frac{5}{2} + \frac{5}{4}x$;

man soll die Winkel α, β und γ berechnen, welche die Linie mit den Axen X, Y und Z bildet.

Aufl. $\alpha = 62^\circ 52' 51''$; $\beta = 46^\circ 51' 41{,}6''$; $\gamma = 55^\circ 15' 48{,}7''$. — Bei der Berechnung ist die Richtung der Linie im Raume von ihrem Durchschnittspunkt mit XZ nach ihrem Durchschnittspunkt mit XY hin zum Grunde gelegt worden. Zur Controle bei der Ausrechnung sei bemerkt, daß $\cos\beta = \frac{6}{\sqrt{77}}$ wird.

Aufgabe 14. Eine Linie im Raume ist durch folgende Gleichungen gegeben:

$$1)\ y = 5 - x \quad \text{und} \quad 2)\ z = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x;$$

welche Winkel bildet die Linie mit den Axen?

Antw. $\alpha = 131^\circ 48' 37''$; $\beta = 48^\circ 11' 23''$; $\gamma = 109^\circ 28' 16{,}4''$. (Die Richtung der Linie, wie in der vorhergehenden Aufgabe.)

Aufgabe 15. Der Punkt P hat die Coordinaten $x = 3$, $y = 5$ und $z = 1$, der Punkt Q die Coordinaten $x = 5$, $y = 4$, $z = 3$; man soll die Linie PQ durch die Gleichungen ihrer Projectionen bestimmen.

Aufl. 1) $y = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}x$; 2) $z = -2 + x$; hieraus folgt noch 3) $z = 11 - 2y$.

Aufgabe 16. Eine Linie AB im Raume ist durch die Gleichungen gegeben:

$$1)\ y = 2 + 3x \quad \text{und} \quad 2)\ z = 3 + 2x,$$

ein Punkt P aber durch die Coordinaten $x = 4$, $y = 6$ und $z = 2$; man soll die Linie, welche durch P mit AB parallel gelegt werden kann, durch ihre Gleichungen bestimmen.

Aufl. Die Projectionen der gesuchten Linie müssen mit den Projectionen der gegebenen Linie parallel sein und durch die Projectionen von P gehen. Man erhält:

$$1)\ y = -6 + 3x \quad \text{und} \quad 2)\ z = -6 + 2x.$$

Aufgabe 17. Durch den Punkt P, dessen Coordinaten $x = 3$, $y = 2$ und $z = 1$ sind, soll eine Linie gelegt werden, welche auf der Ebene $x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 1$ senkrecht steht; man soll die Linie durch die Gleichungen ihrer Projectionen bestimmen und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes mit der Ebene angeben.

Aufl. In der Ebene XY ist die Projection der gesuchten Linie:

$$y - 2 = b.(x - 3),$$

und der Grundschnitt der gegebenen Ebene:

$$y = 3 - 3x.$$

Hieraus folgt $b = \frac{1}{3}$; daher ist die Projection der gesuchten Linie auf XY:

$$1) \quad y = 1 + \tfrac{1}{3}x.$$

Eben so findet man ihre Projection auf XZ:

$$2)\qquad z = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x.$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Linie mit der Ebene sind:

$$x' = \tfrac{33}{49},\quad y' = \tfrac{60}{49} \quad \text{und} \quad z' = -\tfrac{8}{49}.$$

Aufgabe 18. Eine Linie durch die Gleichungen ihrer Projectionen zu bestimmen, welche mit der Ebene $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1$ parallel ist und durch den Punkt P geht, dessen Coordinaten $x = 2$, $y = 3$ und $z = 1$ sind.

Aufl. Es ist die Projection der gesuchten Linie

$$\text{auf } XY:\quad 1)\quad y - 3 = b(x - 2),$$
$$\text{auf } XZ:\quad 2)\quad z - 1 = b'(x - 2).$$

Betrachtet man diese beiden Gleichungen und die Gleichung der Ebene als Bestimmungsgleichungen für die Coordinaten x, y und z des Durchschnittspunktes der Linie mit der Ebene, so müssen diese Coordinaten ∞ werden. Man erhält aber $x = \dfrac{6b + 4b' - 5}{3b + 2b' + 6}$; und setzt man den Nenner gleich Null, so ergiebt sich

$$b' = -\frac{3b + 6}{2}.$$

Hieraus erhält man die Gleichungen der Projectionen der gesuchten Linie:

$$3)\qquad y - 3 = b(x - 2)$$
$$4)\qquad z - 1 = -\frac{3b + 6}{2}(x - 2).$$

Für b kann jede beliebige Zahl gesetzt werden, d. h. es giebt unendlich viele Linien, welche durch P gehen und mit der gegebenen Ebene parallel sind.

Man kann die Aufgabe auch dadurch lösen, daß man zuerst die Ebene sucht, welche durch P geht und mit der gegebenen Ebene parallel ist, dann aber eine der Constanten b oder b' in 1) oder 2) so bestimmt, daß die Linie im Raume, deren Gleichungen 1) und 2) sind, in der Ebene liegt. Man erhält die Ebene, welche durch P mit der gegebenen Ebene parallel gelegt werden kann, in der Gleichung:

$$5)\qquad \tfrac{6}{23}x + \tfrac{3}{23}y + \tfrac{2}{23}z = 1.$$

Um nun etwa b' so zu bestimmen, daß die durch 1) und 2) dargestellte Linie in dieser Ebene liegt, braucht man nur, weil diese Linie schon durch P geht, b' so zu wählen, daß noch ein zweiter Punkt dieser Linie in der Ebene liegt. Setzt man zu diesem Zwecke für x in die Gleichungen 1) und 2) einen bestimmten Werth ein, am bequemsten Null, so erhält man die drei zusammengehörigen Coordinatenwerthe

$$x = 0,\quad y = 3 - 2b \quad \text{und} \quad z = 1 - 2b'.$$

Diese Werthe müssen der Gleichung 5) genügen, daher entsteht die Gleichung:

$$\tfrac{3}{23}(3 - 2b) + \tfrac{2}{23}(1 - 2b') = 1,$$

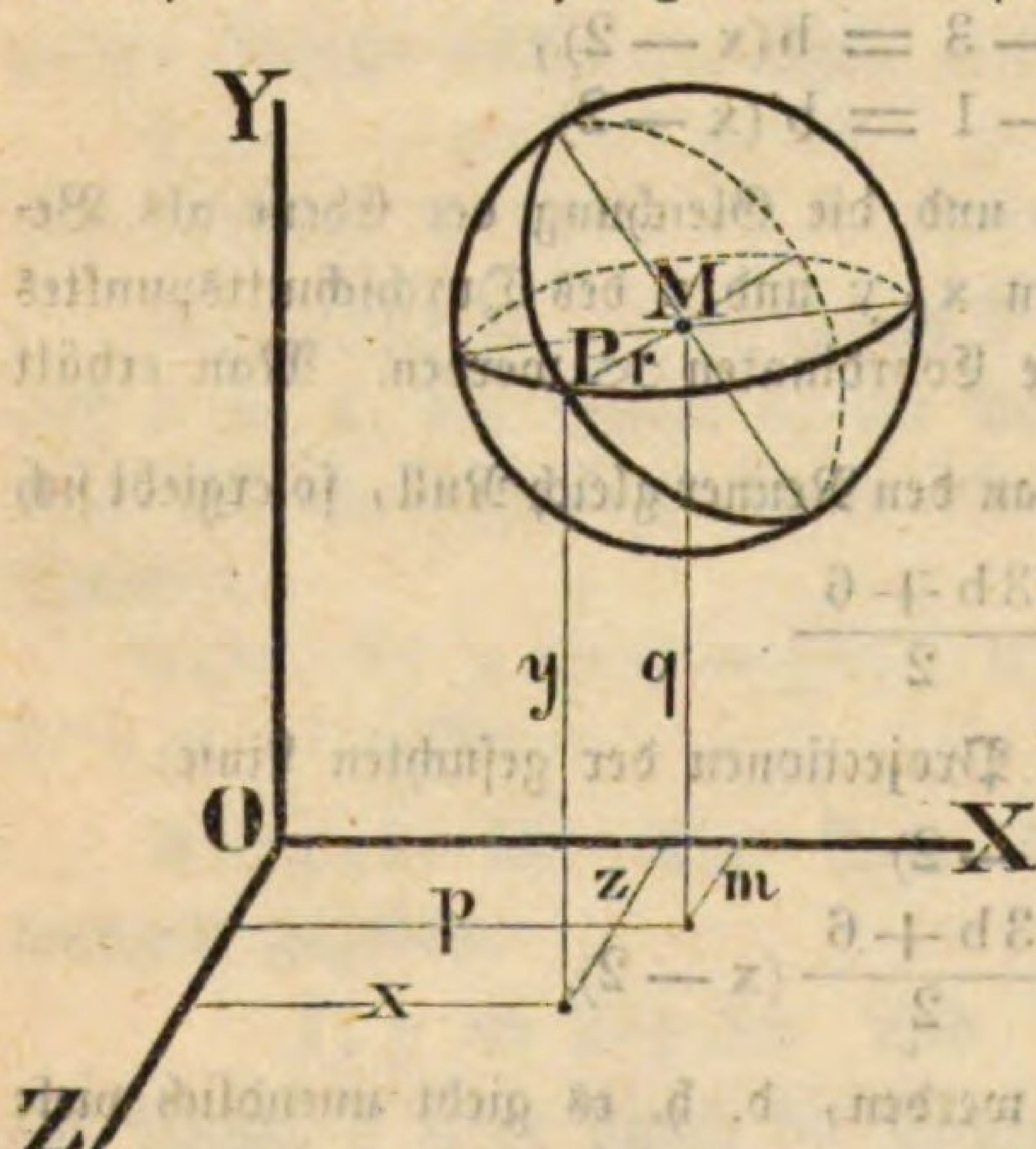
und aus ihr folgt, wie oben, $b' = -\dfrac{3b + 6}{2}$.

III. Die Kugeloberfläche.

§. 449.

Die Gleichung der Kugel.

Der Mittelpunkt einer Kugel habe die Coordinaten p, q und m (den Axen X, Y und Z entsprechend), und der Radius sei gleich r; man soll die Gleichung der Oberfläche dieser Kugel herleiten.



Auflösung. Ein beliebiger Punkt P der Kugeloberfläche habe die Coordinaten x, y und z. Da der Mittelpunkt M der Kugel die Coordinaten p, q und m hat, so können wir die Linie MP durch die Coordinaten ihrer Endpunkte nach §. 405. I. ausdrücken, und weil diese Linie der Radius r der Kugel ist, so erhalten wir die Gleichung:

$$(1.)\ (x-p)^2+(y-q)^2+(z-m)^2=r^2.$$

Diese Gleichung ist die verlangte, und weil sie mittelbar auch die Kugel selbst bestimmt, wird sie gewöhnlich die Gleichung der Kugel genannt. Löst man die Klammer auf, so entsteht:

$$(2.)\ x^2+y^2+z^2-2px-2qy-2mz+p^2+q^2+m^2-r^2=0.$$

Bezeichnet man die Constanten $-2p$, $-2q$, $-2m$ und $p^2+q^2+m^2-r^2$ mit a, b, c und d, so erhält die Gleichung der Kugel die Form:

$$(3.)\ x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0.$$

Die Gleichung der Kugel ist also eine Gleichung des zweiten Grades zwischen den Coordinaten x, y und z, in welcher aber die Glieder mit den Producten xy, xz und yz fehlen, während die Coefficienten von x^2, y^2 und z^2 gleich 1 sind. Da man die Gleichung mit einer beliebigen Zahl multipliciren kann, so können diese Coefficienten auch jede beliebige andere Zahl sein, aber sie müssen einander gleich sein. Durch Division kann man in diesem Falle die Gleichung wieder auf die Form (3.) bringen, so daß die Gleichung der Kugel vier Constanten hat, die Kugel selbst also ihrer Lage und Größe nach durch vier Bedingungen zu bestimmen ist.

Liegt der Mittelpunkt der Kugel in einer Axe, z. B. in der X-Axe, und geht zugleich die Oberfläche durch O, so ist $q = m = 0$ und $p = r$. Die Gleichung (2.) erhält dann die Form:

(4.) $x^2 + y^2 + z^2 - 2rx = 0$

und heißt die Scheitel-Gleichung der Kugel. Endlich entsteht noch die Mittelpunkts-Gleichung der Kugel, wenn man $p = q = m = 0$ setzt:

(5.) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$;

der Mittelpunkt der Kugel liegt dann in dem Anfangspunkt O der Coordinaten.

§. 450.

Beurtheilung der Lage der Kugel aus ihrer Gleichung.

Die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

läßt sich (vergl. §. 428.) auf die Form bringen:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d.$$

Ist die rechte Seite eine positive Zahl, so bestimmt die Gleichung eine Kugel; denn giebt man dem Mittelpunkt einer Kugel die Coordinaten $-\frac{a}{2}$, $-\frac{b}{2}$ und $-\frac{c}{2}$ und macht man ihren Radius gleich $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d}$, so wird die Gleichung dieser Kugel mit der gegebenen Gleichung identisch. Ist die rechte Seite gleich Null, so stellt die Gleichung einen Punkt vor, dessen Coordinaten $-\frac{a}{2}$, $-\frac{b}{2}$ und $-\frac{c}{2}$ sind; denn diese Werthe sind für x, y und z die einzigen reellen, welche der Gleichung

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = 0$$

genügen können. Ist endlich die rechte Seite negativ, so kann die gegebene Gleichung überhaupt für reelle Werthe von x, y und z nicht richtig sein und hat daher auch in unserem Sinne keine geometrische Bedeutung.

Ist also $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 > d$, so ist die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

immer die Gleichung einer Kugel, und aus dem Vorhergehenden folgt dann unmittelbar die Lage ihres Mittelpunktes. Es ist

seine Abscisse $p = -\frac{a}{2}$

» Ordinate $q = -\frac{b}{2}$

» Applicate $m = -\frac{c}{2}$.

Ferner ist der Radius der Kugel:

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d}.$$

Um nun zu untersuchen, ob die durch ihre Gleichung gegebene Kugel die Coordinaten-Ebenen und die Axen schneidet, oder berührt, oder weder schneidet, noch berührt, wollen wir diese Untersuchung für die Ebene XY und für die Axe X führen; analog verfährt man in Bezug auf die anderen Coordinaten-Ebenen und -Axen.

Jeder Punkt der Kugeloberfläche, welcher in der Ebene XY liegt, hat von ihr den Abstand Null, und weil z dieser Abstand ist, so hat man in die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$z = 0$ zu setzen. Man erhält

$$x^2 + y^2 + ax + by + d = 0.$$

Stellt nun diese Gleichung einen Kreis vor (vergleiche §. 429.), so schneidet die Kugel in demselben die Ebene XY; stellt sie einen Punkt vor, so berührt die Kugel in diesem Punkte die Ebene XY; hat endlich diese Gleichung eine geometrische Bedeutung nicht, d. h. kann sie überhaupt für reelle Werthe von x und y nicht richtig sein, so schneidet oder berührt die Kugel die Ebene XY nicht. — Man kann diese verschiedenen Lagen der Kugel zur Ebene XY auch aus folgender Betrachtung entnehmen: Schneidet die Kugel die Ebene XY, so geschieht dies in einem Kreise, dessen Radius gleich $\sqrt{r^2 - m^2}$ ist. Je nachdem also $r^2 > m^2$, oder $r^2 = m^2$, oder $r^2 < m^2$ ist, schneidet, oder berührt die Kugel die Ebene, oder schneidet und berührt sie nicht.

Jeder Punkt der Kugeloberfläche, welcher in der X-Axe liegt, hat die Coordinaten $z = 0$ und $y = 0$; setzt man diese Werthe in die gegebene Gleichung ein, so ergiebt sich

$$x^2 + ax + d = 0.$$

Je nachdem diese Gleichung zwei ungleiche reelle Wurzeln, oder zwei gleiche, oder nur imaginäre hat, schneidet, oder berührt die Kugel die X-Axe, oder trifft sie gar nicht.

Fehlt in der Gleichung der Kugel das constante Glied (ist also $d = 0$), so geht die Oberfläche der Kugel durch O, weil die Gleichung derselben für $x = y = z = 0$ richtig ist.

§. 451.

Lage der Kugel zu einer anderen Kugel, zu einer Ebene und zu einer Linie im Raume.

1) Zwei Kugeln. Sind zwei Kugeln gegeben:

$$(1.)\ x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$
$$(2.)\ x^2 + y^2 + z^2 + a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

so sind nach dem vorhergehenden §. ihre Radien, r und r', und die Coordinaten ihrer Mittelpunkte zu finden. Aus diesen Coordinaten erhält man (§. 405. I.):

$$\text{ihre Centrale} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2}.$$

Wenn diese Centrale gleich 0 ist, d. h. wenn

$$a' = a,\quad b' = b \quad \text{und} \quad c' = c$$

ist, so sind die Kugeln concentrisch, sonst excentrisch. Ist die Centrale gleich $r + r'$ oder gleich $r - r'$ (wobei $r > r'$ angenommen wird), so berühren sich die Kugeln resp. von außen oder innen. Die Kugeln schneiden sich, wenn die Centrale kleiner als $r + r'$ aber größer als $r - r'$ ist; endlich liegt die kleinere Kugel ganz außerhalb, oder ganz innerhalb der anderen, wenn die Centrale resp. größer als $r + r'$, oder kleiner als $r - r'$ ist.

Schneiden sich die Kugeln, so geschieht dies in einem Kreise, welcher durch die Gleichungen der beiden Kugeln nach §. 446. bestimmt ist, wenn man diese Gleichungen als zusammengehörige, d. h. als zwei Gleichungen mit drei Unbekannten betrachtet. Eliminirt man eine Unbekannte, z. B. z, so erhält man die Gleichung der Projection dieses Kreises auf die Ebene XY. Diese Gleichung kann vom ersten und vom zweiten Grade sein. Im ersten Falle ist die Projection eine gerade Linie, woraus folgt, daß die Durchschnittsebene beider Kreise auf der Ebene XY senkrecht steht. Im zweiten Falle ist die Projection entweder ein Kreis, und dann muß derselbe dem Kreise, in welchem sich die Kugeln schneiden congruent, dieser aber der Ebene XY parallel sein, oder sie ist eine andere krumme Linie (eine Ellipse), welche wir erst im nächsten Abschnitt kennen lernen werden. — Man kann aber auch aus den Gleichungen (1.) und (2.) unmittelbar schließen, welcher von den angegebenen Fällen (wenn die Kugeln sich schneiden) Statt findet. Da nämlich die Centrale auf der Durchschnittsebene beider Kugeln senkrecht steht, so muß sie, wenn die Projection der

Durchschnittsebene auf XY eine gerade Linie ist, parallel XY sein, und weil die Entfernungen der Mittelpunkte der Kugeln von dieser Ebene gleich $-\frac{c}{2}$ und $-\frac{c'}{2}$ sind, so muß dann

$$c = c'$$

sein; ist aber die Projection ein Kreis, so muß die Centrale senkrecht auf XY stehen, woraus leicht folgt, daß

$$a = a' \text{ und } b = b'$$

sein muß. — Aehnliches gilt in Bezug auf die Coordinatenebenen XZ und YZ.

Uebrigens kann man auch unmittelbar aus den Gleichungen (1.) und (2.) entnehmen, ob die Kugeln sich schneiden, oder berühren, oder weder schneiden, noch berühren. Eliminirt man aus beiden Gleichungen eine Coordinate, wir wollen annehmen z, so muß die entstandene Gleichung zwischen x und y, den drei angegebenen Fällen entsprechend, entweder unendlich viele reelle Coordinaten-Paare als Wurzeln haben, oder nur ein solches Paar, oder endlich nur imaginäre Werthe für x oder y zulassen.

2) Die Kugel und die Ebene. Es sei die Gleichung

der Kugel: (1.) $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$,

der Ebene: (2.) $a'x + b'y + c'z = 1$.

Eliminiren wir aus beiden Gleichungen eine Coordinate, z. B. z, so erhalten wir in der entstandenen Gleichung zwischen x und y die Projection des Kreises, in welchem die Ebene die Kugel schneidet, auf die Ebene XY. Wird nun diese Gleichung für unendlich viele reelle Coordinaten-Paare richtig, so schneidet die Ebene die Kugel wirklich; wird sie nur für ein reelles Coordinaten-Paar richtig, so berührt die Ebene die Kugel; ist endlich für alle reellen Werthe von x, y imaginär, oder umgekehrt, so hat die Ebene mit der Kugeloberfläche gar keinen gemeinschaftlichen Punkt. Im Falle des Schneidens ist die Projection der Durchschnittslinie der Ebene und der Kugeloberfläche im Allgemeinen wieder eine Ellipse, deren Untersuchung also erst später erfolgen kann. — Man kann übrigens auch vom Mittelpunkt M der Kugel eine Senkrechte auf die Ebene fällen und sie und ihren Fußpunkt P nach §. 448. Aufgabe 17. bestimmen. Ergiebt sich dann $MP = r$, so berührt die Ebene die Kugel; ist $MP > r$, so findet weder Schneiden, noch Berühren Statt, ist endlich $MP < r$, so ist P der Mittelpunkt des Kreises, in welchem die Ebene die Kugel schneidet, und $\sqrt{r^2 - MP^2}$ ist der Radius dieses Kreises.

3) Die Kugel und die gerade Linie im Raume. Es sei die Gleichung der Kugel

(1.) $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$,

und die Gleichungen zweier Projectionen der Linie:

(2.) $y = c + dx$.

(3.) $z = c' + d'x$.

Die Coordinaten jedes gemeinschaftlichen Punktes der Linie und der Kugeloberfläche müssen allen drei Gleichungen genügen; man findet sie, wenn man aus (2.) und (3.) die Werthe von y und z in (1.) substituirt und aus der entstandenen Gleichung x entwickelt. Da diese Gleichung den zweiten Grad nicht übersteigen kann, so findet man für x entweder zwei verschiedene reelle Werthe, und dann schneidet die Linie die Kugel, oder nur einen reellen Werth (zwei gleiche), und dann berührt die Linie die Kugel, oder zwei imaginäre, und dann findet weder ein Schneiden, noch Berühren Statt. Zu jedem reellen Werth von x ergeben sich y und z aus (2.) und (3.) auch reell.

§. 452.

Uebungs-Aufgaben über die Kugel.

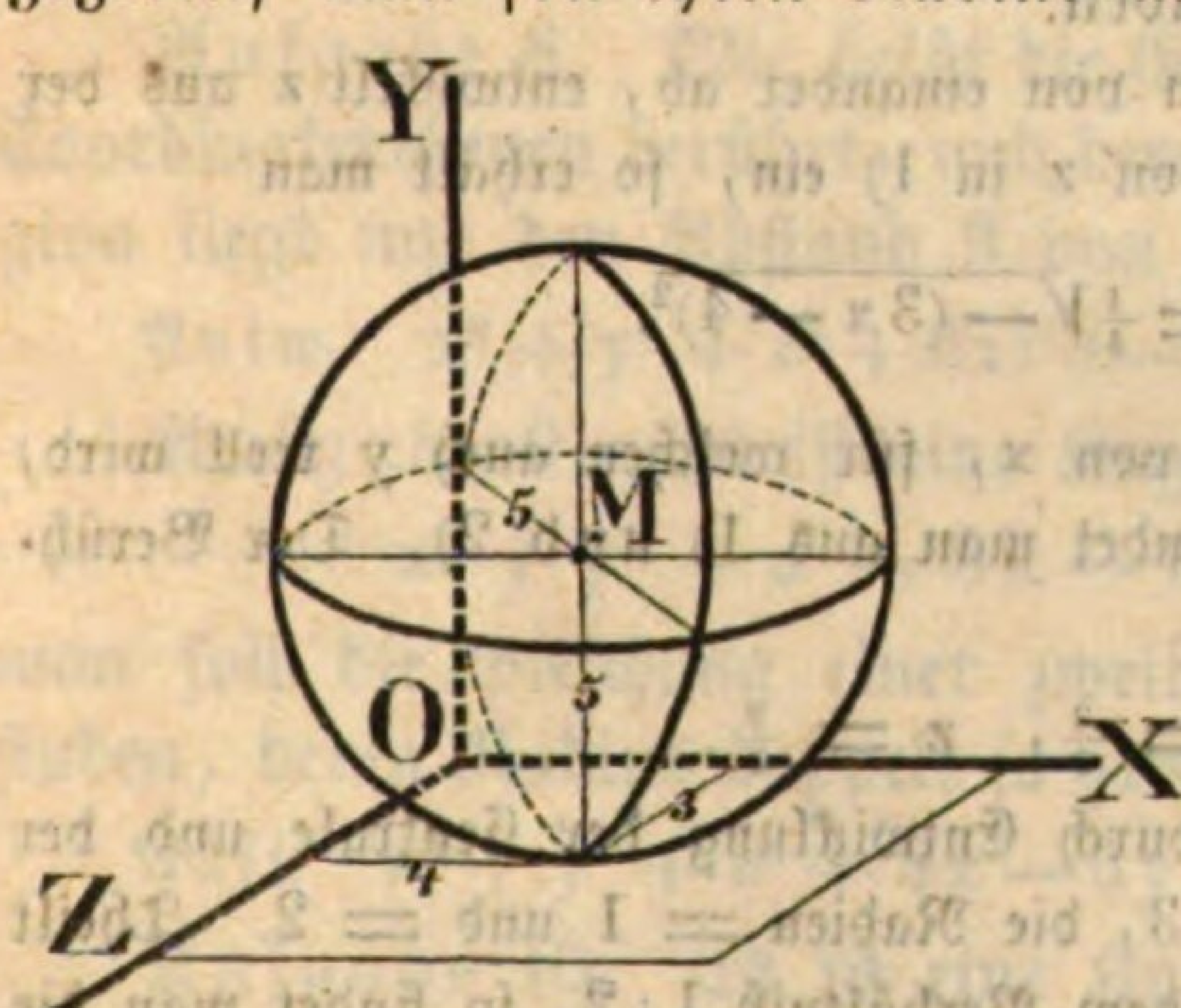
Aufgabe 1. Die Coordinaten des Mittelpunktes einer Kugel sind $x = 2$, $y = -1$, $z = 5$, der Radius sei $= 3$; wie heißt die Gleichung der Kugel?

Antw. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 10z + 21 = 0$.

Aufgabe 2. Eine Kugel ist durch die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y - 6z + 25 = 0$$

gegeben; man soll ihren Radius und ihre Lage bestimmen.



Aufl. Zunächst kann man die gegebene Gleichung auf die Form bringen:

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 25.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich unmittelbar die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel und der Radius:

$$p = 4,\ q = 5,\ m = 3,\ r = 5.$$

Da $q = r$ ist, so berührt die Kugel die Ebene XZ; der Berührungspunkt hat die Coordinaten 4 und 3. Die Kugel schneidet ferner die Ebene XY in dem Kreise

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 16$$

und die Ebene XZ in dem Kreise

$$(y-5)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

Die Oberfläche der Kugel wird von der X-Axe und von der Z-Axe gar nicht getroffen, und zwar schon deshalb nicht, weil sie die Ebene XZ berührt, oder auch, weil für $y = z = 0$, x imaginär wird, und auch für $x = y = 0$, z imaginär. Setzt man hingegen $x = z = 0$, so ist $y = 5$; folglich berührt die Kugeloberfläche die Y-Axe in der Entfernung 5 von O.

Aufgabe 3. Die Lage und den Radius folgender Kugel zu bestimmen:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 6y + 4z + 48 = 0.$$

Aufl. Die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel sind -6, $+3$ und -2, der Radius ist gleich 1. Die Kugeloberfläche trifft weder eine der Axen, noch eine der Coordinatenebenen.

Aufgabe 4. Es sind vier Punkte A, B, C und D im Raume gegeben: A liegt in der X-Axe in der Entfernung $+6$ von O, B in der Y-Axe in der Entfernung $+4$ von O, C in der Z-Axe in der Entfernung $+2$ von O; D hat die Coordinaten $x = y = z = +4$. Man soll die Kugel bestimmen, deren Oberfläche durch A, B, C und D geht.

Aufl. Zur Bestimmung der vier Constanten in der Gleichung der Kugel hat man vier Gleichungen und findet:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z = 0.$$

Da diese Gleichung kein constantes Glied hat, so geht die Kugeloberfläche auch durch O. Der Mittelpunkt der Kugel hat die Coordinaten $+3$, $+2$ und $+1$; der Radius ist gleich 3,74166.

Aufgabe 5. Es sind zwei Kugeln gegeben:

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$
2) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 8 = 0$;

man soll ihre gegenseitige Lage finden.

Aufl. Zieht man die Gleichungen von einander ab, entwickelt z aus der neuen Gleichung und setzt den Werth von z in 1) ein, so erhält man

$$y = \frac{4 - x}{4} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{-(3x - 4)^2}.$$

Es giebt also nur einen reellen Werth von x, für welchen auch y reell wird; folglich berühren sich die Kugeln. z findet man aus 1) und 2). Der Berührungspunkt hat die Coordinaten:

$$x = \tfrac{4}{3},\quad y = \tfrac{2}{3},\quad z = \tfrac{2}{3}.$$

Zu demselben Resultat gelangt man durch Entwicklung der Centrale und der Radien. Man findet die Centrale $= 3$, die Radien $= 1$ und $= 2$. Theilt man die Projection der Centrale nach dem Verhältniß $1 : 2$, so findet man die Projection des Berührungspunktes.

Aufgabe 6. Es wird die gegenseitige Lage folgender Kugeln gesucht:

$$1)\ x^2 + y^2 + z^2 - 10y - 6z + 9 = 0.$$
$$2)\ x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y + 31 = 0.$$

Aufl. Da die Coefficienten von y in beiden Gleichungen dieselben sind, so ist die Centrale der Ebene XZ parallel. Zieht man die Gleichungen von einander ab, so folgt:

$$3z - 4x + 11 = 0.$$

Ein Theil der Linie, deren Gleichung die vorstehende ist, muß, wenn die Kugeln sich schneiden, die Projection ihrer Durchschnittsfläche sein. Substituirt man den Werth von z aus der vorstehenden Gleichung in 2), so ergiebt sich

$$y = 5 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{-5(x-5)(5x-7)}.$$

Hieraus folgt, daß y nur reell ist, wenn x innerhalb der Grenzen $\frac{7}{5}$ und 5 liegt. Die Kugeln schneiden sich also in einem Kreise, dessen Projection auf XZ der Theil der geraden Linie oben ist, welcher durch die Coordinaten seiner Endpunkte

$$x = \tfrac{7}{5},\quad z = -\tfrac{9}{5} \quad \text{und} \quad x = 5,\quad z = 3$$

bestimmt ist. Zu beiden Endpunkten gehört die Ordinate $y = 5$. Die Länge der Projection, also auch die Länge des Durchmessers des Durchschnittskreises, ist $= 6$. Man findet ferner die Radien der Kugeln gleich 5 und $\sqrt{10}$, die Centrale gleich 5, so daß die Oberfläche der größeren Kugel durch den Mittelpunkt der kleineren geht. Der Mittelpunkt des Kreises, in welchem sich die Kugeln schneiden, hat die Coordinaten $x = \frac{16}{5}$, $y = 5$ und $z = \frac{3}{5}$.

Aufgabe 7. Schneiden oder berühren sich die beiden Kugeln:

$$1)\ x^2 + y^2 + z^2 - 4y = 0$$
$$2)\ x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 27 = 0?$$

Antw. Sie schneiden sich weder, noch berühren sie sich; jede liegt ganz außerhalb der anderen. Ihre Centrale ist $\sqrt{40}$, ihre Radien sind 2 und 3.

Aufgabe 8. Wie heißt die Gleichung der Kugel, welche die drei Coordinatenebenen berührt, und deren Mittelpunkt in der zweiten Region liegt und den Abstand 3 von O hat?

Antw. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} - 2z\sqrt{3} + 6 = 0.$

Aufgabe 9. Es ist eine Kugel gegeben:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y - 4z + 28 = 0;$$

man soll die Gleichung einer zweiten, mit ihr concentrischen Kugel finden, deren Radius doppelt so groß ist, als der der gegebenen Kugel.

Aufl. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y - 4z + 25 = 0.$

Aufgabe 10. Es ist eine Kugel durch die Gleichung gegeben:

$$1)\ x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 16y = 0,$$

und eine Linie im Raume durch die Gleichungen ihrer Projectionen:

$$2)\ y = -4 + 2x \quad \text{und} \quad 3)\ z = 15 - \tfrac{5}{2}x;$$

es soll angegeben werden, ob die Linie die Kugeloberfläche schneidet, und in welchen Punkten.

Aufl. Man erhält zwei Durchschnittspunkte, deren Coordinaten sind:

$$x = 6 + \tfrac{4}{3}\sqrt{5} \quad \text{und} \quad x' = 6 - \tfrac{4}{3}\sqrt{5}$$
$$y = 8 + \tfrac{8}{3}\sqrt{5} \qquad\qquad y' = 8 - \tfrac{8}{3}\sqrt{5}$$
$$z = -\tfrac{10}{3}\sqrt{5} \qquad\qquad z' = +\tfrac{10}{3}\sqrt{5}.$$

Aus diesen Coordinaten findet man die Sehne gleich 20, und weil der Radius der Kugel gleich 10 ist, so geht die gegebene Linie durch den Mittelpunkt der Kugel.

Vierter Abschnitt.

Die Kegelschnitte.

E i n l e i t u n g.

§. 453.

E r k l ä r u n g.

Die Linie, in welcher eine Ebene eine Kegelfläche schneidet, heißt ein K e g e l s c h n i t t. Wir setzen immer eine Kegelfläche voraus, welche als der ins Unendliche (auch über die Spitze) verbreitete Mantel eines gemeinen senkrechten Kegels betrachtet werden kann. Gehen wir also auf die Entstehung der Kegelfläche zurück (§. 329.), so wird die hier vorausgesetzte Kegelfläche erzeugt, wenn eine unendlich lange Linie im Raume so bewegt wird, daß sie alle stetig auf einander folgende Punkte einer K r e i s p e r i p h e r i e durchläuft, während der Bewegung aber immer durch einen Punkt S im Raume geht, dessen Verbindungslinie mit dem Mittelpunkte des Kreises auf seiner Ebene senkrecht steht. Diese, auch unendlich lang gedachte, Verbindungslinie ist die A x e der Kegelfläche; letztere besteht aus zwei Theilen, von denen jeder die S c h e i t e l - K e g e l f l ä c h e des anderen ist. Beide Theile betrachten wir als zusammengehörig; sie haben nur den einen Punkt S mit einander gemein, welcher der S c h e i t e l (auch der Mittelpunkt) der Kegelfläche heißt. Alle Seiten der Kegelfläche, d. h. die erzeugende Linie in jeder ihrer Lagen während der Bewegung, bilden mit der Axe gleiche Winkel, und jede Ebene, welche auf der Axe senkrecht steht und nicht durch den Scheitel der Kegelfläche geht, schneidet letztere in einer Kreisperipherie, deren Mittelpunkt in der Axe liegt.

Geht die Ebene, welche die Kegelfläche schneidet, durch den Scheitel, so besteht der Kegelschnitt aus zwei geraden Linien (Seiten), welche

sich im Scheitel kreuzen. Diesen Fall betrachtet man als einen besonderen und rechnet ihn gewöhnlich nicht zu den Kegelschnitten; auch wir wollen ihn aus unseren Untersuchungen ausschließen. In allen andern Fällen ist der Kegelschnitt eine krumme Linie, weil drei Punkte, welche in verschiedenen Seiten der Kegelfläche sich befinden, niemals in einer graden Linie liegen können; denn wäre dies möglich, so könnte man durch sie und den Scheitel eine Ebene legen, und diese würde dann die Kreisperipherie, welche eine zur Axe senkrechte Ebene in der Kegelfläche erzeugt, in drei Punkten schneiden müssen, was mit §. 111. V. im Widerspruch steht. — Die Ebene, welche den Kegelschnitt erzeugt, kann entweder nur die eine beider Scheitel-Kegelflächen schneiden, oder beide; im letzteren Falle besteht der Kegelschnitt aus zwei gesonderten Theilen, die wir aber, wie aus späteren Untersuchungen hervorgehen wird, als zusammengehörig betrachten müssen; auch werden wir weiterhin sehen, daß diese beiden Theile immer einander congruent sind.

§. 454.

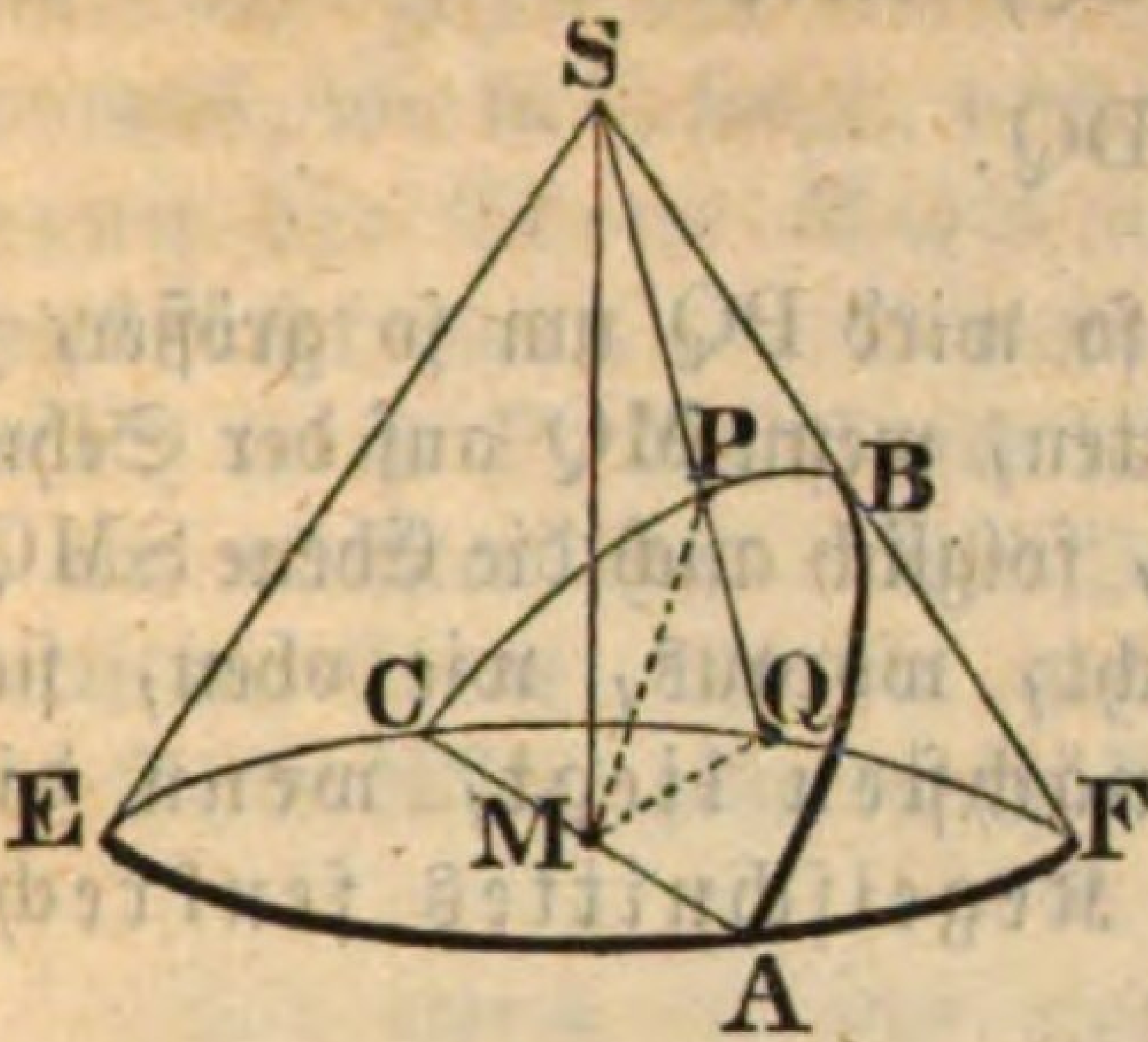
Aufgabe.

Eine Kegelfläche wird durch eine Ebene beliebig geschnitten; man soll den Punkt des entstandenen Kegelschnittes bestimmen, welcher dem Scheitel der Kegelfläche am nächsten liegt.

Auflösung. Schneidet die Ebene beide Scheitel-Kegelflächen, so unterscheidet sich die Aufsuchung des dem Scheitel am nächsten liegenden Punktes in der einen Kegelfläche von der in der andern nicht; wir können uns daher auf die eine Kegelfläche beschränken. Wir unterscheiden drei Fälle: entweder schneidet die Ebene des Kegelschnittes den Theil der Axe, welche der zugehörigen Kegelfläche angehört, oder sie ist mit der Axe parallel, oder sie schneidet den Theil der Axe, welche der Scheitel-Kegelfläche angehört. Jeden dieser drei Fälle werden wir besonders behandeln.

I. Wenn die Ebene des Kegelschnittes den zugehörigen Theil der Axe schneidet.

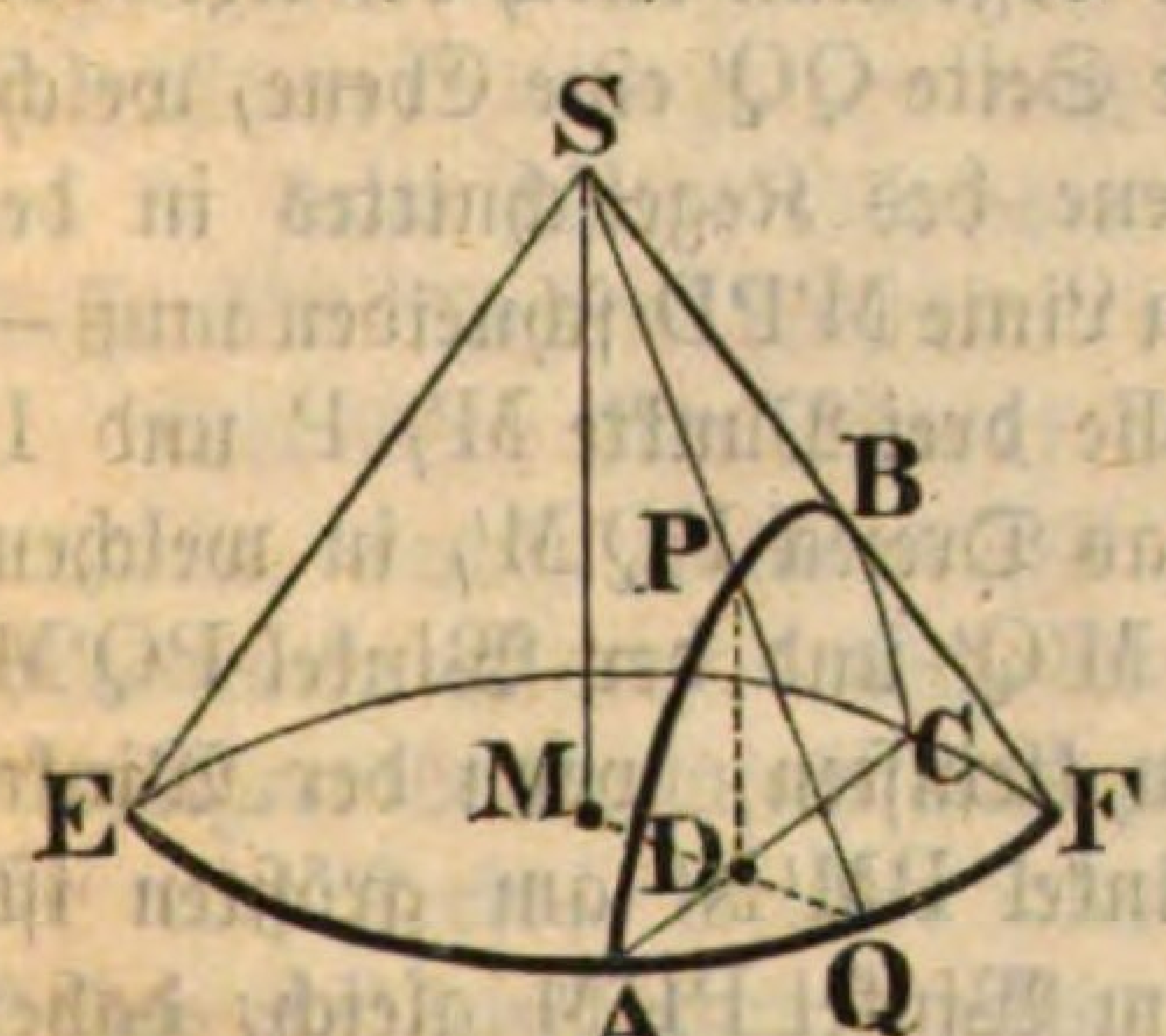
Legt man durch den Punkt M, in welchem die Ebene des Kegelschnittes ABC die Axe schneidet, eine Ebene senkrecht zur Axe, so entsteht der Kegel SEF, dessen Grundfläche, der Kreis EF, von der Ebene des Kegelschnittes in dem Durchmesser AC geschnitten wird. Eine beliebige Seite SQ des Kegels schneide den Kegelschnitt in P, es fragt sich, welche Lage SQ haben muß, wenn SP am kleinsten, also QP am größten sein soll. Legt man durch die Axe SM und die Seite SQ eine Ebene, welche den Kreis EF in MQ und die Ebene des Kegelschnittes ABC in der Linie MP schneidet, so entsteht das



Dreieck MQP, in welchem MQ als Radius und der Winkel PQM als Neigungswinkel der Seite des Kegels gegen die Grundfläche constant sind, also bei jeder Lage der Seite SQ unverändert bleiben. Die Seite QP dieses Dreiecks wird sonach dann am größten, wenn der Winkel PMQ am größten ist; weil aber dieser Winkel der Neigungswinkel der Linie MP gegen die Grundfläche des Kegels ist (denn die Ebene SMQ steht senkrecht auf der Ebene EF) und weil die Linie MP immer in der Ebene ABC liegt, so wird nach §. 264. der Winkel PMQ dann am größten, wenn MP senkrecht auf AC steht. In diesem Falle steht auch MQ $\perp$ AC (denn es ist alsdann AC nach §. 253. auf der Ebene SMQ senkrecht), und $\measuredangle$ PMQ ist der Neigungswinkel der Ebene des Kegelschnittes gegen die Grundfläche des Kegels. Endlich steht dann auch die Ebene SMQ auf der Ebene ABC des Kegelschnittes senkrecht (weil letztere durch AC geht, oder nach §. 265. Zusatz), und hieraus folgt sonach die Auflösung der vorliegenden Aufgabe: der Punkt P liegt dem Scheitel S der Kegelfläche am nächsten, wenn die Ebene, welche sich durch die zugehörige Seite SQ und die Axe des Kegels legen läßt, auf der Ebene des Kegelschnittes senkrecht steht.

II. Wenn die Ebene des Kegelschnittes mit der Axe des Kegels parallel ist.

Es sei ABC wieder der Kegelschnitt und EF ein Kreis, welcher in einem beliebigen Punkte M der Axe auf derselben senkrecht steht und den Kegelschnitt in der Sehne AC schneidet. Um die Lage der Seite SQ, welche den Kegelschnitt in P schneidet, so zu bestimmen,



daß P dem Scheitel S am nächsten liegt, also QP am größten wird, lege man durch SQ und die Axe SM eine Ebene, welche den Kreis EF in MQ, die Ebene des Kegelschnittes in PD schneidet. Da diese Ebene SMQ und die Ebene des Kegelschnittes auf dem Kreise senkrecht stehen (§. 265.), so steht auch PD auf diesem Kreise senkrecht und ist daher mit der Axe parallel. Aus ähnlichen Dreiecken folgt nun:

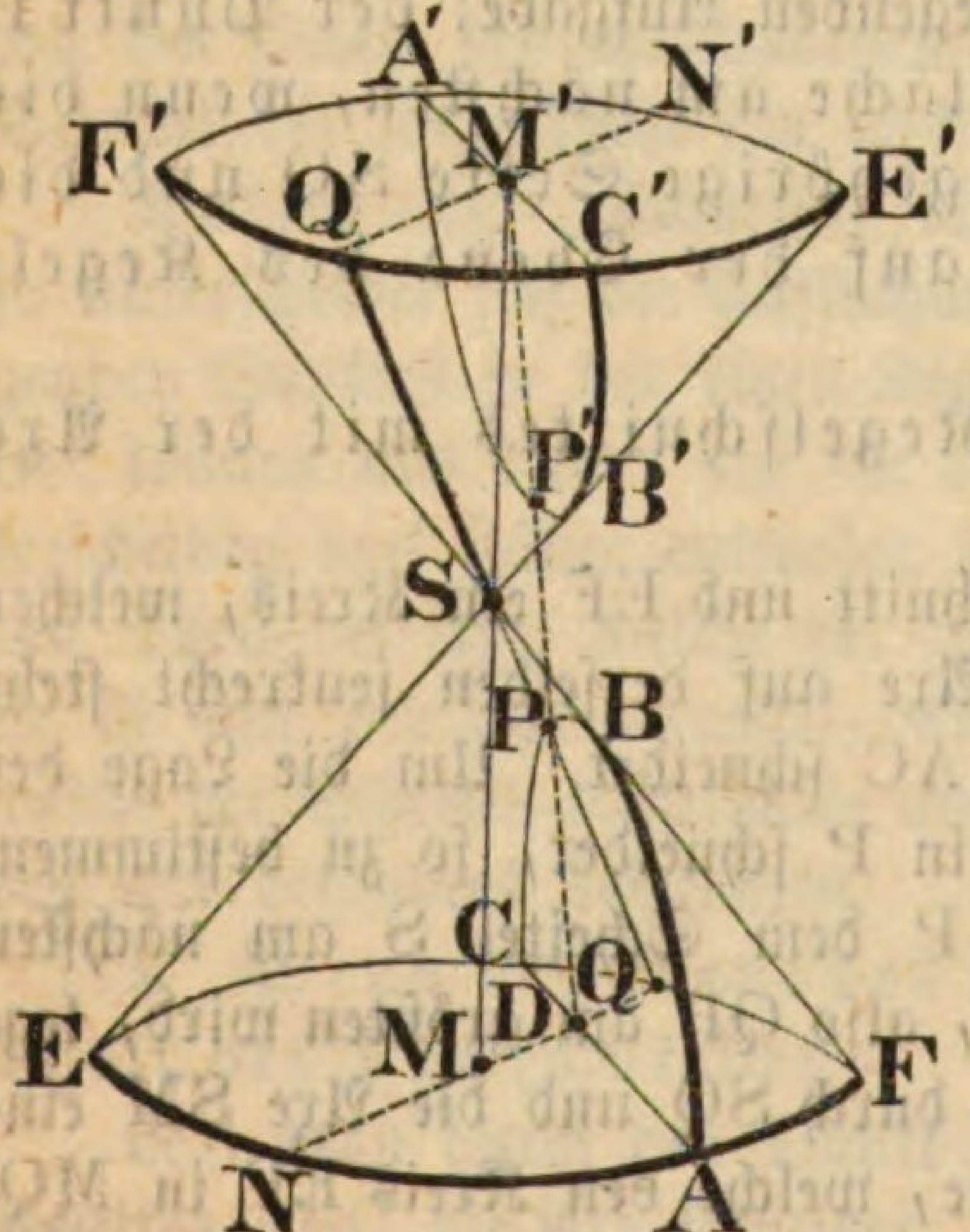
$$PQ : SQ = DQ : MQ, \text{ oder}$$

$$PQ = \frac{SQ}{MQ} \cdot DQ.$$

Weil aber SQ und MQ constant sind, so wird PQ um so größer, je größer DQ ist; aber DQ wird am größten, wenn MQ auf der Sehne AC senkrecht steht, und dann steht MQ, folglich auch die Ebene SMQ, auf der Ebene des Kegelschnittes senkrecht, woraus, wie oben, sich ergiebt, daß P dem Scheitel am nächsten liegt, wenn die Ebene SMQ auf der Ebene des Kegelschnittes senkrecht steht.

III. Wenn die Ebene des Kegelschnittes die Verlängerung der Axe über den Scheitel hinaus schneidet.

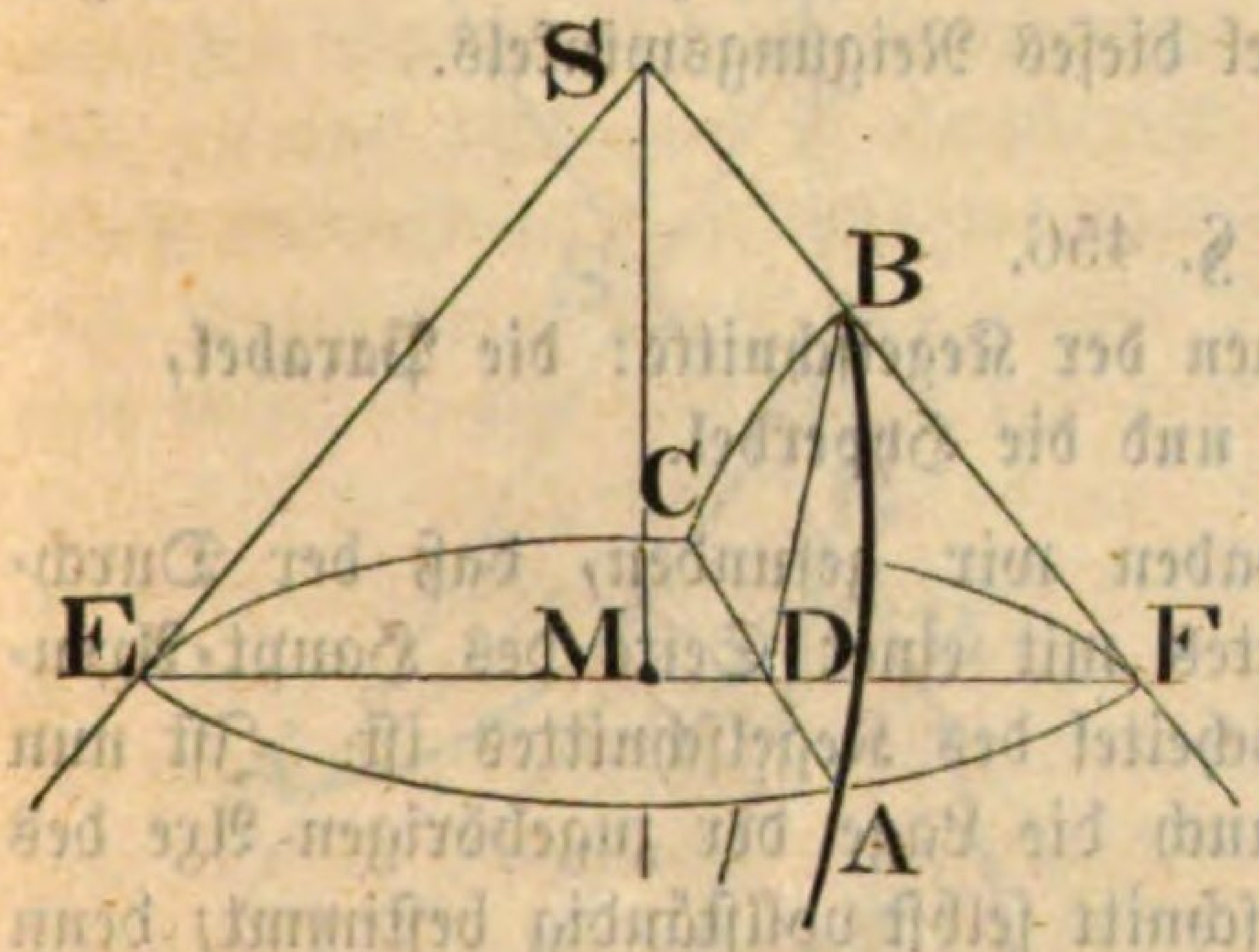
Der Kreis EF, welcher in einem beliebigen Punkte M der Axe auf ihr senkrecht steht, schneide wieder den Kegelschnitt ABC in der Sehne AC. Eine zweite zur Axe senkrechte Ebene legen wir durch den Punkt M′ des zur Scheitel-Kegelfläche gehörigen Theiles der Axe, in welchem die Ebene des Kegelschnittes die Axe trifft. Dadurch entsteht der Kreis E′F′, welcher die Ebene des Kegelschnitts A′B′C′ in dem Durchmesser A′C′ schneidet; die beiden Kreise E′F′ und EF sind parallel und begrenzen einen Doppel-Kegel, dessen Seiten als Summen gleicher Theile gleich lang sind. Ist nun QS eine beliebige Seite des Kegels SEF, welche den Kegelschnitt ABC in P schneidet, und verlängert man diese Seite, bis sie in Q′ die Peripherie des Kreises E′F′ trifft, so liegt P dem Scheitel S am nächsten, wenn QP am größten oder Q′P am kleinsten ist. Legt man durch die Axe MM′ und die Seite QQ′ eine Ebene, welche die Ebene des Kegelschnittes in der geraden Linie M′PD schneiden muß — denn alle drei Punkte M′, P und D liegen in beiden Ebenen —, so entsteht das Dreieck PQ′M′, in welchem bei jeder Lage der Seite QQ′ die Seite M′Q′ und der Winkel PQ′M′ constant sind. Es wird daher Q′P am kleinsten, wenn der Winkel PM′Q′ am kleinsten, also sein Nebenwinkel PM′N′ am größten ist. Letzterer Winkel ist als Wechselwinkel dem Winkel PDM gleich; daher ergiebt sich, daß P dem Scheitel S am nächsten liegt, wenn ∡ PDM am größten ist, also, weil dieser Winkel der Neigungswinkel der



Linie DP gegen den Kreis EF ist, wenn DP senkrecht auf AC steht, woraus, wie in I., folgt, daß P dem Scheitel S am nächsten liegt, wenn die Ebene MQS auf der Ebene des Kegelschnittes senkrecht steht. — Schneidet diese Ebene den Kegelschnitt A'B'C' in P', so ist P' der Punkt dieses Kegelschnittes, welcher dem Scheitel S am nächsten liegt. Die Punkte P und P' liegen mit der Axe in derselben Ebene, also in gegenüberliegenden Seiten der Kegelfläche; die Seite NSN' geht durch P'.

§. 455.

Jede durch die Axe einer Kegelfläche gelegte Ebene nennt man einen Axenschnitt. In Bezug auf einen Kegelschnitt ist nach dem vorhergehenden §. unter allen Axenschnitten derjenige von besonderer Wichtigkeit, welcher auf der Ebene des Kegelschnittes senkrecht steht; er schneidet den Kegelschnitt in dem Punkte, welcher dem Scheitel am nächsten liegt. Wir nennen diesen Axenschnitt den Haupt-Axenschnitt und werden bei allen Figuren die Ebene des Papieres zu diesem Axenschnitt wählen. In der nebenstehenden Figur ist in Bezug auf den Kegelschnitt ABC die Ebene SEF der Haupt-Axenschnitt; folglich muß sich der Leser die Ebene des Kegelschnittes ABC auf der Ebene SEF (der Ebene des Papiers) senkrecht denken. BD ist die Linie, in welcher der Haupt-Axenschnitt die Ebene des Kegelschnittes schneidet, und B ist der dem Scheitel S am nächsten liegende Punkt des Kegelschnittes. Schneidet die Ebene des Kegelschnittes auch die Scheitel-Kegelfläche, so liegt der dem Scheitel S am nächsten befindliche Punkt des in jener Fläche liegenden Kegelschnittes in der Verlängerung der Seite ES über S hinaus.



Der Leser sei noch auf eine Eigenschaft der Linie BD aufmerksam gemacht, durch welche diese Linie für den Kegelschnitt eine besondere Bedeutung erlangt. Schneidet man die Ebene des Kegelschnittes an beliebiger Stelle durch eine zur Axe SM senkrechte Ebene EF, so ist EF ein Kreis, welcher von der Ebene des Kegelschnittes in einer Sehne AC geschnitten wird. Weil nun die beiden Ebenen EF und ABC auf dem Haupt-Axenschnitt senkrecht stehen, so gilt dies auch von ihrer Durchschnittslinie AC; folglich steht AC auch auf dem

Radius MF senkrecht und wird daher durch ihn im Punkte D halbirt. Weil aber AC auch auf BD senkrecht steht, denn auch BD liegt im Haupt-Axenschnitt, und weil der Kreis EF durch jeden Punkt der Linie BD gelegt werden kann, so folgt hieraus, daß BD jede Sehne des Kegelschnittes halbirt, welche auf ihr senkrecht steht. Jede Linie von dieser Eigenschaft nennt man eine Axe des Kegelschnittes, und jeden Punkt, in welchem eine Axe den Kegelschnitt schneidet, nennt man einen Scheitel des Kegelschnittes; daher schneidet der Haupt-Axenschnitt der Kegelfläche die Ebene des Kegelschnittes in einer Axe, den Kegelschnitt selbst aber in einem Scheitel des Kegelschnittes.

Schließlich sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß in einer gegebenen Kegelfläche ein Kegelschnitt vollkommen bestimmt ist, wenn man die Lage des Scheitels B des Kegelschnittes und den Winkel FBD kennt, welchen die zum Scheitel gehörige Kegel-Seite mit der Axe des Kegelschnittes bildet; dieser Winkel ist, je nachdem er spitz, oder stumpf ist, der Neigungswinkel der Seite SF zur Ebene des Kegelschnittes, oder der Nebenwinkel dieses Neigungswinkels.

§. 456.

Die drei besonderen Formen der Kegelschnitte: die Parabel, die Ellipse und die Hyperbel.

Im vorhergehenden §. haben wir gefunden, daß der Durchschnittspunkt eines Kegelschnittes mit einer Seite des Haupt-Axenschnittes der Kegelfläche ein Scheitel des Kegelschnittes ist. Ist nun dieser Scheitel gegeben, und auch die Lage der zugehörigen Axe des Kegelschnittes, so ist der Kegelschnitt selbst vollständig bestimmt; denn die Axe liegt im Haupt-Axenschnitt, die Ebene des Kegelschnittes geht durch diese Axe und steht auf dem Haupt-Axenschnitt senkrecht. In Bezug auf die Lage der Axe, also auch in Bezug auf die Lage des Kegelschnittes selbst, können wir drei Fälle unterscheiden:

1) Die Axe kann mit der dem Scheitel des Kegelschnittes gegenüberliegenden Seite des Haupt-Axenschnittes parallel sein; in diesem Falle heißt der Kegelschnitt eine Parabel.

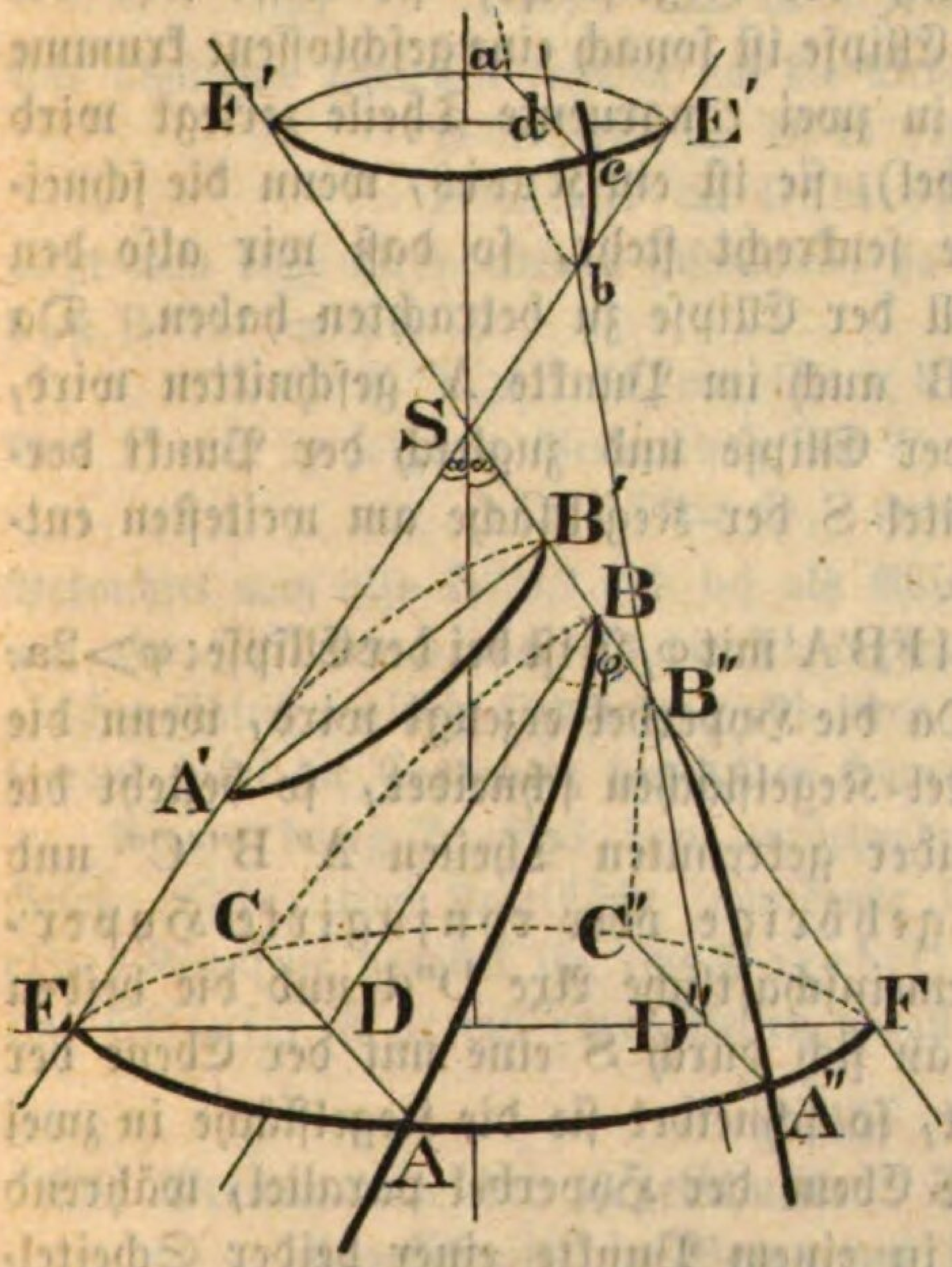
2) Die Axe kann diese Seite in demselben Theile der Kegelfläche schneiden, in welchem der Scheitel des Kegelschnittes liegt; dann nennt man den Kegelschnitt eine Ellipse.

3) Die Axe kann diese Seite in ihrer Verlängerung über den Scheitel der Kegelfläche hinaus, also in der Scheitel-Kegelfläche schneiden; dann wird der Kegelschnitt eine Hyperbel genannt.

Hieraus folgt, daß ein Punkt der Kegelfläche der Scheitel nur einer Parabel sein kann, hingegen der Scheitel unendlich vieler Ellipsen und Hyperbeln.

Die nachfolgende Figur soll dem Leser eine richtige allgemeine Vorstellung von der Form der drei Kegelschnitte geben und ihn auf die Unterscheidungsmerkmale, welche am meisten in die Augen fallen, aufmerksam machen. Der größeren Deutlichkeit wegen zeigt die Figur die drei Kegelschnitte mit drei verschiedenen Scheiteln; für alle drei Kegelschnitte ist SEF der Hauptaxenschnitt der Kegelfläche.

I. Die Parabel. Die Curve ABC ist eine Parabel, wenn ihre Axe BD mit der Kegelseite SE parallel ist. In diesem Falle ist auch die Ebene der Parabel mit dieser Kegelseite parallel, während sie alle andern Seiten der Kegelfläche in dem Theile der Kegelfläche schneidet, in welcher ihr Scheitel liegt. Denn wollte man annehmen, die Ebene ABC wäre noch mit einer zweiten Kegelseite parallel, so könnte man in der Ebene ABC eine Linie erzeugen, welche mit dieser zweiten Kegelseite parallel ist (§. 257. Nr. 2.), und projicirt man dann beide Linien auf den Axenschnitt SEF, so müßten auch die Projectionen parallel sein, und dies ist ein Widerspruch; denn die eine Projection ist BD, die andere muß durch S gehen und zwischen SE und BD liegen, also mit BD nach unten convergiren. Hieraus folgt schon, daß die Ebene ABC, also auch die Parabel, alle Seiten der Kegelfläche, mit Ausnahme der Seite SE, in dem Theile SEF schneiden muß; man kann sich aber auch hiervon leicht dadurch überzeugen, daß man durch EE′ eine die Kegelfläche berührende Ebene legt, die dann mit der Ebene der Parabel parallel ist. Letztere liegt auf der rechten Seite jener Ebene, die Scheitel-Kegelfläche SE′F′ auf der linken, folglich kann die Ebene der Parabel die Scheitel-Kegelfläche nicht schneiden. Da die Ebene der Parabel mit der Seite SE parallel ist, so ist die Parabel keine ge-



schlossene Kurve; nimmt man hinzu, daß nach §. 455. die Axe BD alle auf ihr senkrechten Sehnen halbirt, woraus die Congruenz der beiden Theile folgt, in welche sie die von der Parabel umschlossene Ebene zerlegt, so folgt: die Parabel ist eine krumme Linie, welche sich vom Scheitel aus in zwei congruenten Theilen, welche auf verschiedenen Seiten der Axe liegen, ins Unendliche erstreckt.

Bezeichnet man den Winkel FBD, den die Kegelseite, in welcher der Scheitel liegt, mit der Axe der Parabel bildet, mit φ und den Winkel, den jede Seite der Kegelfläche mit der Kegelaxe bildet, mit α, so ist noch bei der Parabel: $\varphi = 2\alpha$.

II. Die Ellipse. Da die Ebene der Ellipse (in der Figur A'B') die beiden gegenüberliegenden Seiten des Haupt-Axenschnittes in derselben Scheitel-Kegelfläche (SEF) schneidet, so schneidet sie überhaupt alle Seiten in demselben Theile der Kegelfläche, sie trifft also die Scheitel-Kegelfläche nicht. Die Ellipse ist sonach eine geschlossene krumme Linie, welche durch die Axe in zwei congruente Theile zerlegt wird (der Grund, wie bei der Parabel); sie ist ein Kreis, wenn die schneidende Ebene auf der Kegelaxe senkrecht steht, so daß wir also den Kreis als einen besondern Fall der Ellipse zu betrachten haben. Da die Ellipse von ihrer Axe A'B' auch im Punkte A' geschnitten wird, so ist A' auch ein Scheitel der Ellipse und zugleich der Punkt derselben, welcher von dem Scheitel S der Kegelfläche am weitesten entfernt liegt (leicht zu beweisen).

Bezeichnet man den Winkel FB'A' mit φ, so ist bei der Ellipse: $\varphi > 2a$.

III. Die Hyperbel. Da die Hyperbel erzeugt wird, wenn die schneidende Ebene beide Scheitel-Kegelflächen schneidet, so besteht die Hyperbel aus zwei von einander getrennten Theilen A'' B'' C'' und abc, welche man zusammengehörige oder conjugirte Hyperbeln nennt; sie haben die gemeinschaftliche Axe D''d und die beiden Scheitel B'' und b. Denkt man sich durch S eine mit der Ebene der Hyperbel parallele Ebene gelegt, so schneidet sie die Kegelfläche in zwei Seiten, und mit diesen ist die Ebene der Hyperbel parallel, während sie von allen andern Seiten in einem Punkte einer beider Scheitel-Kegelflächen geschnitten wird. Denn wäre noch eine dritte Seite mit ihr parallel, so müßte diese in jener durch S gelegten Ebene liegen (§. 269. Nr. 4.), und dies ist unmöglich, weil drei Seiten einer Kegelfläche nie in einer Ebene liegen können (vergl. §. 453.). Weil nun die Ebene der Hyperbel A''B''C'' mit der Seite SE in der Kegelfläche SFE nach unten divergirt, die Ebene der Hyperbel abc aber mit der Seite SF' in der Kegelfläche SE'F' nach oben, und weil die Ebene, welche von jeder dieser Hyperbeln umschlossen ist, durch die Axe D''d in zwei

congruente Theile zerlegt wird, so sind die conjugirten Hyperbeln zwei krumme Linien, die sich von ihren Scheiteln aus nach entgegengesetzten Richtungen hin, jede in zwei congruenten auf verschiedenen Seiten der Axe liegenden Theilen, ins Unendliche erstrecken.

Bezeichnet man den Winkel FB″D″ mit φ, so ist bei der Hyperbel: $\varphi < 2\alpha$.

Anmerkung 1. Es mag hier der geometrische Beweis folgen, daß die beiden zusammengehörigen Hyperbeln A″B″C″ und abc congruent sind; bei der analytischen Behandlung der Kegelschnitte werden wir die Richtigkeit dieses Gesetzes aus der Gleichung der Hyperbel erkennen.

Da im Halbkreise das Loth auf dem Durchmesser mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten des Durchmessers ist, so haben wir (vergl. §. 453.):

$$1)\quad (D''A'')^2 = D''F \times D''E$$
$$2)\quad (da)^2 = dF' \times dE'.$$

Aus ähnlichen Dreiecken ergeben sich die Proportionen:

$$D''F : dF' = D''B'' : dB''$$
$$D''E : dE' = D''b : db.$$

Setzt man diese Proportionen zusammen, so folgt bei der Voraussetzung, daß $B''D'' = bd$ ist:

$$3)\quad D''F \times D''E = dF' \times dE'.$$

Aus 1) und 2) folgt in Verbindung mit 3):

$$D''A'' = da, \text{ wenn } B''D'' = bd \text{ ist.}$$

Betrachtet man also B″D″ und bd als Abscissenaxen der Hyperbeln A″B″C″ und abc, B″ und b aber als die Anfangspunkte der Abscissen, so gehören zu gleichen Abscissen gleiche Ordinaten, und zwar auf beiden Seiten der Abscissenaxe; hieraus folgt die Congruenz der beiden Hyperbeln.

Anmerkung 2. Aus dem vorstehenden §. ergiebt sich leicht folgendes Gesetz: Jede, eine Kegelfläche schneidende Ebene erzeugt, wenn sie nur mit einer Kegelseite parallel ist, eine Parabel; ist sie mit keiner Seite parallel: eine Ellipse; ist sie mit zwei Seiten parallel: eine Hyperbel.

§. 457.

Die Brennpunkte der Kegelschnitte. Die drei Hauptgesetze der drei Kegelschnitte in Bezug auf ihre Brennpunkte.

Nachdem im vorhergehenden §. im Allgemeinen die Form der drei Kegelschnitte entwickelt worden ist, soll der Leser jetzt im Besonderen mit den Punkten in den Axen der Kegelschnitte bekannt gemacht werden, welche man ihre Brennpunkte nennt, und welche für die Kegelschnitte von derselben Wichtigkeit sind, wie für den Kreis sein Mittelpunkt. In Bezug auf die Brennpunkte werden wir für jeden Kegelschnitt das Hauptgesetz angeben, aus welchem sich die Form, die Construction und die Eigenschaften des Kegelschnittes ableiten lassen,

ähnlich, wie dies beim Kreise aus dem Gesetz geschah: »Alle Radien eines Kreises sind einander gleich.«

Denkt man sich eine Kugel construirt, welche eine Kegelfläche und die Ebene eines Kegelschnittes, der in dieser Fläche liegt, berührt, so nennt man ihren Berührungspunkt mit der Ebene des Kegelschnittes einen **Brennpunkt** desselben.

Aus dieser Erklärung folgt zunächst, daß **jeder Brennpunkt eines Kegelschnittes in seiner Axe liegen muß**; denn der Mittelpunkt der Kugel liegt in der Kegelaxe (§. 337. VIII.), also auch im Haupt-Axenschnitt, und auf diesem steht die Ebene des Kegelschnittes senkrecht; folglich muß der Radius der Kugel, welcher auf der Ebene des Kegelschnittes senkrecht steht, in dem Haupt-Axenschnitt liegen (folgt aus §. 254. Nr. 2. und §. 266. Nr. 1.), also seinen Fußpunkt, welcher der Berührungspunkt ist, in der Axe des Kegelschnittes haben. Hieraus folgt weiter, daß der Mittelpunkt und der Radius der Kugel zugleich der Mittelpunkt und der Radius des **Kreises** ist, welcher die beiden Kegelseiten des Haupt-Axenschnittes und die Axe des Kegelschnittes berührt. Hierdurch ist die stereometrische Untersuchung über die Brennpunkte eines Kegelschnittes auf eine **planimetrische** zurückgeführt. Der Leser möge jetzt die Figur in §. 456. betrachten.

1) **Die Parabel.** Der Brennpunkt wird gefunden, wenn man im Haupt-Axenschnitt einen Kreis construirt, welcher E'E, F'F und BD berührt. Es giebt (weil BD ∦ E'E ist) nur einen solchen Kreis; er liegt zwischen SE, SB und BD. Die Parabel hat sonach nur **einen** Brennpunkt.

2) **Die Ellipse.** Der Brennpunkt wird gefunden, wenn man im Haupt-Axenschnitt einen Kreis construirt, welcher E'E, F'F und B'A' berührt. Es giebt aber zwei solche Kreise; der eine liegt im Dreieck SB'A' und berührt seine Seiten, der andere berührt auch die Seiten dieses Dreiecks, aber die Seite B'A' von außen. Die Ellipse hat sonach **zwei** Brennpunkte.

3) **Die Hyperbel.** Der Brennpunkt wird gefunden, wenn man den Kreis construirt, welcher E'E, F'F und dD'' berührt. Es giebt wieder zwei solche Kreise; beide berühren die Seiten des Dreiecks SB''b, der eine aber die Seite SB'' von außen, der andere die Seite Sb von außen. Die Hyperbel hat sonach ebenfalls **zwei** Brennpunkte, nämlich jede der conjugirten Hyperbeln hat einen.

Gehen wir nun auf die Kugeln zurück, welche die Kegelfläche und die Ebene des Kegelschnittes berühren, so giebt es bei der **Parabel eine** solche Kugel, und sie liegt auf der Seite der Ebene der Parabel,

auf welcher der Scheitel S der Kegelfläche liegt; bei der Ellipse giebt es zwei, und sie liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene der Ellipse; bei der Hyperbel giebt es wieder zwei, und sie liegen auf derselben Seite der Ebene der Hyperbel, auf welcher S liegt, aber jede in einer der beiden Scheitel-Kegelflächen.

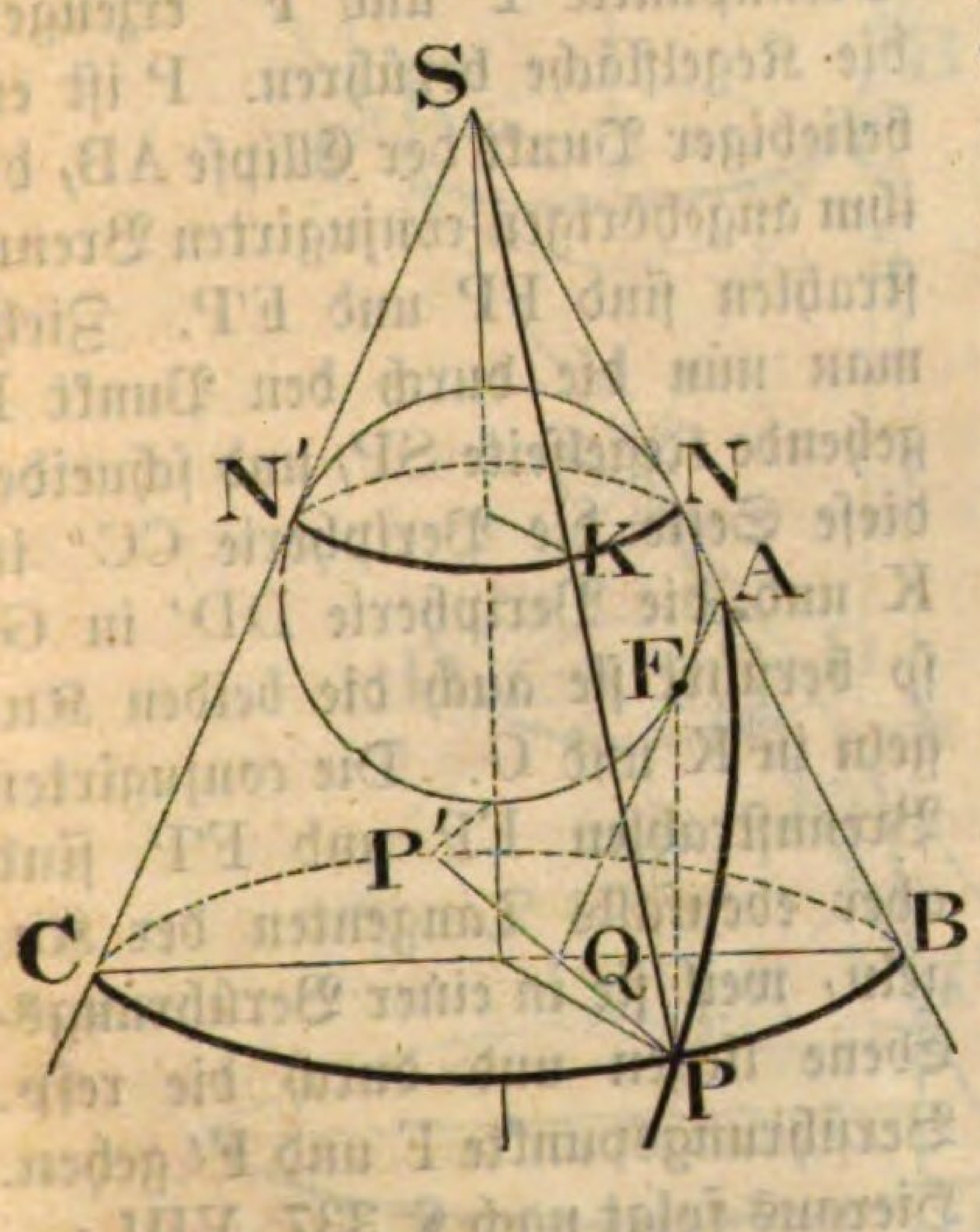
Jede gerade Linie, welche einen Brennpunkt eines Kegelschnittes mit einem beliebigen Punkt dieses Kegelschnittes verbindet, heißt ein Brennstrahl (auch Leitstrahl oder Radius vector); bei der Ellipse und Hyperbel heißen solche zwei Brennstrahlen, welche von beiden Brennpunkten nach demselben Punkt der Ellipse oder Hyperbel gezogen sind, conjugirte oder zusammengehörige Brennstrahlen. — Den Brennpunkt der Parabel bezeichnet man gewöhnlich mit F (Focus), die beiden Brennpunkte der Ellipse oder Hyperbel mit F und F'; auch wir werden uns dieser Bezeichnung fortan bedienen.

I. Das Hauptgesetz über den Brennpunkt der Parabel.

Jeder Brennstrahl nach einem beliebigen Punkte P der Parabel ist um die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel (A) größer, als die zu P gehörige Axen-Abscisse, wenn der Scheitel als Anfangspunkt der Abscissen genommen wird.

Behaupt. $FP = AQ + AF$.

Beweis. Zu der Behauptung gehört als Voraussetzung, daß die Kugel, welche die Kegelfläche in der Kreisperipherie NN' berührt, die Ebene der Parabel PAP' in F berührt; F ist dann der Brennpunkt der Parabel, und, wenn P ein beliebiger Punkt derselben ist, FP ein Brennstrahl. Legt man durch P eine die Kegelaxe senkrecht schneidende Ebene, den Kreis BC, und schneidet dieser Kreis die Ebene der Parabel in der Sehne PP', diese aber die Axe der Parabel in Q, so steht $QP \perp QA$; daher ist AQ die Axen-Abscisse des Punktes P für A als Anfangspunkt der Abscissen, während QP die Ordinate ist.



Zum Beweise des Satzes ziehe man die zu P gehörige Kegelseite SP; schneidet sie die Kreisperipherie NN' in K, so berührt sie auch die Kugel in K, und da PF auch die Kugel berührt (in F nach §. 337. V.), so ist nach §. 337. VIII.:

$$(1.) \qquad FP = KP.$$

Weil aber BCN'N ein abgekürzter senkrechter Kegel ist, so sind seine Seiten einander gleich, woraus folgt:

$$KP = NB = AB + AN; \text{ daher aus (1.):}$$

$$(2.) \qquad FP = AB + AN.$$

Nun ist aber:

$$AB = AQ \text{ (weil } \Delta\, ABQ \backsim \Delta\, SBC),$$

$$AN = AF \text{ (als Tangenten der Kugel),}$$

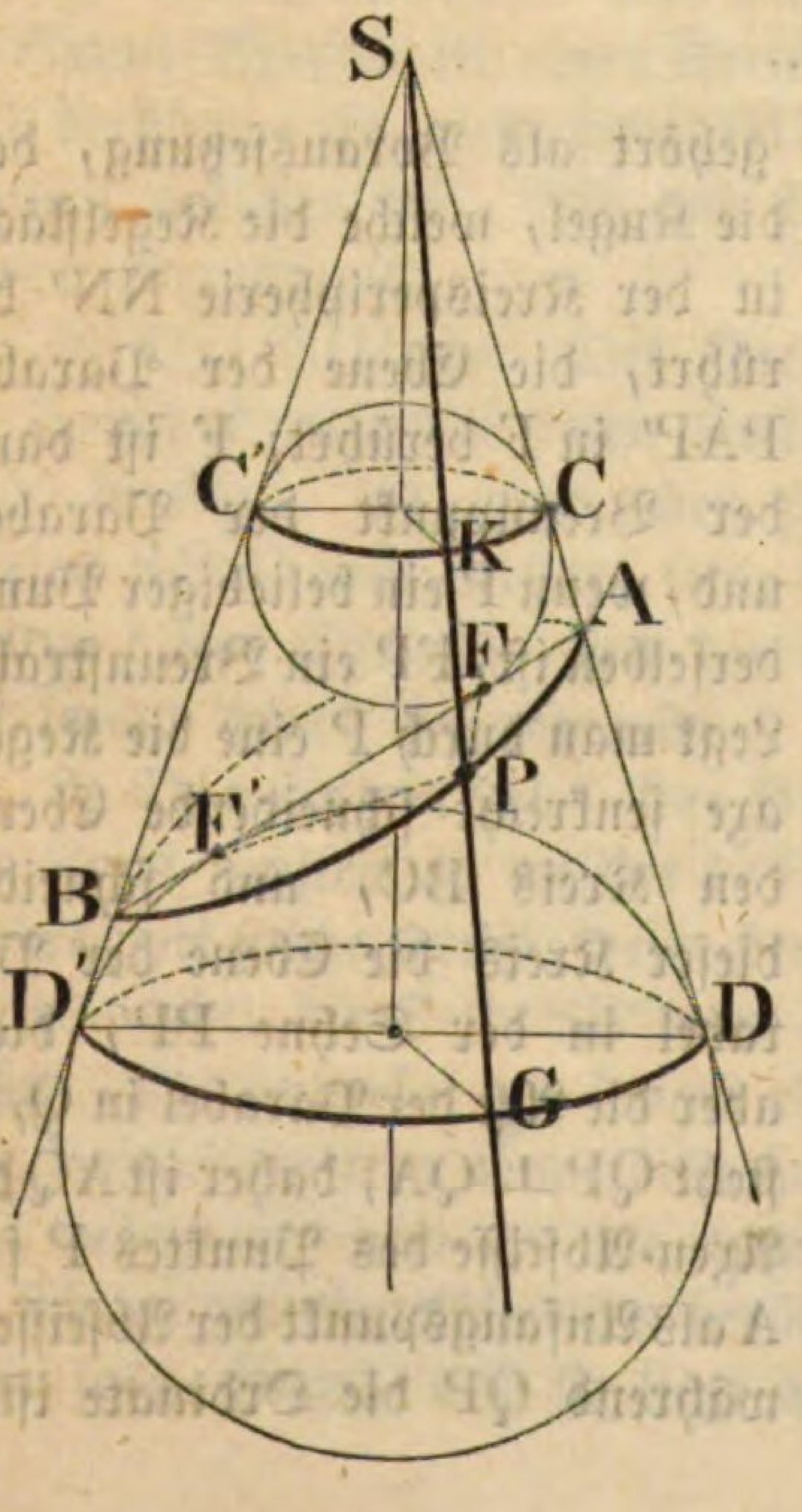
und setzt man diese Werthe in (2.) ein, so folgt:

$$FP = AQ + AF.$$

II. Das Hauptgesetz über die Brennpunkte der Ellipse.

Die Summe zweier conjugirten Brennstrahlen nach jedem Punkte (P) der Ellipse ist constant, nämlich dem Theile der Axe gleich, welcher zwischen den beiden Scheiteln (A und B) der Ellipse liegt.

Behaupt. $FP + F'P = AB$.



Beweis. Die Kreise CC' und DD' sind diejenigen, in deren Peripherien die Kugeln, welche die Brennpunkte F und F' erzeugen, die Kegelfläche berühren. P ist ein beliebiger Punkt der Ellipse AB, die ihm angehörigen conjugirten Brennstrahlen sind FP und F'P. Zieht man nun die durch den Punkt P gehende Kegelseite SP, und schneidet diese Seite die Peripherie CC' in K und die Peripherie DD' in G, so berührt sie auch die beiden Kugeln in K und G. Die conjugirten Brennstrahlen FP und F'P sind aber ebenfalls Tangenten der Kugeln, weil sie in einer Berührungs-Ebene liegen und durch die resp. Berührungspunkte F und F' gehen. Hieraus folgt nach §. 337. VIII.:

$$FP + F'P = KP + GP \text{ oder}$$

$$(1.) \quad FP + F'P = KG.$$

Weil aber KG eine Seite des abgekürzten Kegels CC'D'D ist, so folgt

$$(2.) \quad KG = CD = AC + AD.$$

Da ferner AC und AF Tangenten sind, von einem Punkt A an dieselbe Kugel gelegt, und weil dasselbe von AD und AF' gilt, so ist AC = AF und AD = AF'; daher folgt aus (1.) und (2.):

$$(3.) \quad FP + F'P = AF + AF'.$$

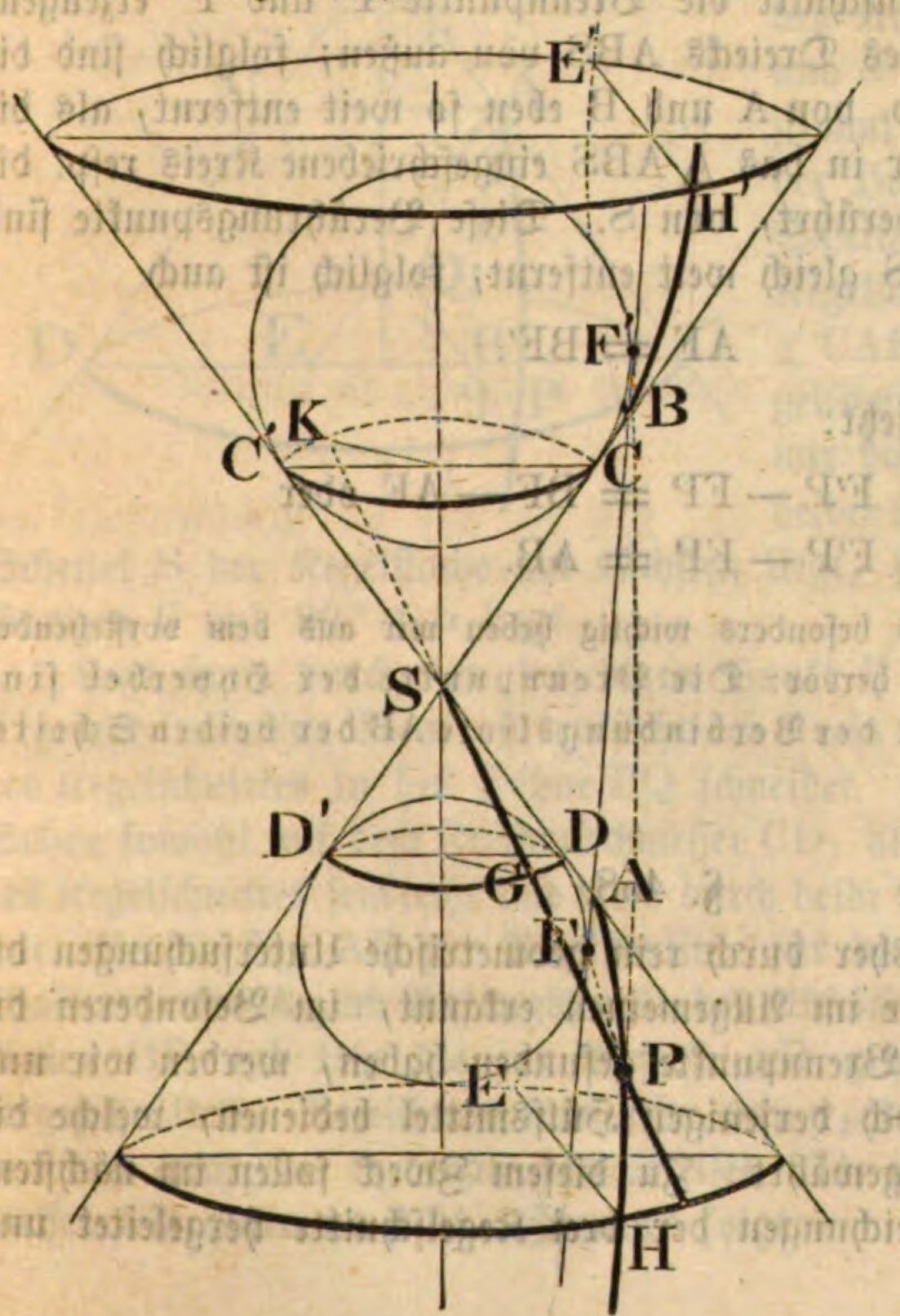
Mit Rücksicht auf das oben unter 2) Gesagte folgt aber aus §. 188, daß ein Brennpunkt (F') der Ellipse eben so weit von dem einen Scheitel entfernt ist, als der andere Brennpunkt (F) von dem andern Scheitel; es ist also AF' = BF, folglich aus (3.):

$$FP + F'P = AF + BF \text{ oder}$$

$$(4.) \quad FP + F'P = AB.$$

Anmerk. Als besonders wichtig heben wir aus dem vorstehenden Beweise das Gesetz hervor: **Die Brennpunkte der Ellipse sind vom Mittelpunkte der Verbindungslinie AB der beiden Scheitel gleich weit entfernt.**

III. Das Hauptgesetz über die Brennpunkte der Hyperbel.



Die Differenz zweier conjugirten Brennstrahlen nach jedem beliebigen Punkt (P) der beiden zusammengehörigen Hyperbeln ist constant, nämlich gleich dem Theile der Axe, welcher zwischen den beiden Scheiteln (A und B) liegt.

Behauptung: $F'P - FP = AB$.

Bew. Die Kugeln, welche die Brennpunkte F und F' der conjugirten Hyperbeln EAH und E'BH' erzeugen, berühren die Kegelfläche in den Kreisperipherien DD' und CC'; P

ist ein beliebiger Punkt der Hyperbel. Zieht man die Kegelseite SP, und schneidet sie die Kreisperipherien DD' und CC' in G und K, so berührt sie auch die beiden Kugeln in diesen Punkten, und weil auch die Brennstrahlen PF und PF' Tangenten der Kugeln sind, so folgt:

$$PF' = PK \quad \text{und} \quad PF = PG; \text{ daher ist}$$
$$(1.) \qquad F'P - FP = GK.$$

Zwischen den Kreisen DD' und CC' liegt ein Doppel-Kegel DD'CC', dessen Seiten als Summen gleicher Theile einander gleich sind. Es ist daher:

$$GK = D'C = BD' - BC$$
$$= BF - BF' \text{ (Tangenten der Kugel).}$$

Aus (1.) folgt nun, wenn man den Werth von GK substituirt:

$$(2.) \qquad F'P - FP = BF - BF'.$$

Mit Rücksicht auf das oben unter 3.) Gesagte ergiebt sich aber aus §. 188., daß die Brennpunkte F und F' resp. von den Scheiteln A und B der Hyperbel gleich weit entfernt sind; denn die Kreise, welche im Haupt-Axenschnitt die Brennpunkte F und F' erzeugen, berühren die Seiten des Dreiecks ABS von außen; folglich sind die Punkte F und F' resp. von A und B eben so weit entfernt, als die Punkte, in welchen der in das Δ ABS eingeschriebene Kreis resp. die Seiten AS und BS berührt, von S. Diese Berührungspunkte sind aber bekanntlich von S gleich weit entfernt; folglich ist auch

$$AF = BF'.$$

Aus (2.) ergiebt sich jetzt:

$$F'P - FP = BF - AF \text{ oder}$$
$$(3.) \qquad F'P - FP = AB.$$

Anmerkung. Als besonders wichtig heben wir aus dem vorstehenden Beweise folgendes Gesetz hervor: Die Brennpunkte der Hyperbel sind von dem Mittelpunkt der Verbindungslinie AB der beiden Scheitel gleich weit entfernt.

§. 458.

Nachdem wir bisher durch rein geometrische Untersuchungen die Form der Kegelschnitte im Allgemeinen erkannt, im Besonderen die Hauptgesetze für ihre Brennpunkte gefunden haben, werden wir uns in der Folge auch noch derjenigen Hülfsmittel bedienen, welche die Coordinaten-Theorie gewährt. Zu diesem Zweck sollen im nächsten, ersten Kapitel die Gleichungen der drei Kegelschnitte hergeleitet und

mittelst derselben allgemeine Untersuchungen über die Kegelschnitte geführt werden; in den folgenden drei Kapiteln werden wir im Besonderen die Parabel, die Ellipse und die Hyperbel abhandeln.

Erstes Kapitel.

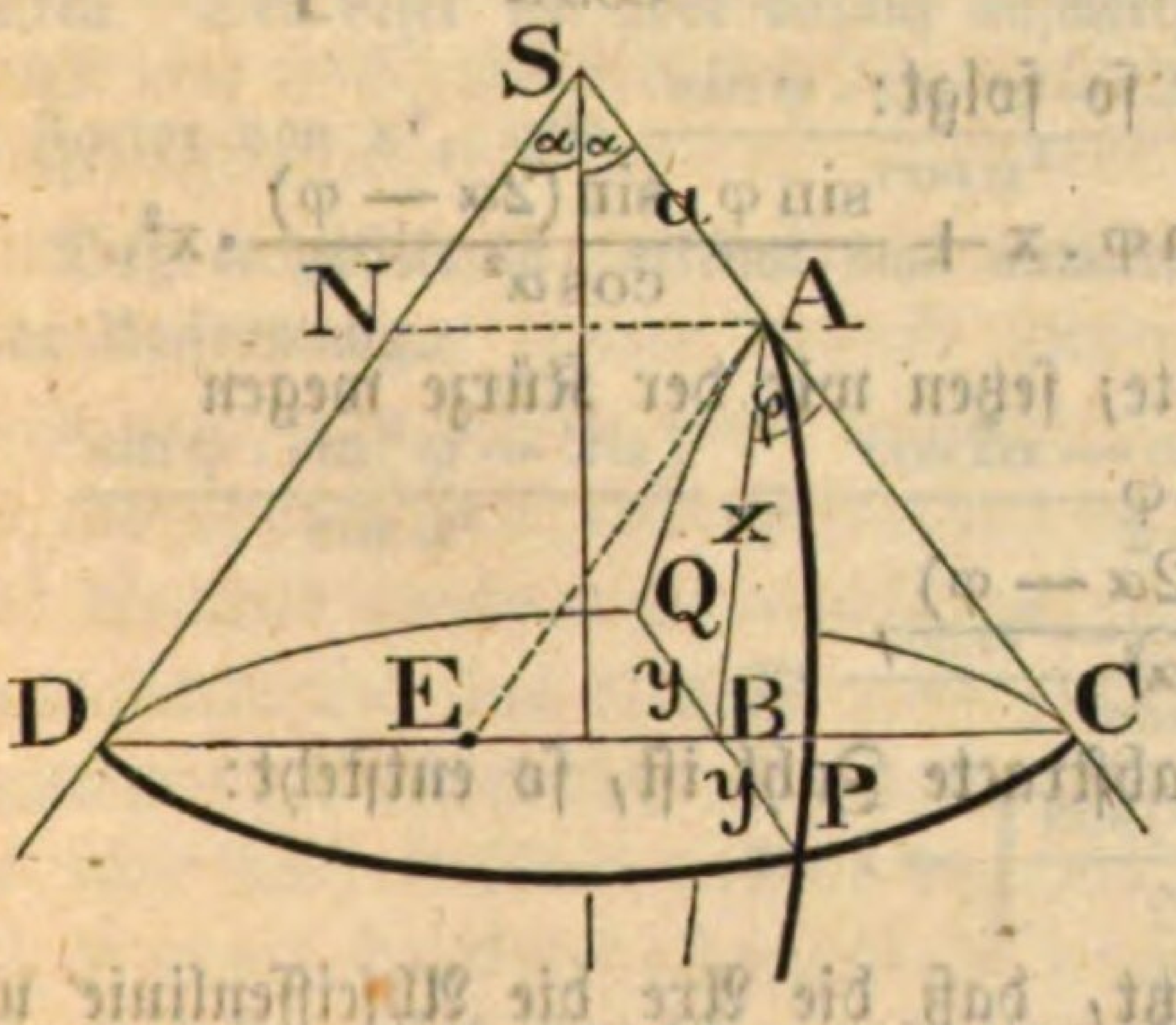
Die Gleichungen der Kegelschnitte. Allgemeine Untersuchungen mittelst dieser Gleichungen.

§. 459.

Herleitung der Scheitelgleichung jedes Kegelschnittes.

Eine Kegelfläche, deren Seiten mit der Axe den Winkel α bilden, ist durch eine Ebene geschnitten; man soll die Gleichung des entstandenen Kegelschnittes herleiten.

Auflösung. Die Axe des Kegelschnittes bilde mit der Seite des Hauptaxenschnittes, in welcher sein Scheitel liegt, den Winkel φ, und der Scheitel habe von dem Scheitel der Kegelfläche den Abstand a; durch a, φ und α ist der Kegelschnitt bestimmt (§. 455.). Es sei SDC der Hauptaxenschnitt, A der Scheitel und AB die Axe des Kegelschnittes, also SA = a, $\measuredangle$ CAB = φ. Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, so setzen wir voraus, daß A derjenige beider Scheitel ist, welcher dem Scheitel S der Kegelfläche am nächsten liegt, so daß φ zwischen den Grenzen 0 und $90^\circ + \alpha$ liegt.



Legt man durch den beliebigen Punkt B der Axe AB eine zur Kegelaxe senkrechte Ebene, so entsteht der Kreis CD, welcher die Ebene des Kegelschnittes in der Sehne PQ schneidet. Es steht alsdann diese Sehne sowohl auf dem Kreisdurchmesser CD, als auch auf der Axe AB des Kegelschnittes senkrecht und wird durch beide Linien halbirt. Wählen wir also die Axe AB zur Abscissenlinie für die Gleichung des Kegelschnittes, und A zum Anfangspunkt der Abscissen, so sind die gleichen Linien BP und BQ die zur Abscisse AB gehörigen Ordinaten des Kegelschnittes. Bezeichnen wir jede mit y, die Abscisse AB mit x, so ist y auch eine Ordinate des Kreises CD, welche auf dem Durchmesser CD senkrecht steht. Hieraus folgt:

1) $y^2 = BC \times BD$,

und diese Gleichung gilt sowohl für BP, als auch für BQ. Um nun die gesuchte Gleichung des Kegelschnittes zwischen x und y zu erhalten, haben wir nur nöthig, BC und BD durch x und die gegebenen Größen a, φ und α auszudrücken. BC ergiebt sich unmittelbar aus dem ΔABC, BD aber, wenn man im Hauptaxenschnitt AE $\ddagger$ SD und AN $\ddagger$ CD zieht, aus den beiden Theilen DE und EB, von denen der erstere gleich AN ist, der zweite aber aus dem Δ ABE sich berechnen läßt, in welchem der Winkel BAE $= 2\alpha - \varphi$ ist. Aus dem Gesagten folgt:

$$2)\quad BC = \frac{x \,.\, \sin\varphi}{\cos\alpha}$$

$$3)\quad BD = 2a \,.\, \sin\alpha + \frac{x \,.\, \sin(2\alpha - \varphi)}{\cos\alpha}.$$

Substituirt man die Werthe von BC und BD in 1), so entsteht:

$$y^2 = \frac{x \sin\varphi}{\cos\alpha} \cdot \left[2a \sin\alpha + \frac{x \sin(2\alpha - \varphi)}{\cos\alpha}\right].$$

Löst man die Klammern auf, so folgt:

$$\text{I.}\quad y^2 = 2a \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sin\varphi \,.\, x + \frac{\sin\varphi \,.\, \sin(2\alpha - \varphi)}{\cos\alpha^2} \cdot x^2.$$

Diese Gleichung ist die gesuchte; setzen wir der Kürze wegen

$$4)\quad p = 2a \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sin\varphi$$

$$5)\quad q = \frac{\sin\varphi \,.\, \sin(2\alpha - \varphi)}{\cos\alpha^2},$$

so daß p eine Linie, q eine abstracte Zahl ist, so entsteht:

$$\text{II.}\quad y^2 = px + qx^2.$$

Da diese Gleichung voraussetzt, daß die Axe die Abscissenlinie und der Scheitel der Anfangspunkt der Abscissen ist, so heißt sie die Scheitel-Gleichung des Kegelschnittes.

Der Kegelschnitt ist eine Parabel, Ellipse, oder Hyperbel, je nachdem $\varphi = 2\alpha$, $\varphi > 2\alpha$, oder $\varphi < 2\alpha$ ist. Aus 5) erhält man dann

bei der Parabel q gleich Null,
» » Ellipse q negativ,
» » Hyperbel q positiv.

Hieraus folgt die besondere Form der Scheitelgleichung der drei Kegelschnitte:

die Scheitelgleichung der Parabel: $y^2 = px$
» » » Ellipse: $y^2 = px - qx^2$
» » » Hyperbel: $y^2 = px + qx^2$.

Ist $\varphi = 90° + \alpha$, so wird der Kegelschnitt ein **Kreis**; es ergiebt sich in diesem Falle

$$p = 2a \sin\alpha, \quad q = -1.$$

Die Gleichung selbst wird also:

$$y^2 = 2a \sin\alpha . x - x^2,$$

so daß $2a \sin\alpha$ der Durchmesser ist (§. 427. II.), in der Figur die Linie AN.

Anmerkung 1. Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, also $\varphi > 2\alpha$, so folgt aus I.

$$y^2 = 2a . \operatorname{tg}\alpha . \sin\varphi . x - \frac{\sin\varphi . \sin(\varphi - 2\alpha)}{\cos\alpha^2} . x^2.$$

Dieselbe Gleichung erhält man auch, wenn $\varphi > 90° + \alpha$ ist, wenn also A der Scheitel der Ellipse ist, welcher von S weiter entfernt ist, als der andere Scheitel. Die Entwickelung der Gleichung der Ellipse weicht in diesem Falle von der Entwickelung oben nicht ab, man muß nur die Figur analog construiren. Der Leser sei aber darauf aufmerksam gemacht, daß in jedem Falle der Factor von x^2, also $\frac{\sin\varphi . \sin(\varphi - 2\alpha)}{\cos\alpha^2}$, ein positiver **ächter** Bruch ist. Daß er positiv ist, erkennt man unmittelbar; daß er ächt ist, zeigt folgende Umformung:

$$\frac{\sin\varphi . \sin(\varphi - 2\alpha)}{\cos\alpha^2} = \frac{\cos 2\alpha - \cos(2\varphi - 2\alpha)}{2\cos\alpha} \text{ §. 217. (4.)}$$

$$= \frac{\cos\alpha^2 - \cos(\varphi - \alpha)^2}{\cos\alpha^2} \text{ §. 215. XV.}$$

$$= 1 - \left[\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}\right]^2.$$

Aus $\varphi > 2\alpha$ folgt aber $\varphi - \alpha > \alpha$; folglich ist $\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}$ ein ächter Bruch, und zwar auch dann, wenn $\varphi - \alpha$ stumpf ist. — Denn wäre letzteres nicht der Fall, so müßte $180° - (\varphi - \alpha) < \alpha$, also $180° < \varphi$ sein. — Hieraus folgt weiter, daß $\left[\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}\right]^2$ immer ein **positiver** ächter Bruch ist, daher auch $1 - \left[\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}\right]^2$.

Anmerkung 2. Aus der Gleichung I. kann man auch die Fälle erkennen, in welcher der Kegelschnitt keine krumme Linie ist. Setzen wir z. B. $a = 0$, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$y = \pm x\sqrt{q}$$

und stellt, wenn q positiv ist, zwei Kegelseiten vor. Ist q negativ ($\varphi > 2\alpha$), so bedeutet die Gleichung den Punkt S, weil sie nur **ein** reelles Coordinatenpaar

hat: $x = 0$ und $y = 0$. — Setzen wir $\varphi = 0$ oder $\varphi = 180°$, so nimmt die Gleichung I. die Form

$$y = 0$$

an und ist bekanntlich die Gleichung der X-Axe, in unserem Falle die Gleichung der Kegelseite, in welcher dann die Ebene PAQ die Kegelfläche berührt. — Selbst die Gleichung $x = 0$ (die Gleichung der Y-Axe) kann man als Kegelschnitt betrachten, wenn man sich nämlich den Grenzfall der Kegelfläche denkt, in welchem sie in die Ebene übergeht. Multiplicirt man I. mit $\cos\alpha^2$ und setzt dann $\alpha = 90°$, so entsteht $x = \sqrt{0} = 0$.

§. 460.

Beweis, daß jede Curve, deren Gleichung die Form $y^2 = px + qx^2$ hat, ein Kegelschnitt ist.

Die Aufgabe im vorhergehenden §. hat uns aus dem Raume in die Ebene geführt, denn die Gleichung des Kegelschnittes

$$y^2 = px + qx^2$$

gilt für Coordinaten in seiner Ebene und gestattet, die weiteren Untersuchungen in dieser Ebene zu führen. Dem Beweise, daß jede Curve, deren Gleichung die Form $y^2 = px + qx^2$ hat, ein Kegelschnitt ist, schicken wir eine allgemeine Bemerkung über die Kegelschnitte voraus.

Die Eigenschaft der krummen Linien, welche man Kegelschnitte nennt, daß sie nämlich durch Schneiden einer Ebene mit einer Kegelfläche entstehen, ist nicht von so hervorragender Bedeutung, um ihre Erklärung am Kegel zu einer nothwendigen zu machen; vielmehr kann man zu ihnen und zur Erkenntniß ihrer Gestalt und der vielen merkwürdigen Eigenschaften, durch welche sie für praktische Anwendungen, namentlich in der Mechanik, überaus wichtig werden, auf sehr verschiedenen Wegen gelangen. So z. B. lassen sie sich durch die in §. 457. angeführten Gesetze als geometrische Oerter in der Ebene erklären, und sollte hierbei der gemeinschaftliche Ursprung vermißt werden, so weisen wir auf ein späteres Gesetz hin, nach welchem jeder Kegelschnitt als der geometrische Ort eines Punktes erklärt werden kann, dessen Abstand von einem gegebenen Punkte zu seinem Abstande von einer gegebenen Linie ein constantes Verhältniß $n : m$ hat. Endlich lassen sich die Kegelschnitte durch die Form ihrer Gleichung charakterisiren. Wir werden später zeigen, wie jede Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei Coordinaten, falls sie die Bedeutung einer Curve zuläßt, auf die Form $y^2 = px + qx^2$ mit reellen Constanten gebracht werden kann, wir werden jetzt zeigen, daß diese Gleichung immer einem Kegelschnitte angehört: folglich können wir allgemein die Kegelschnitte als die Curven des zweiten Grades erklären.

Was ihre Erklärung am Kegel betrifft, so gewährt diese dem Leser am unmittelbarsten ein klares Bild der Gestalt dieser Curven, auch ist ihr Zusammenhang mit dem Kegel in vielen praktischen Fällen, z. B. in der beschreibenden Geometrie, von Wichtigkeit; endlich aber ist ihre Entwickelung am Kegel die historische, denn am Kegel sind die Kegelschnitte — worauf schon der Namen hinweist — von den Griechen gefunden und untersucht worden.

Bei der Untersuchung der Curve $y^2 = px + qx^2$ schließen wir den Fall $p = 0$ immer aus; über ihn ist alles Nöthige in der Anmerk. 2. des vorhergehenden §. gesagt worden. Ferner brauchen wir den Fall »p ist negativ« nicht besonders zu untersuchen; denn die beiden Curven

$$y^2 = px + qx^2 \quad \text{und} \quad y^2 = -px + qx^2$$

sind congruent und unterscheiden sich von einander nur durch ihre Lage. Liegt die eine vom Anfangspunkt der Abscissen aus nach rechts (die X-Axe horizontal gedacht), so liegt die andere nach links; sie liegen symmetrisch zur Y-Axe auf verschiedenen Seiten derselben. Der Grund ergiebt sich in Verbindung mit §. 415. daraus, daß jede der beiden Gleichungen in die andere übergeht, wenn man $-x$ statt x setzt.

Wir gehen jetzt zu der Frage über: ist jede Curve, deren Gleichung die Form

$$y^2 = px + qx^2$$

hat, wenn p und q reell sind, ein Kegelschnitt? Eine krumme Linie stellt diese Gleichung immer vor, weil sich immer unendlich viele stetig auf einander folgende Werthe für x bestimmen lassen, für welche $px + qx^2$ positiv, also y reell wird. Daß die Linie krumm sein muß, folgt aus dem Grade ihrer Gleichung. Die vorliegende Frage würde zu bejahen sein, wenn sich immer eine Kegelfläche finden ließe, in welche die Curve $y^2 = px + qx^2$ gelegt werden kann. Bezeichnet nun α den Winkel, den jede Seite einer Kegelfläche mit der Axe bildet, und schneidet man diese Fläche durch eine Ebene so, daß der Scheitel des entstandenen Kegelschnittes vom Mittelpunkt S der Kegelfläche den Abstand a hat, seine Axe aber mit der Kegelseite, in welcher der Scheitel liegt, den Winkel φ einschließt, so würde nach §. 459. Nr. 4.) und 5.) die Gleichung des Kegelschnittes mit der Gleichung $y^2 = px + qx^2$ identisch werden, also die dieser Gleichung angehörige Curve ein Kegelschnitt sein, wenn φ, α und a so bestimmt werden könnten, daß

$$(1.) \qquad 2a \operatorname{tg}\alpha . \sin\varphi = p$$

$$(2.) \qquad \frac{\sin\varphi . \sin(2\alpha - \varphi)}{\cos\alpha^2} = q$$

wird; man hat also eine diophantische Aufgabe aufzulösen. Aus (2.) folgt auf dem in §. 459. Anmerk. 1. angegebenen Wege oder unmittelbar aus §. 216. XVII.

$$\frac{\cos(\alpha - \varphi)^2 - \cos\alpha^2}{\cos\alpha^2} = q,$$

und hieraus ergiebt sich

$$(3.) \quad \cos(\alpha - \varphi) = \pm\cos\alpha . \sqrt{1 + q}.$$

Kann man α und φ dieser Bedingung gemäß bestimmen, so ergiebt sich a aus (1.) immer reell, nämlich:

$$(4.) \quad a = \frac{p}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha . \sin\varphi}.$$

Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

1) q ist gleich Null, so daß die gegebene Gleichung $y^2 = px$ heißt.

Die Gleichung (3.) geht dann in folgende über:

$$\cos(\alpha - \varphi) = \pm\cos\alpha$$

und hat die für unsern Zweck passende Auflösung

$$\varphi = 2\alpha, \text{ und dann ist } a = \frac{p}{4\sin\alpha^2}.$$

Die Curve $y^2 = px$ ist also immer eine Parabel und läßt sich in jede beliebige Kegelfläche legen.

2) q ist negativ, so daß die gegebene Gleichung $y^2 = px - qx^2$ heißt.

Die Gleichung (3.) geht dann in folgende über:

$$\cos(\alpha - \varphi) = \pm\cos\alpha . \sqrt{1 - q}.$$

Ist $q = 1$, so folgt hieraus $\varphi = 90° + \alpha$, daher $a = \frac{p}{2\sin\alpha}$; die Curve ist ein Kreis.

Ist $q < 1$, so ist $\cos\alpha . \sqrt{1 - q}$ für jeden Werth von α ein ächter Bruch; daher giebt es immer einen spitzen Winkel, dessen cos. gleich $\cos\alpha . \sqrt{1 - q}$ ist, und dieser Winkel muß größer als α sein. Bezeichnen wir ihn mit $\alpha + \delta$, so folgt

$$\cos(\alpha - \varphi) = \pm\cos(\alpha + \delta),$$

und diese Gleichung hat zwei für unsern Fall passende Auflösungen:

$$\varphi = 2\alpha + \delta \quad \text{und} \quad \varphi = 180° - \delta.$$

Diesen Winkeln entsprechend ist dann:

$$a = \frac{p}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha . \sin(2\alpha + \delta)} \quad \text{und} \quad a = \frac{p}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha . \sin\delta}.$$

Die Untersuchung hat zu zwei Ellipsen geführt, welche der gegebenen Gleichung entsprechen, deren Axen aber im Haupt-Axenschnitt congruente Dreiecke erzeugen $\Big($die Dreiecke haben gleiche Winkel, und in beiden ist die dem Winkel 2α gegenüberliegende Seite gleich $\frac{p \cdot \cos\alpha^2}{\sin\delta \cdot \sin(2\alpha + \delta)}\Big)$; daher fallen beide Auflösungen im Wesentlichen in eine zusammen; es liegt die eine Ellipse zu jeder Kegelseite des Haupt-Axenschnittes so, wie die andere Ellipse zu der andern Kegelseite. — Im vorliegenden Falle ist also die Curve $y^2 = px - qx^2$ immer eine Ellipse.

Ist endlich $q > 1$, so gestattet die Gleichung

$$\cos(\alpha - \varphi) = \pm \cos\alpha . \sqrt{1 - q}$$

keine Auflösung, weil $\sqrt{1-q}$ imaginär wird. Ist dann die Curve keine Ellipse? Auf diese Frage bemerken wir zunächst, daß die vorstehende Gleichung nur sagt: die Curve $y^2 = px - qx^2$ läßt sich, wenn $q > 1$ ist, nicht so in die Kegelfläche eintragen, daß der Anfangspunkt der Abscissen in eine Kegelseite des Haupt-Axenschnittes fällt. Das schließt aber die Möglichkeit nicht aus, sie auf eine andere Art in die Kegelfläche einzutragen und so als Ellipse zu constatiren. Läßt sich aber ein solches Eintragen ausführen, so muß nothwendig die Curve noch einen andern Scheitel haben, und ihre Gleichung für diesen Scheitel als Anfangspunkt der Abscissen und für die zugehörige Axe als Abscissenlinie muß dann nicht nur auch die Form $y^2 = p'x - q'x^2$ haben, sondern es muß auch, wenn q **größer** als 1 war, dann allemal q' **kleiner** als 1 sein. Nun findet das Alles aber wirklich Statt, und da wir den Nachweis hierüber in §. 464. führen werden, so können wir mit Vorbehalt dieses Nachweises sagen: die Curve $y^2 = px - qx^2$ ist immer eine Ellipse und läßt sich in jede beliebige Kegelfläche legen.

3) q ist **positiv**, so daß die gegebene Gleichung

$$y^2 = px + qx^2 \text{ heißt.}$$

Die Gleichung (3.) war:

$$\cos(\alpha - \varphi) = \pm \cos\alpha . \sqrt{1 + q}.$$

Aus $q > 0$ folgt $\cos\alpha . \sqrt{1+q} > \cos\alpha$, und da man α immer so bestimmen kann, daß $\cos\alpha . \sqrt{1+q}$ gleich 1 oder kleiner als 1 wird, so giebt es für einen solchen Werth von α auch immer einen spitzen Winkel, dessen cos. gleich $\cos\alpha . \sqrt{1+q}$ ist, und dieser Winkel ist kleiner als α. Bezeichnen wir ihn mit $\alpha - \delta$, so folgt

$$\cos(\alpha - \varphi) = \pm \cos(\alpha - \delta).$$

Diese Gleichung hat die beiden Auflösungen

$$\varphi = 2\alpha - \delta \quad \text{und} \quad \varphi = \delta.$$

Aehnlich, wie bei der Ellipse, kommen auch hier beide Auflösungen im Wesentlichen auf eine hinaus (durch Vertauschen der Scheitel-Kegelflächen). Wir bemerken dem Leser nur, daß, wenn die Axe einer der beiden conjugirten Hyperbeln mit der Kegelseite, in welcher ihr Scheitel liegt, den Winkel $2\alpha - \delta$ bildet, dann die Axe der andern ihre Kegelseite unter dem Winkel δ schneidet. — Wir haben also gefunden: die Curve $y^2 = px + qx^2$ ist immer eine Hyperbel; sie läßt sich aber nur in eine solche Kegelfläche legen, für welche $\cos\alpha \overline{\gtrless} \frac{1}{\sqrt{1+q}}$ ist. Für $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+q}}$ ist $\varphi = \alpha$; es wird alsdann die Ebene der Hyperbel mit der Kegelaxe parallel.

Beispiel 1. Wie läßt sich die Parabel $y^2 = \frac{1}{2}x$ in eine Kegelfläche legen, deren Seite mit der Axe einen Winkel von 72° bildet?

Antw. Durch den Punkt einer Seite der Kegelfläche, welcher vom Scheitel derselben den Abstand 0,1381966 hat, lege man eine auf dem zugehörigen Axenschnitt senkrechte und mit der gegenüberliegenden Seite parallele Ebene; sie schneidet die Kegelfläche in der gegebenen Parabel.

Beispiel 2. Wie läßt sich die Parabel $y^2 = 12x$ in eine Kegelfläche legen, deren Seite mit ihrer Axe einen Winkel von 45° bildet?

Antw. Der Scheitel der Parabel muß vom Scheitel der Kegelfläche den Abstand 6 erhalten; das Uebrige, wie im vorigen Beispiel.

Beispiel 3. Die Ellipse $y^2 = 3x - \frac{1}{2}x^2$ soll in eine Kegelfläche gelegt werden, deren Seite mit ihrer Axe einen Winkel von 60° bildet.

Aufl. Durch den Punkt einer Seite der Kegelfläche, welcher vom Scheitel derselben den Abstand 1,11905 hat, legt man eine auf dem zugehörigen Axenschnitt senkrechte Ebene so, daß sie mit der Seite einen Winkel von 129° 17′ 42,7″ bildet; diese Ebene erzeugt die gegebene Ellipse.

Beispiel 4. Dieselbe Aufgabe, aber die Seite der Kegelfläche soll mit ihrer Axe einen Winkel von 10° bilden.

Aufl. Mit Bezug auf die vorhergehende Auflösung ist jetzt der Abstand vom Scheitel der Kegelfläche = 10,2777 und der Winkel = 55° 51′ 50″.

Beispiel 5. In welche Kegelfläche läßt sich die Hyperbel $y^2 = 4x + x^2$ so eintragen, daß ihre Ebene mit der Kegelaxe parallel wird, und welchen Abstand hat dann ihr Scheitel von dem Scheitel der Kegelfläche?

Antw. Die Seite der Kegelfläche muß mit ihrer Axe einen Winkel von 45° bilden; der gesuchte Abstand ist = 2,8284.

Beispiel 6. Es sind zwei Kegelflächen gegeben; in der einen bildet die Seite mit der Axe einen Winkel von 50°, in der andern einen Winkel von 70°. Läßt sich die Hyperbel $y^2 = 2x + 3x^2$ in beide Kegelflächen legen, oder nur in die eine? Welche Lage hat die schneidende Ebene dann?

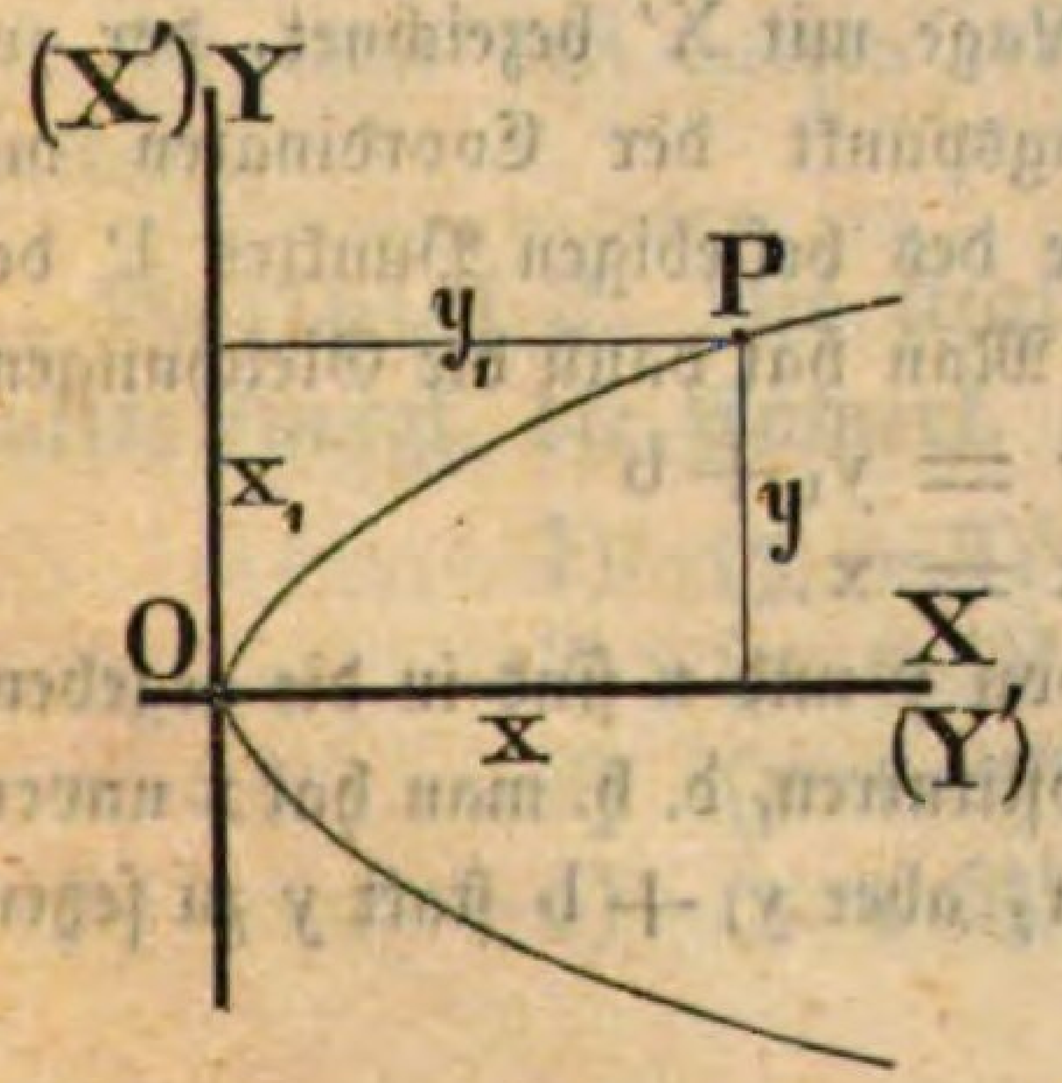
Aufl. Bezeichnet a den Abstand des Scheitels der Hyperbel vom Scheitel der Kegelfläche, φ den Winkel, den die Axe der Hyperbel mit der Kegelseite bildet, in welcher ihr Scheitel liegt, und α den Winkel, welchen jede Kegelseite mit der Kegelaxe bildet, so ist der kleinste Werth von α, bei welchem die gegebene Hyperbel noch in die Kegelfläche gelegt werden kann, $\alpha = 60°$; und dann ist auch $\varphi = 60°$, also die Ebene der Hyperbel mit der Kegelaxe parallel, und $a = \frac{2}{3}$; folglich läßt sich die Hyperbel nur in die zweite gegebene Kegelfläche legen. Man erhält $\varphi = 23° \, 9' \, 37''$ und $a = 0{,}9254155$; oder auch $\varphi' = 116° \, 50' \, 23''$ und $a' = 0{,}4079135$. — Es ist schon erwähnt worden, wie beide Auflösungen mit einander zusammenhängen. Jede Hyperbel besteht aus zwei conjugirten Hyperbeln; gehören φ und a zu der einen, so gehören φ' und a' zur andern, und umgekehrt.

§. 461.

Verwandlung der Gleichung einer Curve durch Vertauschen der Axen und paralleles Verschieben derselben.

Die nachstehenden Umformungen gelten für beliebige Curven; da wir nur Gelegenheit haben, sie bei Kegelschnitten anzuwenden, so werden wir die Beispiele von diesen Curven entnehmen.

I. Ist die Gleichung einer Curve gegeben, und will man die Gleichung derselben Curve für die Bedingung haben, daß die Y-Axe die Axe der Abscissen und die X-Axe die Axe der Ordinaten sein soll, während die Curve ihre absolute Lage nicht ändern soll, so hat man nur nöthig, die Coordinaten x und y mit einander zu vertauschen. (Der Anfangspunkt der Coordinaten bleibt hierbei unverändert.) — Umgekehrt: vertauscht man in der Gleichung einer Curve x mit y, während man die Bedeutung der Axen beibehält, so bleibt die Form der Curve unverändert, sie nimmt nur zur Y-Axe und X-Axe jetzt die Lage an, welche sie vorher resp. zur X-Axe und Y-Axe hatte.



Beweis. Wir wollen die Coordinaten der Curve bei der veränderten Lage der Axen mit x_1 und y_1 bezeichnen; diese unterscheidende Bezeichnung ist dann nicht nöthig, wenn kein Mißverständniß zu befürchten ist. Die neuen Axen mögen X′ und Y′ sein. — Ist P ein beliebiger Punkt der Curve und sind x und y seine Coordinaten für die Axen X und Y, x und y aber für die neuen Axen X′ und Y′, so ist

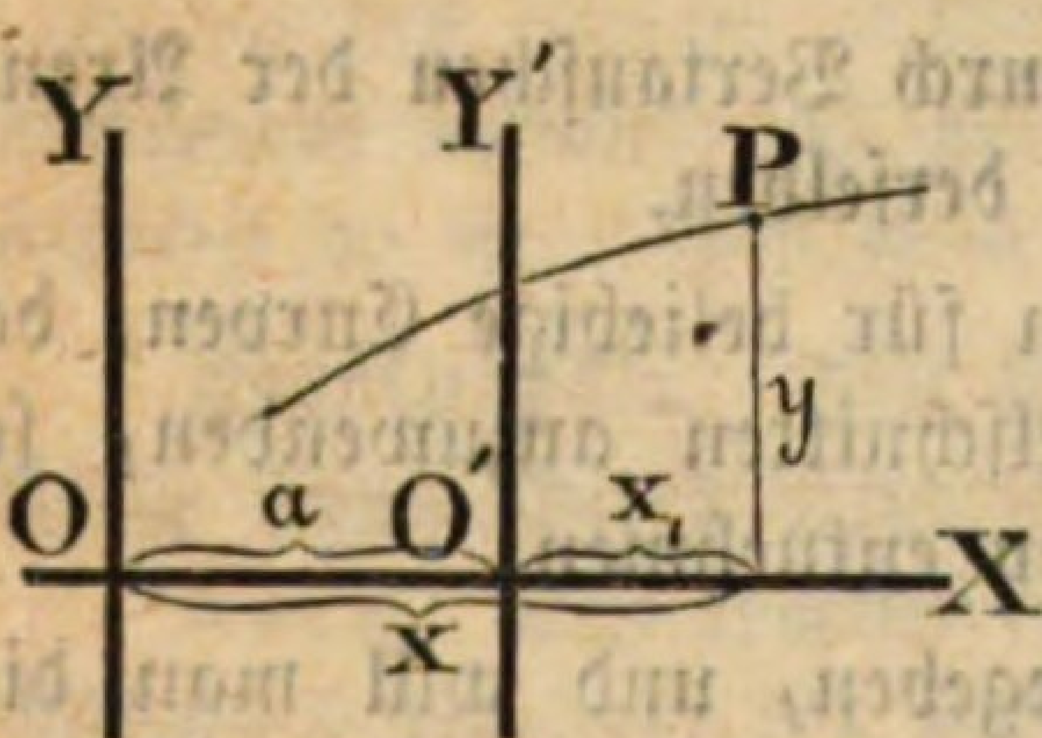
1) $y = x_1$

2) $x = y_1$.

Substituirt man diese Werthe von y und x in die gegebene Gleichung, so erhält man die Gleichung der Curve für die Axen X′ und Y′ (§. 438.). Da man aber die Coordinaten x_1 und y_1 jetzt auch mit x und y bezeichnen kann, so erkennt man, daß die neue Gleichung aus den ursprünglichen durch Vertauschen der Coordinaten entstanden ist. — Den zweiten Theil des Satzes erhält man, wenn man die ganze Figur so verlegt, daß X′ und Y′ die Lage erhalten, welche vorher X und Y hatten.

II. Ist die Gleichung einer Curve für ein bestimmtes Coordinaten-System gegeben, und will man die Gleichung derselben Curve für das Coordinaten-System haben, welches entsteht, wenn man die Y-Axe um die Länge a parallel mit ihrer ursprünglichen Lage verschiebt, und zwar im positiven oder negativen Sinne, je nachdem a positiv oder negativ ist: so braucht man nur in die ursprüngliche Gleichung $x + a$ statt x zu setzen.

Beweis. Die Y-Axe in ihrer neuen Lage ist in der Figur mit Y′ bezeichnet, der zugehörige Anfangspunkt der Coordinaten mit O′, die Abscisse des beliebigen Punktes P der Curve mit x_1. Man hat dann die Gleichungen



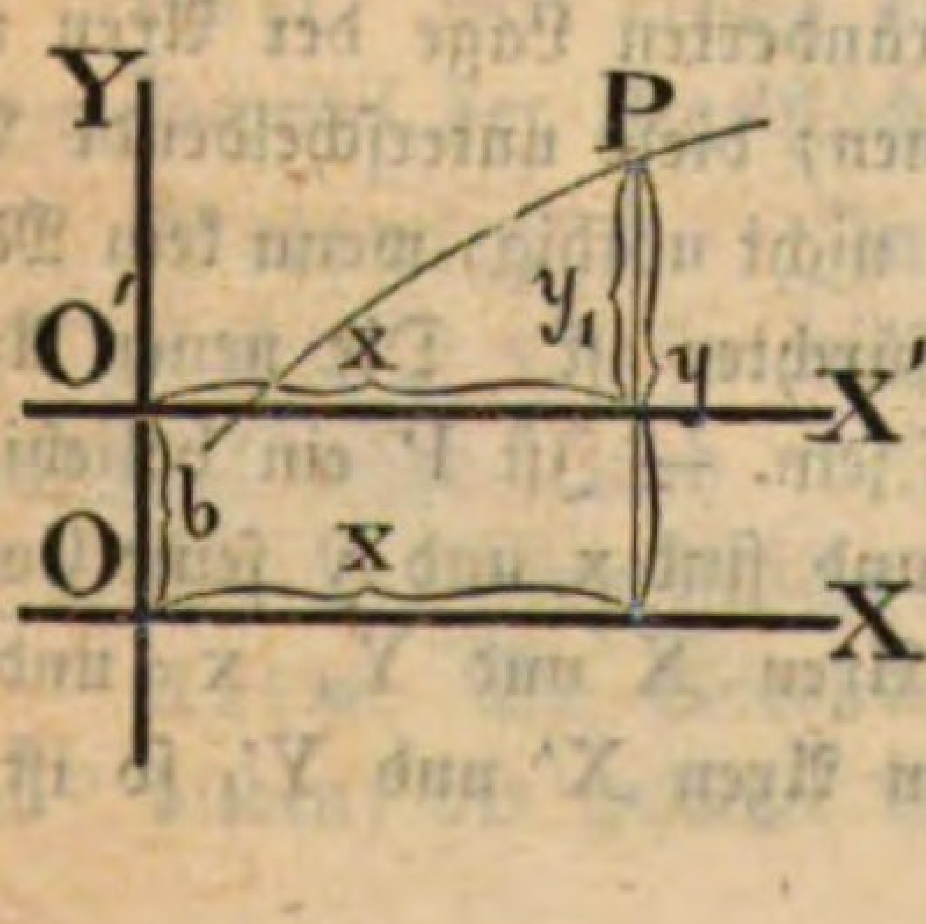
1) $y = y$

2) $x = x_1 + a$.

Diese Werthe von y und x sind in die gegebene Gleichung zu substituiren, d. h. y bleibt unverändert, und statt x ist $x_1 + a$ zu setzen, woraus die Richtigkeit des Satzes folgt.

III. Läßt man aber die Y-Axe in ihrer Lage, verschiebt hingegen die X-Axe parallel mit ihrer ursprünglichen Lage um die Länge b, und zwar wieder im positiven oder negativen Sinne, je nachdem b positiv oder negativ ist: so erhält man aus der ursprünglichen Gleichung der Curve ihre Gleichung für das neue Coordinaten-System, wenn man $y + b$ statt y setzt.

Beweis. Die X-Axe ist in ihrer neuen Lage mit X′ bezeichnet, der zugehörige Anfangspunkt der Coordinaten mit O′, die Ordinate des beliebigen Punktes P der Curve mit y_1. Man hat dann die Gleichungen:

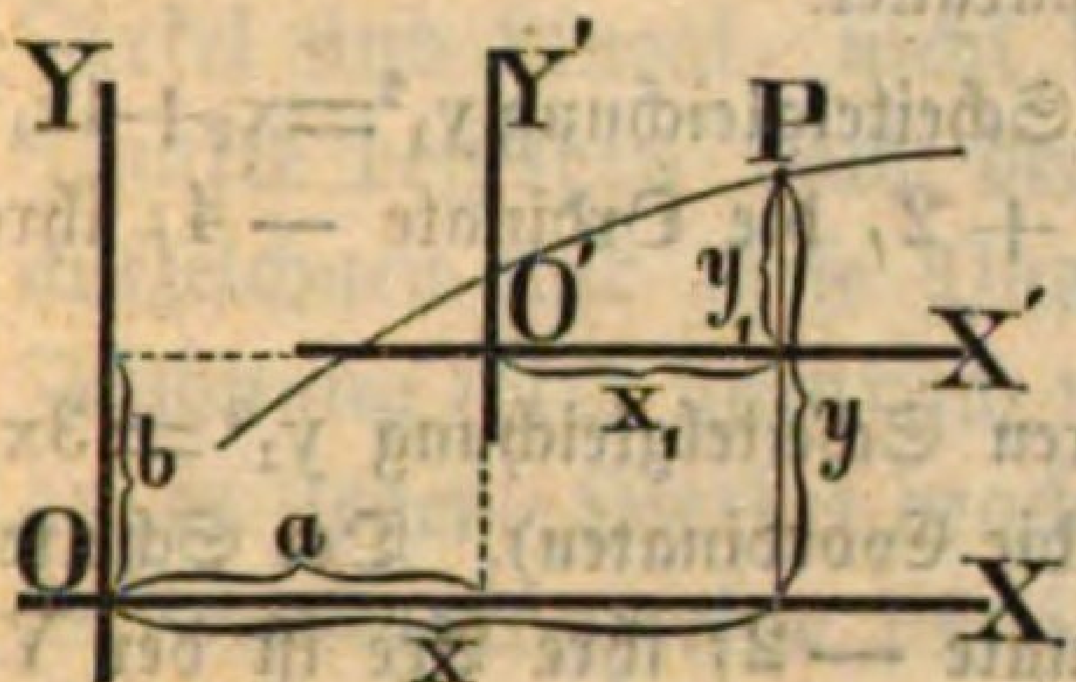


1) $y = y_1 + b$

2) $x = x$.

Diese Werthe von y und x sind in die gegebene Gleichung zu substituiren, d. h. man hat x unverändert zu lassen, aber $y_1 + b$ statt y zu setzen.

IV. Wenn man endlich sowohl die Y-Axe um die Länge a, als auch die X-Axe um die Länge b parallel mit ihrer ursprünglichen Lage verschiebt, beide Axen im positiven oder negativen Sinne, je nachdem resp. a oder b positiv oder negativ sind: so erhält man aus der ursprünglichen Gleichung der Curve ihre Gleichung für das neue Coordinaten-System, wenn man $x + a$ statt x, und $y + b$ statt y setzt.



Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus II. und III., oder auch mit Hülfe der Gleichungen:

1) $y = y_1 + b$
2) $x = x_1 + a$,

wenn man die Werthe von x und y in die gegebene Gleichung substituirt.

Anmerkung. Will man außer dem Vertauschen oder Verschieben der Axen auch noch die Coordinaten-Richtungen ändern, so hat man nach §. 415. nur nöthig, $-x$ statt x und $-y$ statt y zu setzen. — In allen angegebenen Fällen kann man leicht von der neuen Gleichung zur alten zurückkehren. Im Falle I., wenn man wieder die Coordinaten vertauscht, in den andern Fällen, wenn man wieder x statt $x + a$ (oder $x - a$ statt x) und y statt $y + b$ (oder $y - b$ statt y) setzt.

Beispiel 1. Sind die drei Curven

1) $y = 2x^2$
2) $y^2 - 6y + 3x^2 = 0$
3) $y^2 + \frac{1}{8}y = \frac{1}{2}x^2$

Kegelschnitte?

Antw. Ja, sie sind in der angegebenen Folge eine Parabel, Ellipse und Hyperbel; denn man kann sie durch Vertauschen der Coordinaten auf die Form bringen:

1) $y^2 = \frac{1}{2}x$
2) $y^2 = 2x - \frac{1}{3}x^2$
3) $y^2 = \frac{1}{4}x + 2x^2$.

In Bezug auf das gegebene Coordinaten-System ist der Durchschnittspunkt der Axen bei allen drei Curven der Scheitel, und die Y-Axe die Axe des Kegelschnittes.

Beispiel 2. Wo liegt die Axe und der Scheitel folgender Kegelschnitte (vergl. die Anmerk. oben):

1) $(y - 3)^2 = 4(x + 5)$
2) $(y + 1)^2 = 3x - \frac{1}{2}x^2$
3) $(y + 4)^2 = (x - 2) + 4(x - 2)^2$
4) $(x + 5)^2 = 3(y + 2)$?

Aufl. Zu 1.) Verschiebt man die Y-Axe parallel um die Länge —5, die X-Axe um die Länge +3, so erhält man die Scheitelgleichung der Parabel $y_1^2 = 4x_1$. Daher hat in Bezug auf das der gegebenen Gleichung zugehörige Coordinaten-System der Scheitel die Abscisse —5 und die Ordinate +3; die Axe der Parabel ist der X-Axe parallel.

Zu 2.) Die Curve ist eine Ellipse, deren Scheitelgleichung $y_1^2 = 3x - \frac{1}{2}x^2$ heißt. Der Scheitel hat die Abscisse 0 und die Ordinate —1, er liegt also in der Y-Axe; die Axe der Ellipse ist der X-Axe parallel.

Zu 3.) Die Curve ist eine Hyperbel, deren Scheitelgleichung $y_1^2 = x_1 + 4x_1^2$ heißt. Der Scheitel der Hyperbel hat die Abscisse +2, die Ordinate —4; ihre Axe ist mit der X-Axe parallel.

Zu 4.) Die Curve ist eine Parabel, deren Scheitelgleichung $y_1^2 = 3x_1$ heißt (man vertausche in der gegebenen Gleichung die Coordinaten). Der Scheitel der Parabel hat die Abscisse —5 und die Ordinate —2; ihre Axe ist der Y-Axe parallel.

Anmerkung. Wünscht der Leser ein Bild von der Lage und Gestalt der gegebenen Curven durch Zeichnung zu erhalten, so ist für jetzt nur der folgende Weg zu diesem Zwecke zu empfehlen. Man rechnet mehrere zusammengehörige Coordinatenwerthe von x und y aus, namentlich in der Nähe des gefundenen Scheitels der Curve, indem man für x bequeme, etwa ganze, Zahlen setzt und aus der gegebenen Gleichung die zugehörigen Werthe von y sucht. Jedes reelle Coordinaten-Paar giebt einen Punkt der Curve. Diese Punkte zeichne man auf und verbinde sie mittelst freier Handzeichnung durch eine Curve. Bei der vierten Aufgabe z. B. erhält man schon ein recht anschauliches Bild der gegebenen Parabel, wenn man in die Gleichung $(x+5)^2 = 3(y+2)$ für x die Zahlen —2, —3, —4, —5, —6, —7 und —8 setzt und zu jedem x den zugehörigen Werth von y sucht. Ist man erst vertrauter mit der Gestalt einer gegebenen Curve, so reichen oft sehr wenig Coordinaten-Paare hin, um die Curve richtig aufzeichnen und eine ausgeführte Rechnung durch diese Zeichnung controliren zu können.

§. 462.

Außer den Gleichungen der Kegelschnitte, deren Abscissenlinie eine Axe des Kegelschnittes ist, kommen in den Anwendungen hauptsächlich noch die Gleichungen vor, deren Abscissenlinien der Axe des Kegelschnittes parallel sind, oder auf ihr senkrecht stehen. Wir werden diese Gleichungen in den nächsten drei §§., in welchen die Lage und Form der drei Kegelschnitte im Allgemeinen aus ihrer Scheitelgleichung entwickelt werden wird, für jeden Kegelschnitt besonders angeben, dann aber zu der allgemeinen Gleichung des Kegelschnittes übergehen. Wir schicken die nachfolgenden Bemerkungen, welche für alle drei Kegelschnitte gelten, voraus.

Aus der Scheitelgleichung des Kegelschnittes $y^2 = px + qx^2$

ergiebt sich $y = \pm\sqrt{px + qx^2}$; folglich gehören zu jeder Abscisse zwei gleiche, aber auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenlinie liegende Ordinaten. Hieraus folgt, daß die Abscissenlinie eine Axe des Kegelschnittes ist. Daß der Anfangspunkt der Abscissen ein Scheitel des Kegelschnittes ist, ergiebt sich ebenfalls aus der Scheitelgleichung; für $x = 0$ ist auch $y = 0$.

Die Construction des Kegelschnittes ist elementar, also nur mit Zirkel und Lineal, nicht ausführbar; indeß kann man beliebig viele Punkte desselben nach den Constructionen der algebraischen Analysis aufzeichnen und diese Punkte durch eine krumme Linie verbinden; die Zeichnung wird natürlich um so genauer, je näher diese Punkte an einander liegen. Hierbei beachte man, daß in der Gleichung $y^2 = px + qx^2$, die Constante p eine Linie, q eine abstracte Zahl ist. Bei allen drei Kegelschnitten heißt die Linie p der Parameter des Kegelschnittes; folglich ist bei der Parabel das Quadrat der Ordinate gleich dem Rechteck aus dem Parameter und der Abscisse, bei der Ellipse ist dieses Quadrat kleiner, bei der Hyperbel aber größer als das Rechteck. Am einfachsten wird die Construction bei der Parabel, denn hier ist $y = \sqrt{p \times x}$; bei der Hyperbel und Ellipse schreibe man $y = \sqrt{x.(p \pm qx)}$.

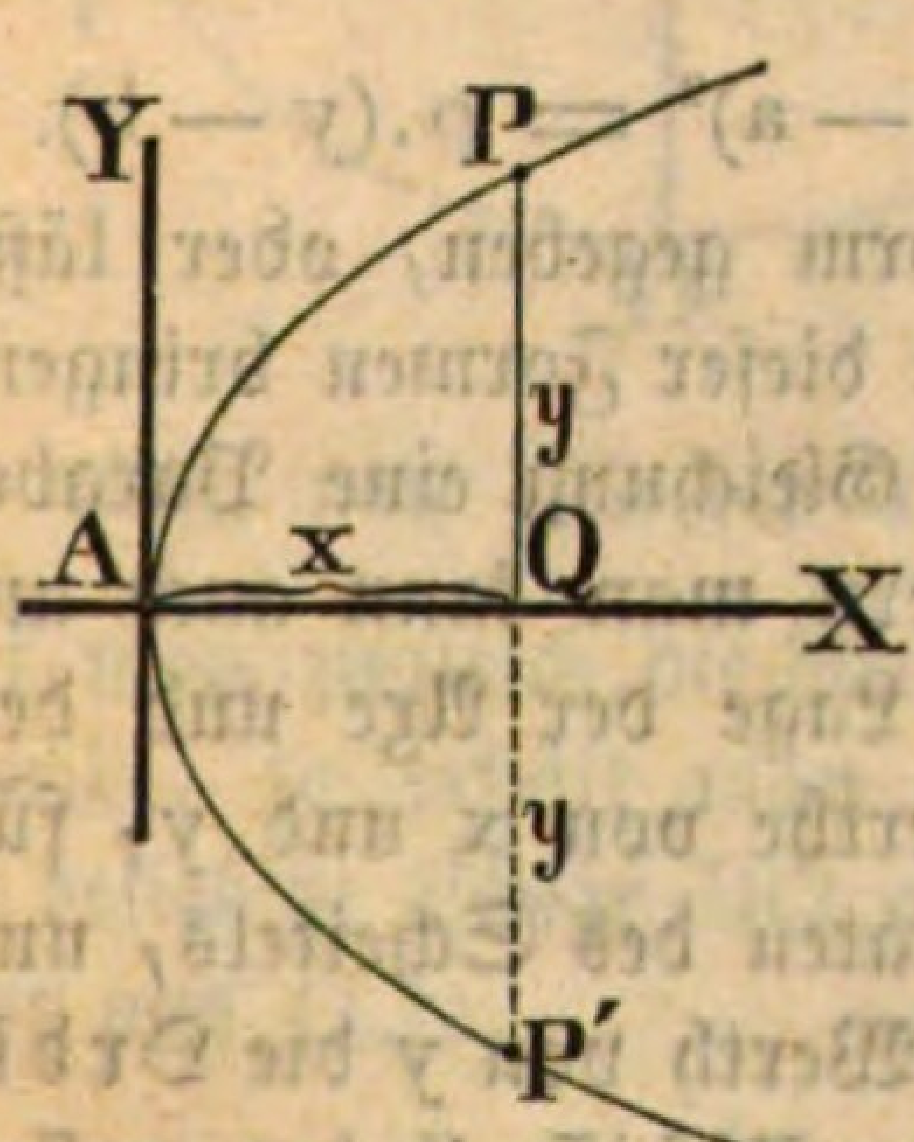
§. 463.

Die Parabel und ihre Gleichungen.

Bei der Untersuchung der Lage und Gestalt der Parabel gehen wir von ihrer Scheitelgleichung aus:

I. $y^2 = px$.

Es sei AX die Axe der Parabel, A der Anfangspunkt der Abscissen, also der Scheitel, AQ eine beliebige Abscisse x, QP (und auch QP′) die zugehörige Ordinate y. Den Parameter p können wir nach der in §. 460. gemachten Bemerkung positiv annehmen.



Für alle Werthe von x zwischen den Grenzen $-\infty$ bis 0 wird y imaginär, für $x = 0$ ist auch $y = 0$, und für alle Werthe von x zwischen den Grenzen 0 und $+\infty$ ist y reell. Je größer x wird, desto größer wird y, und für $x = +\infty$ ist $y = \pm\infty$. Links von A liegt also kein Punkt der Parabel PAP′, nach rechts aber erstreckt sich diese Curve in zwei congruenten Zweigen AP und AP′ ins Unend-

liche, und ihre Punkte entfernen sich mit steigenden Werthen von x immer mehr und mehr von der Axe.

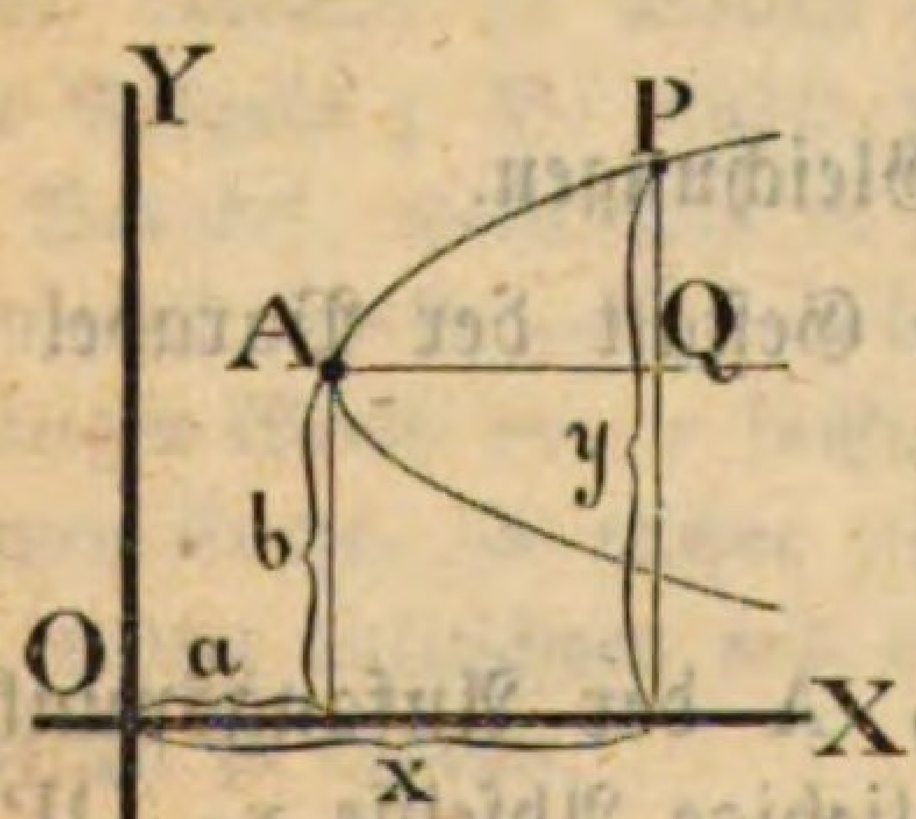
Die Gleichung der Parabel für eine Abscissenlinie, welche mit der Axe der Parabel parallel ist, erhält man nach §. 461., wenn man die Coordinaten-Axen parallel verschiebt. In der ersten Figur unten ist die Y-Axe um die Länge $-a$, die X-Axe um die Länge $-b$ verschoben worden, d. h. es ist $x-a$ statt x und $y-b$ statt y gesetzt worden. Soll aber die Gleichung der Parabel für eine Abscissenlinie hergeleitet werden, welche auf der Axe der Parabel senkrecht steht, so vertausche man zunächst x mit y (also auch X mit Y) und verschiebe nun die neue Y-Axe um die Länge $-a$ und die neue X-Axe um die Länge $-b$; man erhält dann die in der zweiten Figur dargestellte Lage. Uebrigens kann man in beiden Fällen die Gleichung unmittelbar aus der Figur ablesen; es ist in beiden Figuren, wenn p der Parameter ist,

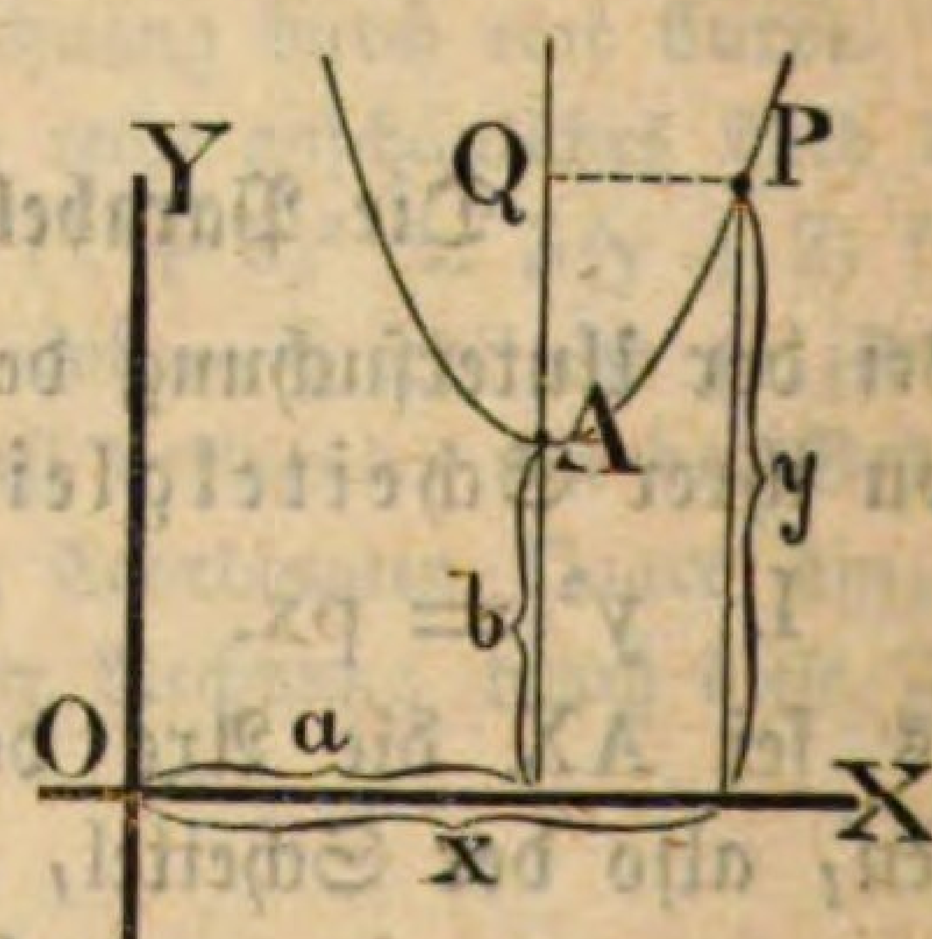
$$PQ^2 = p . AQ.$$

In der ersten Figur ist $PQ = y - b$ und $AQ = x - a$; in der zweiten ist $PQ = x - a$ und $AQ = y - b$. Man erhält hiernach

die Gleichung der Parabel, wenn die Abscissenlinie

1) mit der Axe der Parabel parallel ist: 2) auf der Axe der Parabel senkrecht steht:





II. $(y-b)^2 = p.(x-a)$. III. $(x-a)^2 = p.(y-b)$.

Ist eine Gleichung in einer solchen Form gegeben, oder läßt sich eine Gleichung zwischen x und y auf eine dieser Formen bringen, so weiß man umgekehrt nicht nur, daß diese Gleichung eine Parabel vorstellt, wenn a, b und p reell sind, sondern man kann auch unmittelbar die Coordinaten des Scheitels, die Lage der Axe und den Parameter angeben. Namentlich sind die Werthe von x und y, für welche beide Seiten Null werden, die Coordinaten des Scheitels, und zwar ist der Werth von x die Abscisse, der Werth von y die Ordinate, und die Axe der Parabel ist der gegebenen Abscissenlinie parallel, oder steht auf ihr senkrecht, je nachdem die Gleichung das Quadrat

von y, oder das Quadrat von x enthält. Um diese Lagen nicht mit einander zu verwechseln, möge der Leser beachten, daß bei paralleler Lage der Parabel-Axe mit der Abscissenlinie (mit Ausnahme des Scheitels) zu jedem x zwei Werthe von y gehören, bei senkrechter Lage hingegen zu jedem Werth von x nur ein Werth von y. — Ergiebt sich der Parameter p negativ, so liegt die Parabel von A aus in der ersten Figur nach links, in der zweiten nach unten.

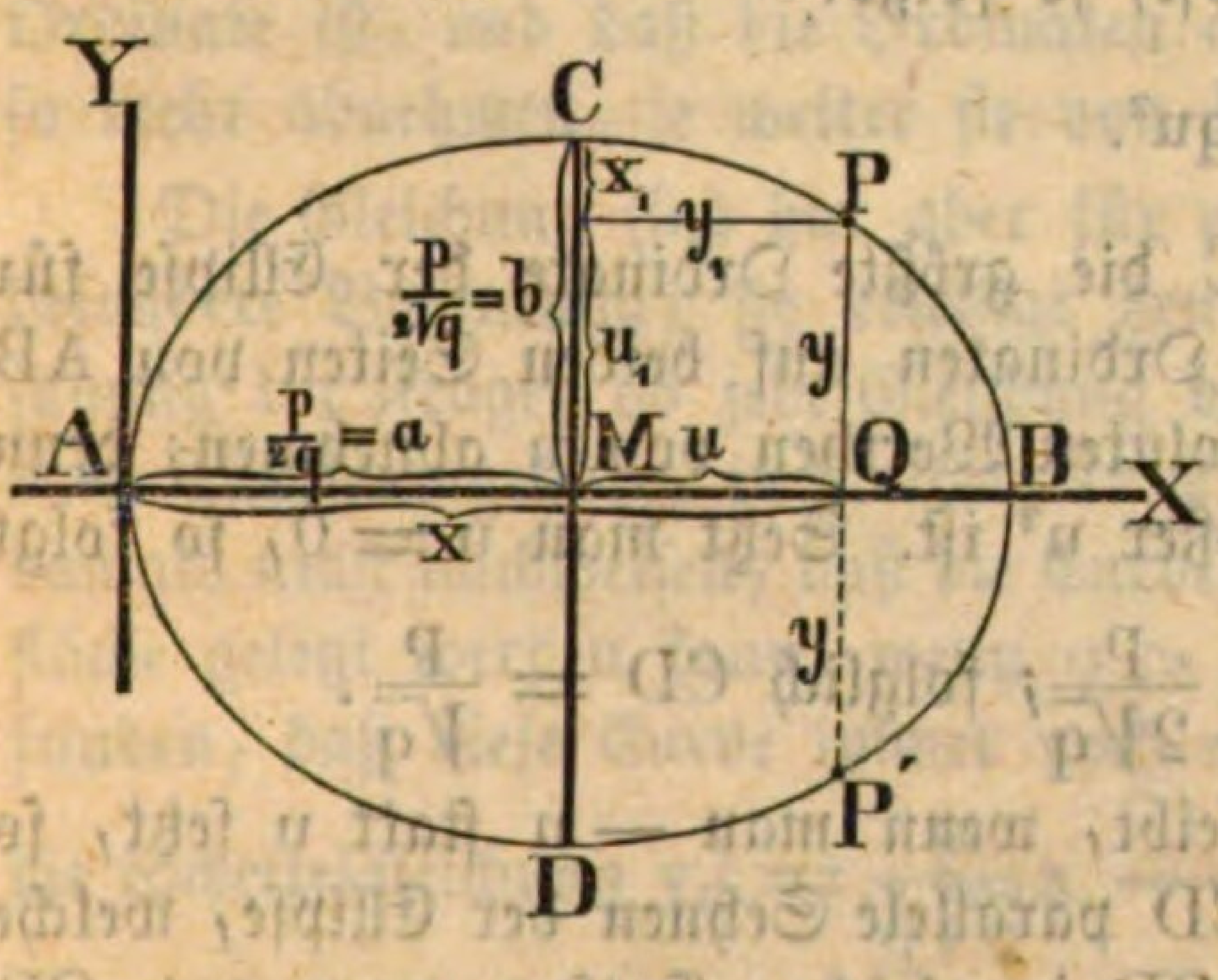
§. 464.

Die Ellipse und ihre Gleichungen.

Wir gehen von der Scheitelgleichung der Ellipse

$$(1.)\quad y^2 = px - qx^2$$

aus und können, wie bei der Parabel, den Parameter p positiv annehmen. Formen wir diese Gleichung um: $y^2 = x(p - qx)$, so folgt, daß y imaginär wird, wenn $x < 0$, also negativ, und auch wenn $x > \frac{p}{q}$ ist; für $x = 0$ und für $x = \frac{p}{q}$ ist $y = 0$; für jeden Werth von x zwischen 0 und $\frac{p}{q}$ ist y reell. Hieraus folgt, daß die Ellipse eine geschlossene Curve ist, welche die Axe in zwei Punkten schneidet. Ist A der Anfangspunkt der Abscissen, AX



die Abscissenlinie, und macht man $AB = \frac{p}{q}$, so sind A und B diese beiden Punkte, also zwei Scheitel der Ellipse, welche der Axe AB angehören. Für die beliebige Abscisse $AQ = x$ ist QP (und QP') die zugehörige Ordinate y.

Verlegt man den Anfangspunkt der Abscissen von A nach B, rückt man also die Y-Axe um die Länge $\frac{p}{q}$ nach rechts, und ändert man zugleich die Richtung der Abscissen, indem man $-x$ statt x schreibt, so erhält man wieder eine Scheitelgleichung der Ellipse für die beliebige Länge BQ als Abscisse und QP als Ordinate. Es entsteht aus (1.):

$$y^2 = p\left(-x + \frac{p}{q}\right) - q\left(-x + \frac{p}{q}\right)^2.$$

Löst man die Klammern auf, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$(2.)\quad y^2 = px - qx^2;$$

sie stimmt also mit der Gleichung (1.) nicht nur in der Form, sondern auch in den Constanten vollständig überein. Die Ellipse ist daher so gleichförmig gebildet, daß ihre Gestalt, wenn man sie von A nach B hin verfolgt, genau mit ihrer Gestalt von B nach A hin übereinstimmt. Während also die Scheitelgleichung $y^2 = px - qx^2$ unmittelbar lehrt, daß die Axe AB die Ellipse in zwei congruente Theile zerlegt, weist die vorstehende Reduction dieser Gleichung auf B als Anfangspunkt der Abscissen darauf hin, daß die Ellipse auch durch eine auf AB in ihrer Mitte senkrechte Linie (CD) in zwei congruente Theile zerlegt werden kann. Um dies besser zu erkennen, wollen wir aus der Gleichung (1.), welche für A als Anfangspunkt der Abscissen galt, ihre Gleichung für den Mittelpunkt M der Axe AB als Anfangspunkt der Abscissen und MB als Abscissenlinie herleiten. Da $AM = \frac{p}{2q}$ ist, so müssen wir die Y-Axe um die Länge $\frac{p}{2q}$ nach rechts verschieben, und erhalten, wenn wir die neue Abscisse MQ mit u bezeichnen:

$$y^2 = p\left(u + \frac{p}{2q}\right) - q\left(u + \frac{p}{2q}\right)^2.$$

Werden die Klammern aufgelöst, so folgt:

$$(3.)\quad y^2 = \frac{p^2}{4q} - qu^2.$$

Die Gleichung zeigt, daß MC die größte Ordinate der Ellipse für die Axe AB ist, und daß die Ordinaten auf beiden Seiten von AB gleichmäßig mit steigenden absoluten Werthen von u abnehmen; denn y^2 wird um so kleiner, je größer u^2 ist. Setzt man $u = 0$, so folgt

$$MC = MD = \frac{p}{2\sqrt{q}};\ \text{folglich}\ CD = \frac{p}{\sqrt{q}}.$$

Da in (3.) y unverändert bleibt, wenn man $-u$ statt u setzt, so folgt hieraus, daß zwei mit CD parallele Sehnen der Ellipse, welche auf verschiedenen Seiten von CD in gleichen Entfernungen von CD liegen, gleich sind; hieraus folgt, daß CD die elliptische Ebene halbirt. Noch klarer zeigt sich dies durch Vertauschen der Axen. Machen wir MC zur Abscissenaxe und MB zur Ordinatenaxe, so erhalten wir die Gleichung der Ellipse, wenn wir in (3.) y mit u vertauschen (§. 461. I.). Nennen wir die neue Abscisse u_1 und die Ordinate y_1, so entsteht aus (3.):

$$u_1^2 = \frac{p^2}{4q} - q \cdot y_1^2\ \text{oder:}$$

$$(4.)\quad y_1^2 = \frac{p^2}{4q^2} - \frac{1}{q} \cdot u_1^2.$$

Verlegen wir endlich noch den Anfangspunkt der Abscissen von M nach C, ändern wir auch die Richtung der Abscissen und bezeichnen die neuen Abscissen mit x_1, so folgt aus (4.), wenn $-x_1 + \frac{p}{2\sqrt{q}}$ statt u_1 gesetzt wird:

$$y_1^2 = \frac{p^2}{4q^2} - \frac{1}{q} \cdot \left(-x_1 + \frac{p}{2\sqrt{q}}\right)^2.$$

Hieraus ergiebt sich durch Auflösen der Klammern:

$$(5.)\quad y_1^2 = \frac{p}{q\sqrt{q}} x_1 - \frac{1}{q} x_1^2.$$

Dieselbe Gleichung entsteht, wenn man D zum Anfangspunkt der Abscissen und DC zur Abscissenlinie macht.

Die Gleichungen (4.) und (5.) zeigen am deutlichsten, daß CD eine Axe der Ellipse ist; denn zu jedem Werth von u (oder x_1) gehören zwei gleich lange, auf verschiedenen Seiten von CD liegende Ordinaten; CD halbirt also die elliptische Ebene und die Ellipse selbst. Die Punkte C und D sind zwei Scheitel der Ellipse. Die Gleichung (4.) zeigt noch im Besondern, daß MB für die Axe CD die größte Ordinate ist, und daß die Ordinaten auf beiden Seiten von MB um so mehr abnehmen, je weiter sie von MB entfernt sind.

Die Gleichung (5.) hat aber für unsere Untersuchungen noch eine besondere Bedeutung; sie erledigt den Vorbehalt, den wir bei Bejahung der Frage, ob jede Gleichung von der Form $y^2 = px - qx^2$ einer Ellipse angehört, in §. 460. Nr 2. machen mußten. Wir konnten damals nicht nachweisen, daß die Curve $y^2 = px - qx^2$ in eine Kegelfläche gelegt werden kann, wenn $q > 1$ ist; jetzt aber haben wir gefunden, daß diese Curve immer noch eine zweite Axe hat, für welche die Scheitelgleichung $y_1^2 = \frac{p}{q\sqrt{q}} x_1 - \frac{1}{q} x_1^2$ heißt, also dieselbe Form, wie die vorige Gleichung, hat; während aber der Coefficient von x^2 vorher q war, ist er jetzt die Reciproke $\frac{1}{q}$, d. h. er ist immer kleiner als 1, wenn q größer als 1 ist. Die Curve läßt sich also auch, wenn $q > 1$ ist, in eine Kegelfläche legen, nur fällt dann nicht die Axe AB, sondern die Axe CD in den Haupt-Axenschnitt.

Jede Ellipse hat nach der vorangegangenen Untersuchung zwei Axen AB und CD, welche auf einander senkrecht stehen, sich gegen-

seitig halbiren und die Ebene der Ellipse in vier congruente elliptische Quadranten zerlegen; ihr Durchschnittspunkt M heißt der **Mittelpunkt** der Ellipse. Diese Axen sind ungleich, mit Ausnahme des Falles $q = 1$, in welchem die Ellipse in den Kreis übergeht; denn die Axen haben die Länge $AB = \frac{p}{q}$ und $CD = \frac{p}{\sqrt{q}}$, und zwar ist $AB \gtrless CD$, je nachdem $q \lessgtr 1$ ist. Ist also $q < 1$, so ist AB die **große Axe** der Ellipse und CD die **kleine Axe**, ist aber $q > 1$, so ist AB die kleine und CD die große Axe. Liegt also die Ellipse in einer Kegelfläche, so **liegt immer die große Axe in dem Haupt-Axenschnitt**, und in der großen Axe haben wir sonach auch die Brennpunkte zu suchen.

Man nennt die Gleichungen (1.) und (3.) resp. die **Scheitelgleichung** und die **Mittelpunktsgleichung** der Ellipse **für die große Axe**, die Gleichungen (4.) und (5.) heißen resp. die **Mittelpunktsgleichung** und die **Scheitelgleichung** der Ellipse **für die kleine Axe**; die Bezeichnung »Scheitelgleichung«, »Mittelpunktsgleichung« und »Scheitel« ohne nähere Angabe soll sich immer auf die **große** Axe beziehen.

Es ist für alle Berechnungen bei der Ellipse bequem, statt der Constanten p und q die beiden Axen der Ellipse in ihre Gleichung einzuführen. Bezeichnen wir die große Axe AB mit 2a und die kleine Axe CD mit 2b, so ist

$$\frac{p}{q} = 2a \quad \text{und} \quad \frac{p}{\sqrt{q}} = 2b,$$

und hieraus folgen die Constanten p und q:

$$(6.) \quad \text{der **Parameter**} \; p = \frac{2b^2}{a}$$

$$(7.) \quad \text{die constante Zahl} \; q = \frac{b^2}{a^2}.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichungen (1.), (3.), (4.) und (5.) statt p und q ein, so ergeben sich die nachfolgenden Gleichungen, in welchen wir immer die Abscisse mit x, die Ordinate mit y bezeichnen, und die sich der Leser wohl einprägen muß.

Die Scheitelgleichung der Ellipse für die große Axe:

$$\text{I.} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

Die Mittelpunktsgleichung für die große Axe:

$$\text{II.} \begin{cases} y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ oder} \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1. \end{cases}$$

Die Scheitelgleichung für die kleine Axe:

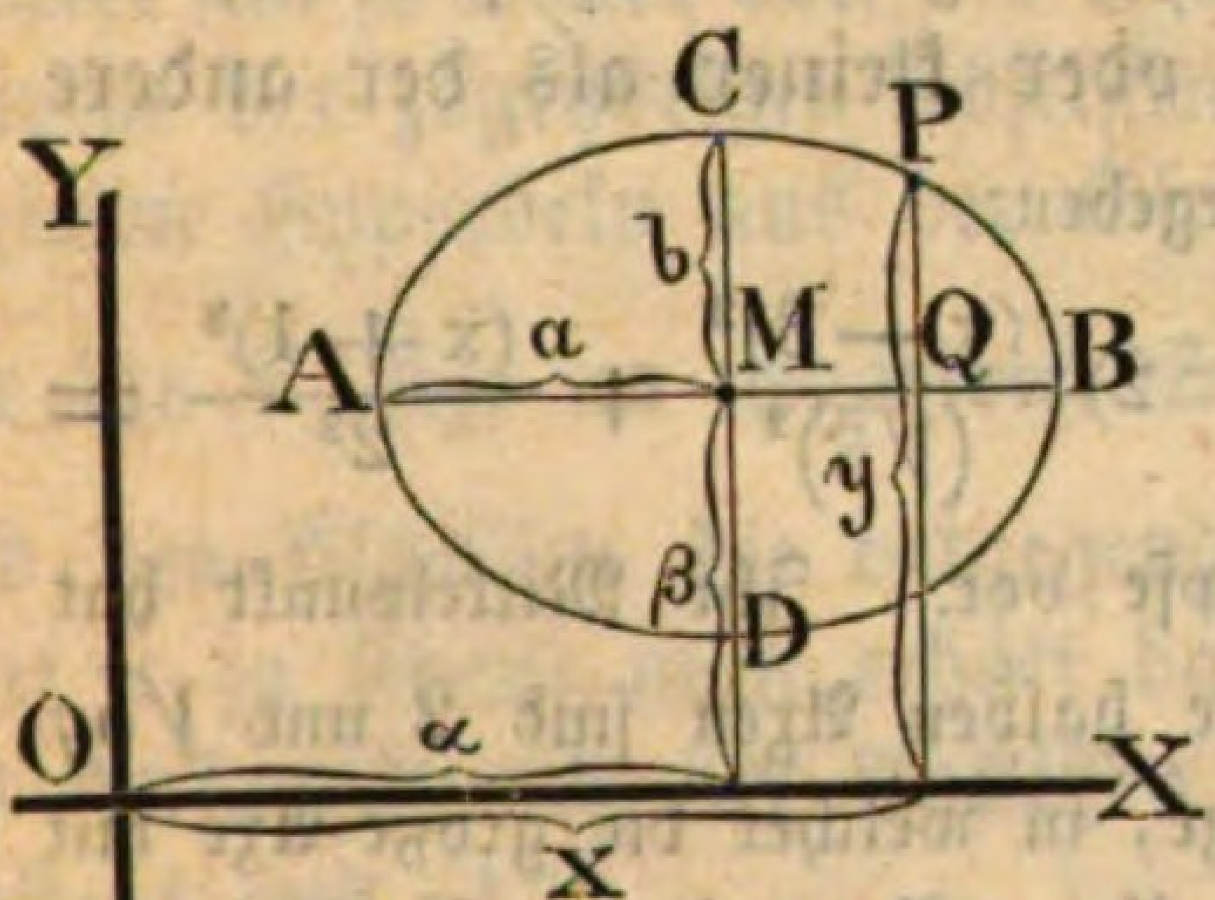
$$\text{III.} \quad y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2).$$

Die Mittelpunktsgleichung für die kleine Axe:

$$\text{IV.} \begin{cases} y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2) \text{ oder} \\ \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen für die große Axe erhält man die für die kleine Axe, wenn man a mit b vertauscht.

Es soll jetzt noch die Gleichung der Ellipse für ein Coordinaten-System aufgesucht werden, dessen Axen mit den Axen der Ellipse parallel sind. In der Figur ist die X-Axe mit der großen Axe AB der Ellipse parallel, der Mittelpunkt M der Ellipse hat die Coordinaten α und β, und P ist ein beliebiger Punkt der Ellipse. Man kann nun aus der Gleichung II. entweder durch Verschieben der Axen, oder unmittelbar aus der Figur die gesuchte Gleichung bilden. Es ist $\frac{PQ^2}{b^2} + \frac{MQ^2}{a^2} = 1$; folglich ist



die Gleichung der Ellipse, wenn die Abscissenlinie mit der großen Axe parallel ist:

$$\text{V.} \quad \frac{(y - \beta)^2}{b^2} + \frac{(x - \alpha)^2}{a^2} = 1.$$

Ist aber die X-Axe mit der kleinen Axe 2b parallel, so hat man nur, wenn die Bedeutung von α und β bleibt, a mit b zu vertauschen. In der Figur braucht man nur $AB < CD$ anzunehmen und a statt b, und b statt a zu setzen; man erhält dann:

die Gleichung der Ellipse, wenn die Abscissenlinie mit der kleinen Axe parallel ist:

$$\text{VI.} \quad \frac{(y - \beta)^2}{a^2} + \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1.$$

Die Gleichungen V. und VI. stimmen in der Form überein: dividirt man das Quadrat der Differenz der Ordinate der Ellipse und der Ordinate ihres Mittelpunktes durch das Quadrat der halben mit der Ordinate parallelen Axe der Ellipse, und dividirt man auch das Quadrat der Differenz der Abscisse der Ellipse und der Abscisse ihres Mittelpunktes durch das Quadrat der halben mit der Abscisse parallelen Axe der Ellipse: so ist die Summe dieser Quotienten gleich 1. Ist die Gleichung einer Curve in dieser Form gegeben, oder kann man sie auf diese Form bringen, so weiß man nicht nur, daß diese Curve eine Ellipse ist, sondern man kann auch die Lage des Mittelpunktes der Ellipse und Lage und Größe ihrer Axen unmittelbar aus der Gleichung entnehmen. In Bezug auf den Mittelpunkt merke man: setzt man in beide Gleichungen 0 statt 1 ein, so stellt jede Gleichung einen Punkt vor, und dieser Punkt ist der Mittelpunkt der Ellipse. Ob die große oder die kleine Axe der Ellipse mit der X-Axe parallel ist, braucht nicht besonders untersucht zu werden; es findet die erste oder zweite Lage Statt, je nachdem der zu $(x-\alpha)^2$ gehörige Nenner größer oder kleiner als der andere ist.

Sind z. B. die beiden Gleichungen gegeben:

$$1)\ \frac{(y-3)^2}{2^2}+\frac{(x+1)^2}{(\sqrt{5})^2}=1 \quad \text{und} \quad 2)\ \frac{(y-3)^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{(x+1)^2}{2^2}=1,$$

so stellen beide Gleichungen dieselbe Ellipse vor. Ihr Mittelpunkt hat die Abscisse -1 und die Ordinate $+3$, ihre halben Axen sind 2 und $\sqrt{5}$; die erste Gleichung giebt die Ellipse in der Lage, in welcher die große Axe mit der X-Axe parallel ist, bei der andern ist die kleine Axe mit der X-Axe parallel.

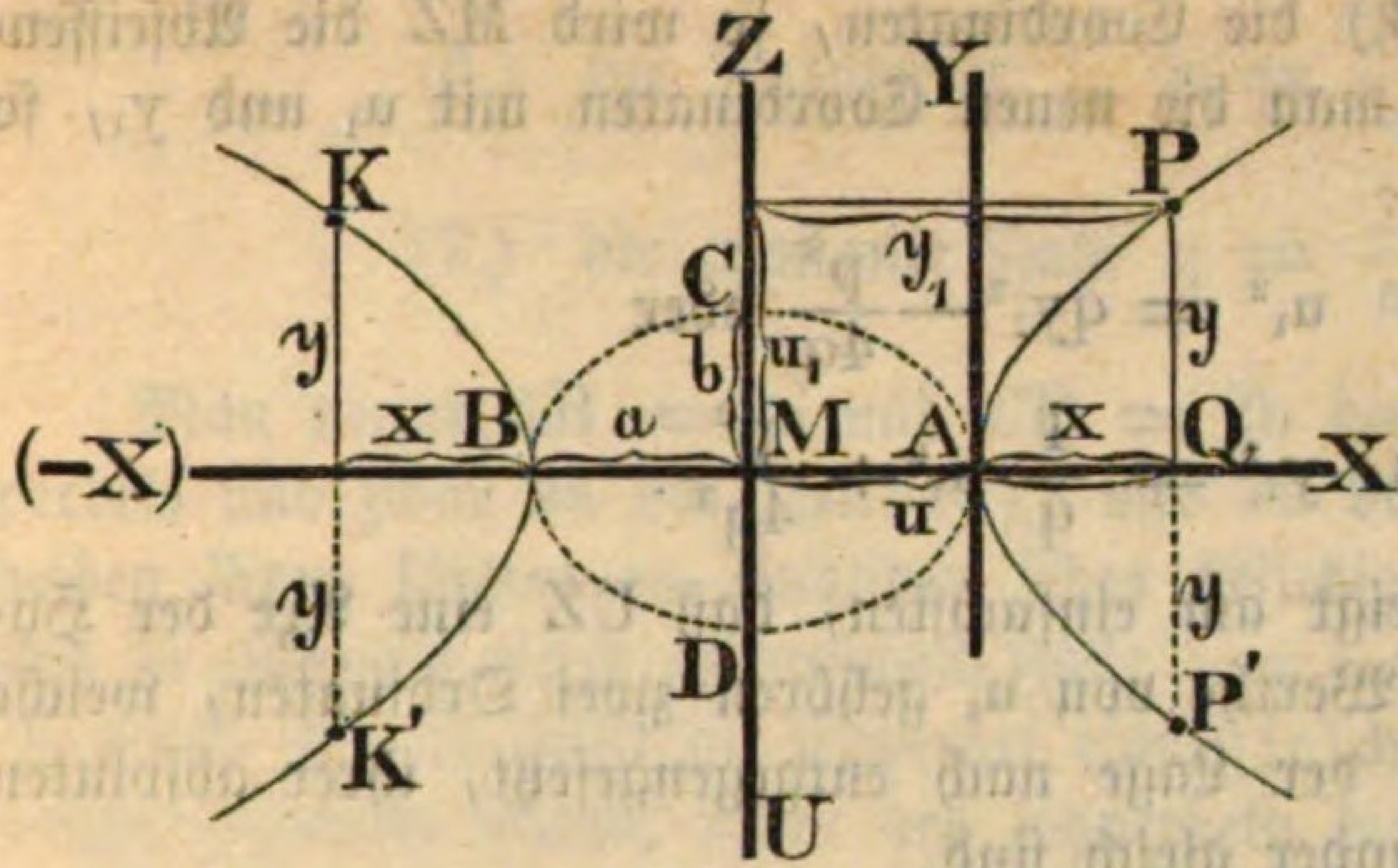
§. 465.

Die Hyperbel und ihre Gleichungen.

Wir gehen von der Scheitelgleichung der Hyperbel

$$(1.)\quad y^2 = px + qx^2$$

aus und können, wie früher, den Parameter p positiv annehmen. Setzen wir $y^2 = x(p+qx)$, so folgt: für $x=0$ und für $x=-\frac{p}{q}$ ist $y=0$, für jeden Werth von x zwischen den Grenzen 0 und $-\frac{p}{q}$ ist y imaginär; für jeden Werth von x zwischen den Grenzen 0 bis $+\infty$, und $-\frac{p}{q}$ bis $-\infty$ ist y reell und wächst in beiden Fällen mit steigenden absoluten Werthen von x; für $x=+\infty$ und auch für $x=-\infty$ ist $y=\pm\infty$.



Ist AX die Abscissenlinie, A der Anfangspunkt der Abscissen, und giebt man der Linie AB die absolute Länge $\frac{p}{q}$, so schneidet die Hyperbel die Abscissenlinie in A und B, und weil diese Linie eine Axe der Hyperbel ist, so sind A und B Scheitel derselben. Von A und B aus erstreckt sich die Hyperbel in zwei von einander getrennten Theilen, den conjugirten Hyperbeln PAP' und KBK', resp. nach rechts und links hin ins Unendliche. Jede dieser conjugirten Hyperbeln hat zwei congruente, auf verschiedenen Seiten der Axe liegende Zweige, deren Punkte um so weiter von der Axe entfernt sind, je größer die absoluten Werthe der zugehörigen Abscissen sind. Um die Congruenz dieser conjugirten Hyperbeln aus der Gleichung (1.) zu beweisen, braucht man nur die Y-Axe im negativen Sinne um die Länge $\frac{p}{q}$ zu verschieben und den Abscissen die entgegengesetzte Richtung zu geben, also $-x$ statt x zu setzen; man erhält dann die Gleichung der Hyperbel für B als Anfangspunkt der Abscissen und B (– X) als Abscissenlinie. Es entsteht aus (1.):

$$y^2 = p\left(-x - \frac{p}{q}\right) + q\left(-x - \frac{p}{q}\right)^2,$$

und wenn man die Klammern auflöst:

$$(2.)\quad y^2 = px + qx^2,$$

eine Gleichung, welche mit (1.) vollkommen übereinstimmt.

Schon aus (1.) und (2.) erkennt man, daß die Hyperbel noch eine zweite Axe hat, welche auf AB in ihrem Mittelpunkte M senkrecht steht (die Linie UZ); noch klarer aber geht dies aus der folgenden Umformung hervor. Verschiebt man die Y-Axe (AY) im negativen Sinne um die Länge $\frac{p}{2q}$, macht man also M zum Anfangspunkt der Abscissen, und bezeichnet man die neuen Abscissen (MQ) mit u, so folgt aus (1.):

$$y^2 = p\left(u - \frac{p}{2q}\right) + q\left(u - \frac{p}{2q}\right)^2 \text{ oder:}$$

$$(3.)\quad y^2 = q.u^2 - \frac{p^2}{4q}.$$

Vertauscht man in (3.) die Coordinaten, so wird MZ die Abscissenlinie, und bezeichnet man die neuen Coordinaten mit u_1 und y_1, so folgt aus (3.):

$$u_1^2 = qy_1^2 - \frac{p^2}{4q} \text{ oder}$$

$$(4.)\quad y_1^2 = \frac{1}{q} \cdot u_1^2 + \frac{p^2}{4q^2}.$$

Die Gleichung (4.) zeigt am einfachsten, daß UZ eine Axe der Hyperbel ist: zu jedem Werthe von u_1 gehören zwei Ordinaten, welche den Vorzeichen, also der Lage nach entgegengesetzt, ihrer absoluten Länge nach aber einander gleich sind.

Der Leser wird sich erinnern, daß wir bei der Ellipse statt der Constanten p und q zwei constante Linien 2a und 2b in die Gleichung der Ellipse einführten. Diese Linien waren die beiden Axen der Ellipse, und die Untersuchung der Gestalt der Ellipse führte unmittelbar auf diese Linien; wir setzten damals

$$(5.)\quad \frac{p}{q} = 2a \quad \text{und} \quad \frac{p}{\sqrt{q}} = 2b.$$

Die Untersuchung über die Gestalt der Hyperbel hat uns wenigstens auf eine solche Linie geführt, denn es ist

$$\frac{p}{q} = AB,$$

und bezeichnen wir AB mit 2a, so können wir zunächst die erste Gleichung in (5.) auch für die Hyperbel gelten lassen, um die Constanten p und q auf zwei constante Linien zu bringen. Da eine zweite Linie, auf welche wir p und q reduciren könnten, bei der Hyperbel bis jetzt nicht hervorgetreten ist, so entnehmen wir eine solche durch Analogie aus der Ellipse, so daß wir die Linie $\frac{p}{\sqrt{q}}$ mit 2b bezeichnen und als Constante in die Gleichung der Hyperbel einführen. Wir können so wenigstens erwarten, daß die neuen Gleichungen der Hyperbel denen der Ellipse sehr ähnlich, also für weitere Untersuchungen bequem sein werden. Die Bedeutung der Linien 2a und 2b kann sich der Leser am einfachsten so merken: ändert man in der Gleichung der Hyperbel $y^2 = px + qx^2$ das Zeichen + in — ab, und denkt sich die entstandene Ellipse $y^2 = px - qx^2$ über AB construirt (die Ellipse ACBD in der Figur), so sind 2a und 2b die beiden Axen AB und CD dieser Ellipse.

Da also die Gleichungen in (5.) auch für die Hyperbel gelten, so folgt aus ihnen:

(6.) der Parameter $p = \frac{2b^2}{a}$

(7.) die constante Zahl $q = \frac{b^2}{a^2}$.

Man nennt $AB = 2a$ und $CD = 2b$ die beiden Axen der Hyperbel, und zwar $2a$ die Hauptaxe und $2b$ die Nebenaxe. Diese beiden Axen können zu einander jedes beliebige Verhältniß haben; sind sie einander gleich (in welchem Falle $q = 1$ und die Ellipse ACBD ein Kreis ist), so heißt die Hyperbel eine gleichseitige. Die gleichseitige Hyperbel nimmt unter den Hyperbeln dieselbe Stelle ein, wie der Kreis unter den Ellipsen. Der Durchschnittspunkt M beider Axen heißt der Mittelpunkt der Hyperbel; daher nennt man auch die Gleichung (3.) die Mittelpunktsgleichung für die Hauptaxe, die Gleichung (4.) die Mittelpunktsgleichung für die Nebenaxe. Spricht man von der Mittelpunktsgleichung ohne nähere Bezeichnung, so ist immer die für die Hauptaxe gemeint.

Setzt man nun die Werthe von p und q aus (6.) und (7.) in die Gleichungen (1.), (3.) und (4.) ein, so erhält man die folgenden Gleichungen der Hyperbel, in welchen allen die Abscisse mit x und die Ordinate mit y bezeichnet ist.

Die Scheitelgleichung der Hyperbel:

$$\text{I.}\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

Die Mittelpunktsgleichung für die Hauptaxe:

$$\text{II.}\quad \begin{cases} y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \text{ oder} \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1. \end{cases}$$

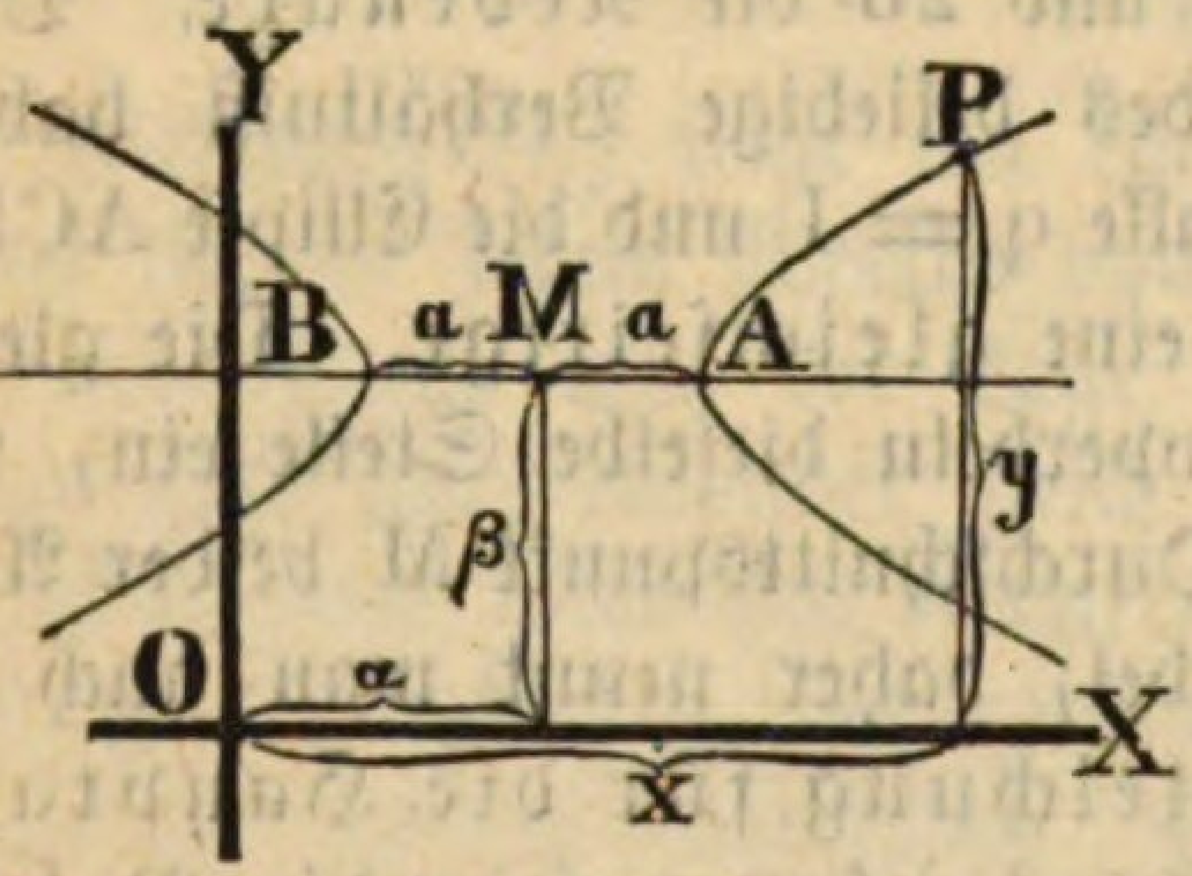
Die Mittelpunktsgleichung für die Nebenaxe:

$$\text{III.}\quad \begin{cases} y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2) \text{ oder} \\ \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = +1. \end{cases}$$

Die Gleichung der Hyperbel für eine Abscissenlinie, welche mit der Hauptaxe oder mit der Nebenaxe der Hyperbel parallel ist, erhält man aus den Gleichungen II. und III. entweder durch Verschieben der Axen, oder unmittelbar aus der Figur. Für die neue Abscissenlinie sind α und β die Coordinaten des Mittelpunktes M der Hyperbel.

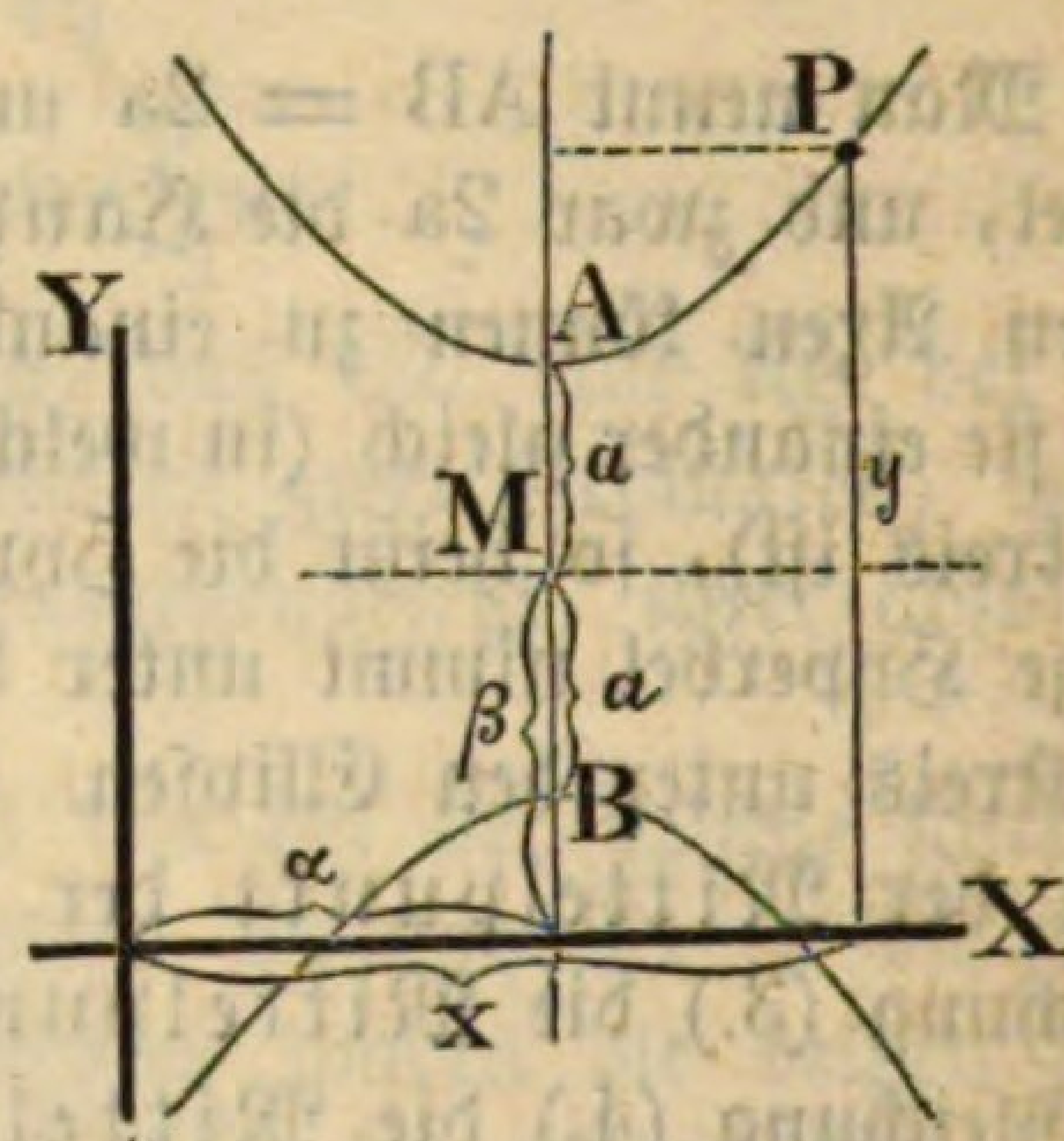
Die Gleichung der Hyperbel, wenn die Abscissenlinie

1) mit der Hauptaxe parallel ist:



$$\text{IV. } \frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = -1.$$

2) mit der Nebenaxe parallel ist:



$$\text{V. } \frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = +1.$$

Ist eine Gleichung auf eine dieser beiden Formen gebracht, und sind a, b, α und β reell, so weiß man nicht nur, daß diese Gleichung eine Hyperbel bestimmt, sondern man kann auch die Lage ihres Mittelpunktes und die Lage und Größe ihrer beiden Axen unmittelbar angeben. Die Werthe von x und y, für welche die Zähler der Brüche zu Null werden, sind resp. die Abscisse und die Ordinate des Mittelpunktes, die Hauptaxe 2a ist mit der X-Axe parallel, oder steht auf ihr senkrecht, je nachdem die rechte Seite -1, oder $+1$ ist, und das Quadrat der halben Hauptaxe ist immer der Nenner des Bruches, in dessen Zähler diejenige beider Coordinaten vorkommt, mit welcher sie parallel ist. Uebrigens ist für die Lage der Hauptaxe auch entscheidend, daß in der Gleichung V. für jeden reellen Werth von x auch y reell wird; hingegen ergiebt sich y aus IV. imaginär, wenn x zwischen den Grenzen $\alpha - a$ und $\alpha + a$ liegt.

Sind z. B. die beiden Gleichungen gegeben:

$$1)\ \frac{(y-1)^2}{3^2} - \frac{(x+2)^2}{(\sqrt{2})^2} = -1 \text{ und } 2)\ \frac{(y+3)^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{(x+1)^2}{4^2} = +1,$$

so stellen beide Hyperbeln vor. In 1) hat der Mittelpunkt die Abscisse -2 und die Ordinate $+1$, die Hauptaxe ist mit der Abscissenlinie parallel, die halbe Hauptaxe ist $= \sqrt{2}$, die halbe Nebenaxe $= 3$. In 2) hat der Mittelpunkt die Abscisse -1 und die Ordinate -3, die Hauptaxe steht auf der Abscissenlinie senkrecht, die halbe Hauptaxe ist $= \sqrt{5}$, die halbe Nebenaxe $= 4$.

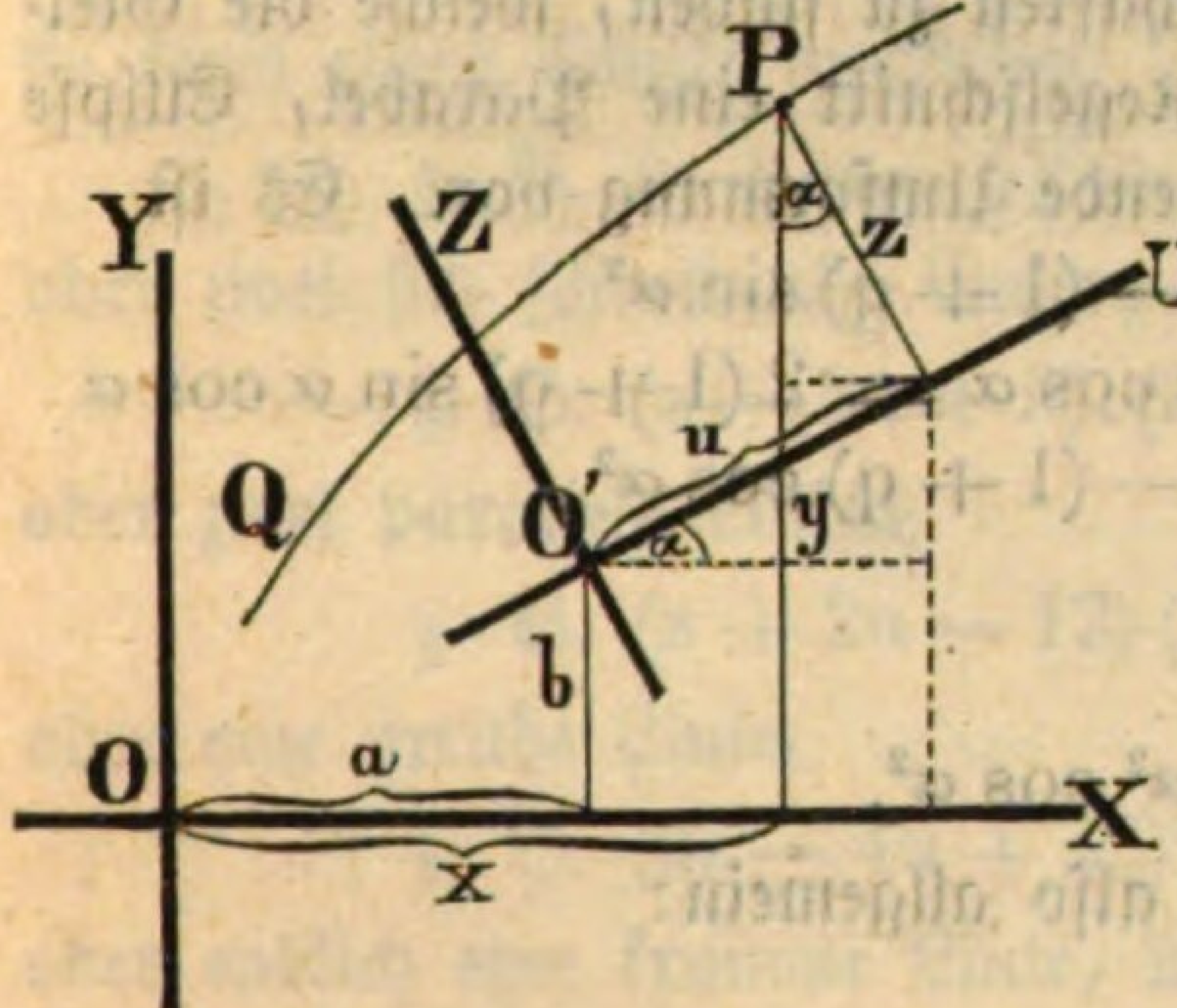
§. 466.

Entwickelung der allgemeinen Gleichung des Kegelschnitts.

Um die Form der Gleichung des Kegelschnitts für ein rechtwinkliges Coordinaten-System in ganz beliebiger Lage zum Kegelschnitt zu finden, gehen wir von der Scheitelgleichung des Kegelschnitts aus:

$$(1.)\quad y^2 = px + qx^2.$$

Es sei PQ ein Theil des Kegelschnitts, OX seine Axe und O sein Scheitel. Sind x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes P des Kegelschnitts in Bezug auf die Axen X und Y, so findet zwischen x und y die Gleichung (1.) Statt. Um diese Gleichung auf ein anderes Coordinaten-System zu übertragen, legen wir durch einen beliebigen Punkt O′, dessen Coordinaten in Bezug auf X und Y a und b sein mögen, zwei neue auf einander senkrechte Axen U und Z. Fällen wir dann von P eine Senkrechte auf U, so entstehen die Coordinaten u und z des Punktes P für das neue Coordinaten-System, und zwischen u und z haben wir nun die Gleichung zu bilden, welche für jeden Punkt des Kegelschnittes richtig ist. Zu diesem Zwecke drücken wir y und x durch z und u aus und substituiren die Werthe in (1.). So entsteht, wenn U mit X den Winkel α bildet:



$$(2.)\quad y = b + u \sin\alpha + z\cos\alpha$$
$$(3.)\quad x = a + u\cos\alpha - z\sin\alpha.$$

Setzen wir diese Werthe in (1.) ein und ordnen die neue Gleichung nach den fallenden Potenzen von z und u, so entsteht:

$$(4.)\quad (\cos\alpha^2 - q\sin\alpha^2)\,.\,z^2 + (2\sin\alpha\cos\alpha + 2q\sin\alpha\cos\alpha)\,.\,uz$$
$$+ (\sin\alpha^2 - q\cos\alpha^2)\,.\,u^2 + (2aq\sin\alpha + 2b\cos\alpha + p\sin\alpha)\,.\,z$$
$$+ (2b\sin\alpha - 2aq\cos\alpha - p\cos\alpha)\,.\,u - a^2q - ap + b^2 = 0.$$

Werden die constanten Coefficienten dieser Gleichung in der entsprechenden Ordnung mit A, B, C u. s. w. bezeichnet, so erhält man die Form:

$$(5.)\quad Az^2 + Buz + Cu^2 + Dz + Eu + F = 0;$$

folglich ist die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts eine **vollständige Gleichung des zweiten Grades** zwischen den Coordinaten u und z.

Die Gleichung (5.) zeigt sechs Constanten; da man aber diese Gleichung durch eine dieser Constanten dividiren kann, so folgt hieraus, daß die Gestalt und Lage des Kegelschnitts nicht von diesen Constanten selbst, sondern von ihrem Verhältniß zu einander abhängig ist. Wir können sonach auch die Form

$$z^2 + \alpha uz + \beta u^2 + \gamma z + \delta u + \varepsilon = 0$$

als die allgemeine Gleichung jedes Kegelschnitts annehmen, so daß also Lage und Gestalt desselben im Allgemeinen durch fünf Bedingungen gegeben ist, z. B. dadurch, daß der Kegelschnitt durch fünf gegebene Punkte gehen soll.

Um nun die besonderen Eigenschaften zu finden, welche die Gleichung (5.) zeigt, je nachdem der Kegelschnitt eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel ist, nehmen wir folgende Umformung vor. Es ist

$$A = \cos\alpha^2 - q \sin\alpha^2 = 1 - (1 + q) \sin\alpha^2$$
$$B = 2 \sin\alpha \cos\alpha + 2q \sin\alpha \cos\alpha = 2(1 + q) \sin\alpha \cos\alpha$$
$$C = \sin\alpha^2 - q \cos\alpha^2 = 1 - (1 + q) \cos\alpha^2.$$

Hieraus folgt aber:

$$B^2 = 4(1 + q)^2 \sin\alpha^2 \cos\alpha^2$$
$$4AC = -4q + 4(1 + q)^2 \sin\alpha^2 \cos\alpha^2.$$

Es ist daher $4AC = -4q + B^2$, also allgemein:

$$(6.) \quad B^2 = 4AC + 4q.$$

Aus dieser Gleichung folgt nun: ist der Kegelschnitt

1) eine Parabel, also q gleich Null, so ist
$$B^2 = 4AC$$

2) ist er eine Ellipse, also q negativ, so ist
$$B^2 < 4AC$$

3) ist er eine Hyperbel, also q positiv, so ist
$$B^2 > 4AC.$$

Wichtig sind noch die Fälle, in welchen $B = 0$ ist. Aus

$$B = 4(1 + q).\sin\alpha \cos\alpha$$

folgt, daß $B = 0$ wird, wenn entweder

α) $q = -1$ ist (der Kreis), oder

β) $\sin\alpha = 0$, also $\alpha = 0°$ oder $= 180°$, oder

γ) $\cos\alpha = 0$, also $\alpha = 90°$ oder $= 270°$.

Für den Kreis ist noch $A = C = 1$, wie schon früher gefunden wurde. Wenn also in der Gleichung eines Kegelschnitts das zweite Glied (B.uz) fehlt, so ist die Abscissenlinie entweder mit der Axe des Kegelschnitts parallel, oder sie steht auf der Axe senkrecht.

§. 467.

Untersuchung der allgemeinen Coordinatengleichung des zweiten Grades. Reduction derselben auf die Scheitelgleichung, resp. Mittelpunktsgleichung des Kegelschnitts.

Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen den Coordinaten u und z mit reellen Coefficienten

$$(1.)\quad Az^2 + Buz + Cu^2 + Dz + Eu + F = 0,$$

in welcher wir vorläufig annehmen, daß B nicht gleich Null sein soll, kann ohne geometrische Bedeutung sein,

$$\text{z. B. } (z - 2u + 3)^2 + z^2 + u^2 + 1 = 0;$$

sie kann einen Punkt vorstellen,

$$\text{z. B. } (z + u - 5)^2 + (2z - u - 4)^2 = 0,$$

oder zwei sich schneidende Linien,

$$\text{z. B. } (z - 5u + 3).(2z + 3u - 7) = 0,$$

oder zwei parallele Linien,

$$\text{z. B. } (z + 2u - 12)(3z + 6u + 5) = 0,$$

oder eine gerade Linie,

$$\text{z. B. } (3z - 4u + 12)^2 = 0,$$

oder endlich eine krumme Linie, wie dies aus dem vorhergehenden § hervorgeht.

Alle diese Fälle sind leicht zu erkennen. Entwickelt man aus (1.) die eine Unbekannte, z. B. z, so entsteht:

$$z = -\frac{Bu+D}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{Bu+D}{2A}\right)^2 - \frac{Cu^2+Eu+F}{A}} \text{ oder}$$

$$(2.)\quad z = \frac{-(Bu+D) \pm \sqrt{(B^2-4AC)u^2+(2BD-4AE)u+D^2-4AF}}{2A}.$$

Ist nun $B^2 = 4AC$, aber $2BD \gtrless 4AE$, so bedeutet (1.) eine krumme Linie; denn die Wurzel in (2.) wird dann immer für unendlich viele stetig auf einander folgende Werthe von u reell; hingegen wird sie in Bezug auf u nicht rational, so daß die Bedeutung der geraden Linie hier nicht zulässig ist. Wenn aber $2BD = 4AE$ ist, so wird

$$z = \frac{-Bu - D \pm \sqrt{D^2 - 4AF}}{2A},$$

und diese Gleichung stellt zwei gerade parallele Linien, oder eine gerade Linie vor, oder ist ohne geometrische Bedeutung, je nachdem $D^2 > 4AF$, oder $D^2 = 4AF$ oder $D^2 < 4AF$ ist.

Ist aber $B^2 \gtrless 4AC$, so läßt sich der Radicand in (2.) auf die Form bringen (Arithm. §. 157.):

$$\alpha.(u-\beta).(u-\gamma),$$

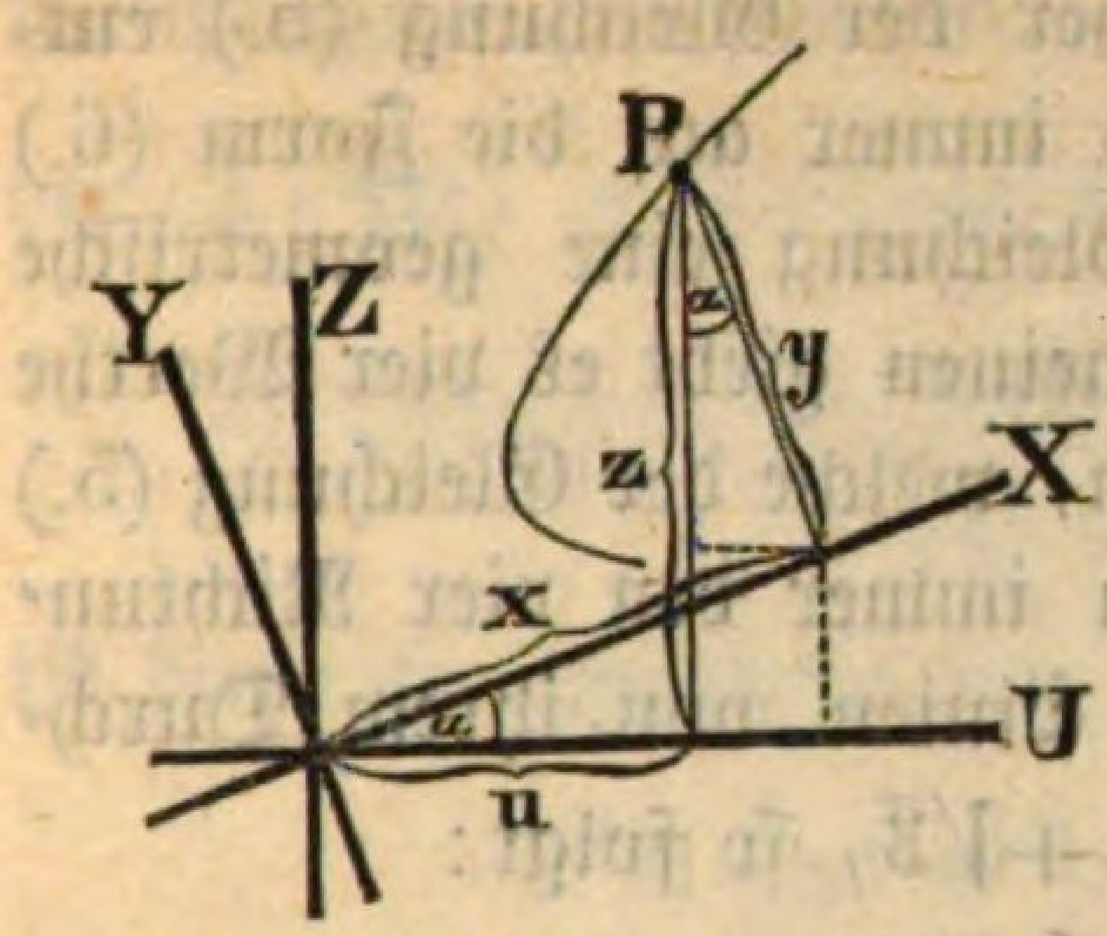
in welcher $\alpha = B^2 - 4AC$ ist, und sind β und γ imaginär, in welchem Falle sie auch ungleich sein müssen, so ist $\sqrt{\alpha.(u-\beta).(u-\gamma)}$ irrational, aber für jeden Werth von u imaginär, oder reell, je nachdem α negativ, oder positiv ist. Im ersten Falle ist die Gleichung (1.) ohne geometrische Bedeutung, im zweiten Falle bedeutet sie eine krumme Linie. — Sind aber β und γ reell, so unterscheiden wir zwei Fälle. Ist β ungleich γ, so ist $\sqrt{\alpha(u-\beta)(u-\gamma)}$ irrational, aber es giebt dann immer unendlich viele stetig aufeinander folgende reelle Werthe von u, für welche diese Wurzel, also auch z, reell wird; die Gleichung (1.) stellt dann wieder eine krumme Linie vor. Ist aber $\beta = \gamma$, so wird

$$z = \frac{-(Bu+D) \pm (u-\beta)\sqrt{\alpha}}{2A}.$$

Diese Gleichung stellt einen Punkt vor, wenn α negativ ist, denn sie hat dann nur ein reelles Coordinaten-Paar: $u = \beta$, $z = \frac{-(B\beta+D)}{2A}$; hingegen stellt sie zwei gerade Linien vor, wenn α positiv ist.

Nachdem der Leser so in den Stand gesetzt ist, in jedem Falle zu beurtheilen, welche Bedeutung die Gleichung (1.) hat, soll nun untersucht werden, ob diese Gleichung, falls sie eine krumme Linie vorstellt, auch immer die Gleichung eines Kegelschnitts ist. Muß diese Frage bejaht werden, so folgt aus dem vorhergehenden §., daß der Kegelschnitt nothwendig eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel sein muß, je nachdem $B^2 = 4AC$, $B^2 < 4AC$ oder $B^2 > 4AC$ ist.

Die Untersuchung führen wir dadurch, daß wir die Axen U und Z, auf welche sich die Gleichung (1.) bezieht, durch eine drehende Bewegung um ihren Durchschnittspunkt (den Anfangspunkt der Abscissen) so verschieben, daß die Gleichung (1.) in eine Coordinaten-Gleichung übergeht, in der das zweite Glied, welches das Product der Coordinaten enthält, fehlt. Stellt die Gleichung (1.), also auch die neue, einen Kegelschnitt vor, so muß nach dem vorhergehenden §. seine Axe mit der neuen Abscissenlinie parallel sein, oder auf ihr senkrecht stehen, und die neue Gleichung muß sich dann leicht auf eine der Formen bringen lassen, welche wir in §. 463., 464. und 465. für diese Lage der Abscissenlinie gehabt haben.



Sind U und Z die gegebenen Axen, u und z die Coordinaten eines beliebigen Punktes P des Kegelschnitts, sind X und Y die neuen Axen und x und y die zugehörigen Coordinaten des Punktes P, bildet ferner X mit U den Winkel α, so ist

$$z = x \sin\alpha + y \cos\alpha$$
$$u = x \cos\alpha - y \sin\alpha.$$

Setzen wir diese Werthe von z und u in die Gleichung

$$(1.)\quad Az^2 + Buz + Cu^2 + Dz + Eu + F = 0$$

ein und ordnen die neue Gleichung nach den fallenden Potenzen von y und x, so folgt:

$$\begin{aligned}(3.)\quad & [A \cos\alpha^2 - B \sin\alpha \cos\alpha + C \sin\alpha^2] . y^2 \\ & + [2A \sin\alpha \cos\alpha + B (\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2) - 2C \sin\alpha \cos\alpha] . xy \\ & + [A \sin\alpha^2 + B \sin\alpha \cos\alpha + C \cos\alpha^2] . x^2 \\ & + [D \cos\alpha - E \sin\alpha] . y + [D \sin\alpha + E \cos\alpha] . x + F = 0.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die constanten Coefficienten dieser Gleichung nach der Reihe mit a, b, c u. s. w., so entsteht:

$$(4.)\quad ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

Zunächst sei der Leser darauf aufmerksam gemacht, daß zwischen den Constanten A, B und C in (1.) und den Constanten a, b und c in (4.) der Zusammenhang Statt findet, daß immer gleichzeitig

$$B^2 \gtreqless 4AC \text{ und } b^2 \gtreqless 4ac$$

ist; denn aus der Bedeutung von a, b und c folgt:

$$b^2 = (A+B-C)(A-B-C) \sin 2\alpha^2 + B(A-C) \sin 4\alpha + B^2$$
$$4ac = (A+B-C)(A-B-C) \sin 2\alpha^2 + B(A-C) \sin 4\alpha + 4AC,$$

und subtrahirt man diese Gleichungen von einander, so folgt

$$b^2 - 4ac = B^2 - 4AC.$$

Um nun den Winkel α so zu bestimmen, daß in (4.) das zweite Glied fortfällt, muß b = 0 werden; daher folgt aus (3.):

$$(A - C) \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha = 0, \text{ also}$$

$$(5.)\qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B}{C - A},$$

und für jeden dieser Gleichung entsprechenden Werth von α nimmt (3.) die Form an:

$$(6.)\quad ay^2 + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

Da es immer einen Winkel α giebt, welcher der Gleichung (5.) entspricht, so läßt sich die Gleichung (1.) auch immer auf die Form (6.) bringen, selbst dann, wenn mit dieser Gleichung eine geometrische Bedeutung nicht verbunden ist. Im Allgemeinen giebt es vier Werthe von α innerhalb der ersten vier Quadranten, welche der Gleichung (5.) genügen, und diese vier Winkel entsprechen immer den vier Richtungen, welche zwei sich senkrecht schneidende Linien von ihrem Durchschnittspunkt aus zeigen. Ist z. B. $tg 2\alpha = +\sqrt{3}$, so folgt:

2α gleich 60°, 240°, $60^\circ + 360^\circ$ und $240^\circ + 360^\circ$, also

α gleich 30°, 120°, $30^\circ + 180^\circ$ und $120^\circ + 180^\circ$,

wofür man in derselben Ordnung setzen kann:

α gleich 30°, 120°, -150° und -60°.

Ist $A = C$, so ist $\alpha = \pm 45^\circ$ oder $= \pm 135^\circ$.

Wir haben jetzt zu untersuchen, ob die Gleichung (6.) immer einen Kegelschnitt bedeutet, wenn sie eine krumme Linie vorstellt, und unterscheiden folgende Fälle:

I. $a.c = 0$, in welchem Falle $B^2 = 4AC$ ist.

Aus $a.c = 0$ folgt $c = 0$, oder $a = 0$; beide Constanten können nicht gleichzeitig Null sein, weil dann (6.), also auch (1.) eine gerade Linie sein würde.

1) Wenn $c = 0$ ist. Die Gleichung

$$ay^2 + dy + ex + f = 0$$

läßt sich dann auf folgende Form bringen:

$$a\left(y^2 + \frac{d}{a}y\right) = -ex - f$$

$$a\left(y + \frac{d}{2a}\right)^2 = -ex - f + \frac{d^2}{4a}$$

$$\left(y + \frac{d}{2a}\right)^2 = -\frac{e}{a}\left[x + \frac{4af - d^2}{4ae}\right]$$

Ist nun $e = 0$, in welchem Falle die gegebene Gleichung kein x enthält, so stellt sie zwei mit der X-Axe parallele Linien, oder eine solche Linie vor, oder sie ist ohne geometrische Bedeutung, je nachdem $4af < d^2$, oder $4af = d^2$, oder $4af > d^2$ ist. Ist aber $e \gtrless 0$, so stellt die Gleichung eine Parabel vor, deren Axe mit der X-Axe parallel ist; die Abscisse des Scheitelpunkts ist (§. 463. II.) gleich $-\frac{4af - d^2}{4ae}$, die Ordinate gleich $-\frac{d}{2a}$, der Parameter gleich $-\frac{e}{a}$, und

die Parabel erstreckt sich nach der positiven oder negativen Richtung der X-Axe, je nachdem $-\frac{e}{a}$ positiv oder negativ ist.

2) **Wenn** $a = 0$ **ist.** Die Gleichung

$$cx^2 + dy + ex + f = 0$$

ist dann so umzuformen:

$$c\left(x^2 + \frac{e}{c}x\right) = -dy - f$$

$$c\left(x + \frac{e}{2c}\right)^2 = -dy - f + \frac{e^2}{4c}$$

$$\left(x + \frac{e}{2c}\right)^2 = -\frac{d}{c}\left[y + \frac{4cf - e^2}{4cd}\right]$$

Ist $d = 0$, in welchem Falle die Gleichung kein y enthält, so stellt sie zwei mit der Y-Axe parallele Linien vor, oder nur eine solche Linie, oder sie ist ohne geometrische Bedeutung, je nachdem $4cf < e^2$, oder $4cf = e^2$, oder $4cf > e^2$ ist. Ist aber $d \gtrless 0$, so stellt die Gleichung eine **Parabel** vor, deren **Axe auf der X-Axe senkrecht steht**; die Abscisse des Scheitelpunkts ist (§. 463. III.) gleich $-\frac{e}{2c}$, die Ordinate gleich $-\frac{4cf - e^2}{4cd}$, der Parameter gleich $-\frac{d}{c}$; die Curve selbst erstreckt sich nach der positiven, oder negativen Richtung der Y-Axe, je nachdem $-\frac{d}{c}$ positiv, oder negativ ist.

Die Gleichung (6.), wenn $a.c = 0$ ist, also auch die Gleichung (1.), wenn $B^2 = 4AC$ ist, stellt also immer eine **Parabel** vor, wenn sie eine krumme Linie bedeutet; sie hat aber nie die Bedeutung eines Punktes, und dies stimmt auch mit der Untersuchung am Anfange dieses §. überein.

II. $a.c > 0$, **in welchem Falle** $B^2 < 4AC$ **ist.**

Aus $a.c > 0$ folgt, daß a und c gleiche Vorzeichen haben müssen, wir können annehmen, **positive**, weil die gegebene Gleichung im andern Falle durch -1 dividirt werden kann. Die Gleichung

$$(6.) \quad ay^2 + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

läßt sich auf folgende Weise umformen:

$$a\left(y^2 + \frac{d}{a}y\right) + c\left(x^2 + \frac{e}{c}x\right) = -f$$

$$a\left(y + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(x + \frac{e}{2c}\right)^2 = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f$$

Diese Gleichung stellt einen Punkt vor, oder ist ohne geometrische Bedeutung, je nachdem $\frac{d^2}{4a}+\frac{e^2}{4c}=f$, oder $\frac{d^2}{4a}+\frac{e^2}{4c}<f$ ist. Wenn aber $\frac{d^2}{4a}+\frac{e^2}{4c}>f$ ist, so geht die Gleichung, wenn wir die positive Constante $\frac{d^2}{4a}+\frac{e^2}{4c}-f$ mit k bezeichnen und dann die Gleichung durch k dividiren, in folgende über:

$$\frac{\left(y+\frac{d}{2a}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{a}}\right)^2}+\frac{\left(x+\frac{e}{2c}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{c}}\right)^2}=1$$

und ist nach §. 464. V. und VI. die Gleichung einer Ellipse. Der Mittelpunkt der Ellipse hat die Abscisse $-\frac{e}{2c}$ und die Ordinate $-\frac{d}{2a}$, die eine halbe Axe ist $=\sqrt{\frac{k}{c}}$, die andere $=\sqrt{\frac{k}{a}}$; erstere ist mit der X-Axe, letztere mit der Y-Axe parallel. Ist $a>c$, so ist also die große Axe der Ellipse die mit der X-Axe parallele; ist aber $a<c$, so ist die große Axe diejenige, welche auf der X-Axe senkrecht steht.

Die Gleichung (6.), wenn $a.c>0$ ist, also auch die Gleichung (1.), wenn $B^2<4AC$ ist, stellt sonach immer eine Ellipse vor, wenn sie eine Linie bedeutet; sie hat niemals die Bedeutung einer geraden Linie. Dasselbe hat sich in der Untersuchung am Anfange dieses §. ergeben; der Leser möge nur erwägen, daß im vorliegenden Falle α negativ ist.

III. $a.c<0$, in welchem Falle $B^2>4AC$ ist.

Aus $a.c<0$ folgt, daß a und c verschiedene Vorzeichen haben müssen; wir dürfen annehmen, a hat das Vorzeichen +, c das Vorzeichen —, weil wir im andern Falle die Gleichung durch —1 dividiren können. Diese Vorzeichen wollen wir in die gegebene Gleichung aufnehmen, also die Gleichung

$$ay^2-cx^2+dy+ex+f=0$$

untersuchen, in welcher jetzt a und c positiv sind. Wir können diese Gleichung auf folgende Weise umformen:

$$a\left(y^2+\frac{d}{a}y\right)-c\left(x^2-\frac{e}{c}x\right)=-f$$

$$a\left(y+\frac{d}{2a}\right)^2-c\left(x-\frac{e}{2c}\right)^2=\frac{d^2}{4a}-\frac{e^2}{4c}-f.$$

Diese Gleichung hat immer eine geometrische Bedeutung, aber sie stellt nur entweder zwei gerade, sich schneidende Linien, oder eine krumme Linie vor. Ist nämlich $\frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c} = f$, so hat sie die Bedeutung zweier geraden, sich schneidenden Linien, denn man kann den Subtrahend der linken Seite auf die rechte Seite bringen und dann aus beiden Seiten die Quadratwurzel ziehen. Ist hingegen die rechte Seite negativ oder positiv, und bezeichnet man den absoluten Werth der rechten Seite mit k, so folgt, wenn man durch k dividirt:

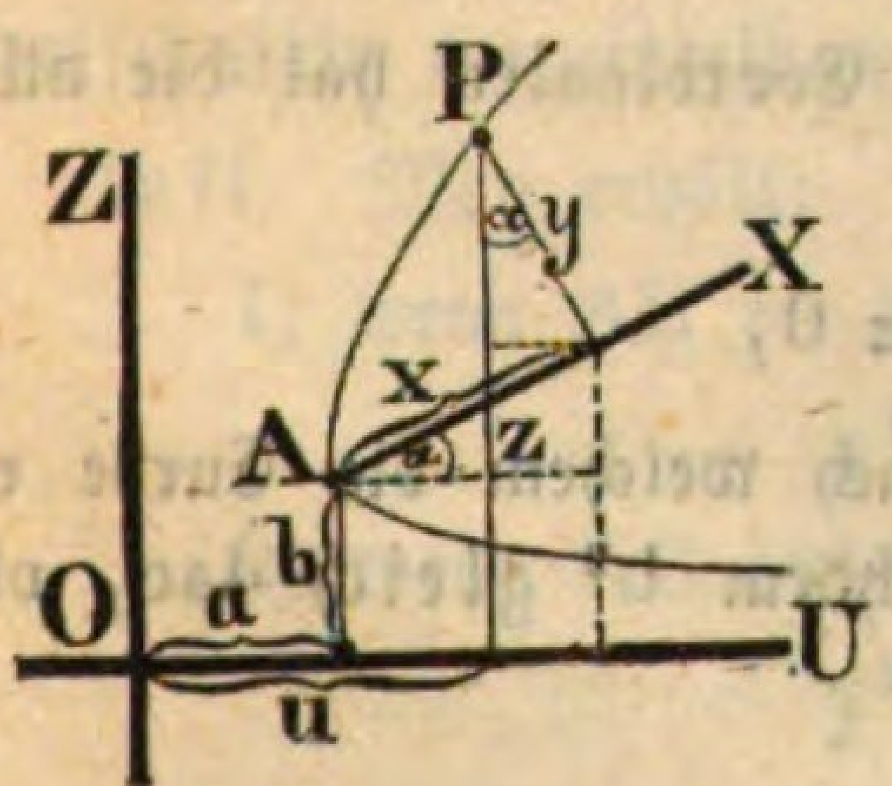
$$\frac{\left(y + \frac{d}{2a}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{a}}\right)^2} - \frac{\left(x - \frac{e}{2c}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{c}}\right)^2} = \mp 1.$$

Diese Gleichung ist nach §. 465. IV. und V. die Gleichung einer Hyperbel; der Mittelpunkt derselben hat die Abscisse $\frac{e}{2c}$ und die Ordinate $-\frac{d}{2a}$, die beiden halben Axen sind $\sqrt{\frac{k}{c}}$ und $\sqrt{\frac{k}{a}}$. Heißt die rechte Seite -1, so ist $\sqrt{\frac{k}{c}}$ die halbe Hauptaxe, und diese ist mit der Abscissenlinie (der X-Axe) parallel; heißt aber die rechte Seite $+1$, so ist $\sqrt{\frac{k}{a}}$ die halbe Hauptaxe, und sie steht dann senkrecht auf der Abscissenlinie.

Die Gleichung (6.), wenn $a.c < 0$ ist, also auch die Gleichung (1.), wenn $B^2 > 4AC$ ist, stellt sonach immer eine Hyperbel vor, wenn sie eine krumme Linie bedeutet; hingegen hat sie nie die Bedeutung zweier parallelen Linien, oder einer Linie, oder eines Punktes, noch ist sie ganz ohne geometrische Bedeutung. Dasselbe ergiebt sich aus der Untersuchung am Anfange dieses §.; es wird im vorliegenden Falle α positiv.

Anmerk. 1. Man kann von der allgemeinen Gleichung eines Kegelschnitts

$$(1.)\ Az^2 + Buz + Cu^2 + Dz + Eu + F = 0$$



auch unmittelbar zu seiner Scheitelgleichung übergehen. Gilt die Gleichung (1.) für die Axen U und Z, stellt A den Scheitel und AX die Axe des Kegelschnitts vor, bezeichnet a die Abscisse und b die Ordinate des Scheitels A, und α den Winkel, welchen AX mit U bildet, sind endlich x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes P des

Kegelschnitts für AX als Axe und A als Anfangspunkt der Abscissen: so ist

$$(2.)\quad z = b + x \sin\alpha + y \cos\alpha$$

$$(3.)\quad u = a + x \cos\alpha - y \sin\alpha,$$

und setzt man diese Werthe in die gegebene Gleichung ein und ordnet, so erhält die neue Gleichung die Form:

$$(4.)\quad A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0.$$

Soll nun diese Gleichung die Scheitelgleichung des Kegelschnitts werden, so muß sie auf die Form $y^2 = px + qx^2$ zu bringen sein; folglich muß

$$B' = 0,\quad D' = 0 \text{ und } F' = 0$$

werden. Aus diesen drei Gleichungen sind die Unbekannten a, b und α zu entwickeln, also der Punkt A und die Lage der Axe AX zu finden. Setzt man dann die gefundenen Werthe in die Gleichung (4.) ein, so erhält man die gewünschte Gleichung zwischen x und y. — Ist die Curve eine Parabel, so muß allerdings auch $C' = 0$ werden, und man hätte zur Entwicklung von a, b und α vier Gleichungen; allein die vierte Gleichung ist dann nicht eine von den andern unabhängige, sondern eine Folge der zwischen den Constanten der Gleichung (4.) Statt findenden Bedingung $(B')^2 = 4\,A'C'$. Da man nämlich $B' = 0$ gesetzt hat, so muß auch entweder $A' = 0$, oder $C' = 0$ werden, und weil aus $B' = 0$ der Winkel α gefunden wird (denn B' ist von a und b unabhängig), so kann die Gleichung $C' = 0$ benutzt werden, um den richtigen Werth von α zu bestimmen, für welchen die Scheitelgleichung der Parabel entsteht. Nothwendig aber ist die Gleichung $C' = 0$ zum Auffinden des richtigen Werthes von α nicht; denn wählt man aus $B' = 0$ den Winkel α so, daß nicht C', sondern $A' = 0$ wird, so muß die weitere Rechnung einen Widerspruch zeigen, weil nicht gleichzeitig $A' = B' = D' = 0$ sein kann; es würde sonst y aus der Gleichung ganz fortfallen.

Beisp. Lage und Gestalt folgender Curve zu bestimmen:

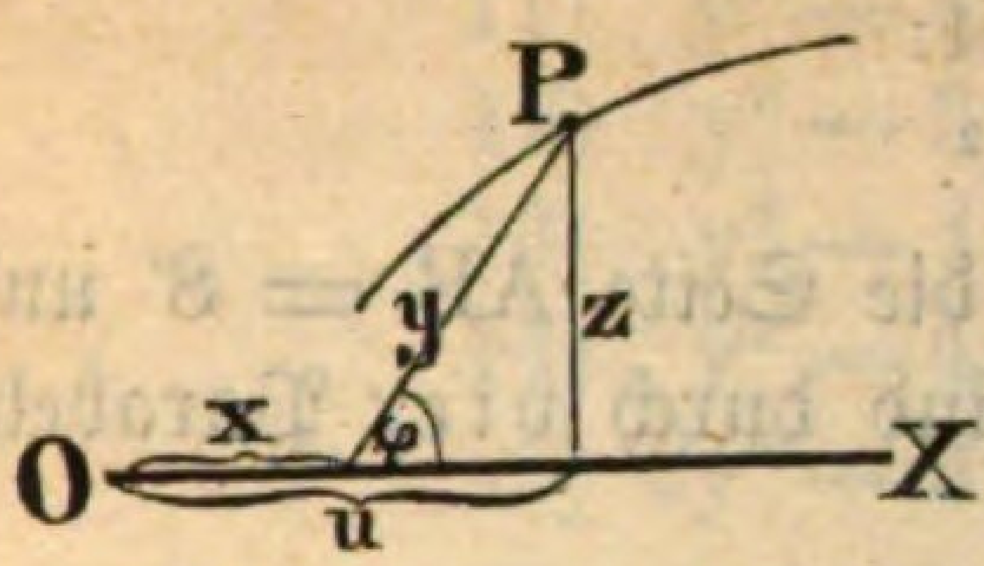
$$z^2 - 2uz + u^2 - 16u + 32 = 0.$$

Aufl. Die Curve ist eine Parabel, deren Scheitel die Abscisse + 3 und die Ordinate — 1 hat. Die Axe der Parabel bildet mit der Abscissenlinie einen Winkel von 45° und schneidet OU in der Entfernung + 4 von O; die Parabel selbst schneidet OU in den Entfernungen $8 \pm 4\sqrt{2}$ von O. Die Scheitelgleichung der Parabel wird $y^2 = 4\sqrt{2}\cdot x$.

Anmerkung 2. Auch für schiefwinklige Coordinaten hat die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts die Form

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

und auch für diese Gleichung gilt das Gesetz, nach welchem die Curve eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem b^2 gleich 4ac, oder kleiner als 4ac, oder größer als 4ac ist.



Bew. Es mögen u und z die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes P des Kegelschnitts sein, x und y die schiefwinkligen, φ der Coordinaten-Winkel. Für beide Coordinaten-Systeme können wir dieselbe Abscissenaxe und denselben Anfangspunkt der Abscissen voraussetzen. Die Gleichung des Kegelschnitts zwischen u und z hat dann die Form:

$$(1.)\quad Az^2 + Buz + Cu^2 + Dz + Eu + F = 0.$$

Nun ist aber:

$$(2.)\quad z = y \sin \varphi$$

$$(3.)\quad u = x + y \cos \varphi.$$

Setzt man diese Werthe in (1.) ein, so entsteht:

$$A \sin \varphi^2 . y^2 + By \sin \varphi . (x + y \cos \varphi) + C (x + y \cos \varphi)^2 + \ldots = 0.$$

Ordnet man, so ergiebt sich:

$$[A \sin\varphi^2 + B \sin\varphi \cos\varphi + C \cos \varphi^2] . y^2 + [B \sin\varphi + 2C \cos\varphi] . xy + Cx^2 + \ldots = 0,$$

also die Form:

$$(4.)\quad ay^2 + bxy + cx^2 \ldots . = 0.$$

Nun ist aber

$$b^2 = B^2 \sin \varphi^2 + 4\,BC \sin \varphi \cos \varphi + 4C^2 \cos \varphi^2$$

$$4ac = 4AC \sin \varphi^2 + 4\,BC \sin \varphi \cos \varphi + 4C^2 \cos \varphi^2,$$

und zieht man diese Gleichungen von einander ab, so erhält man

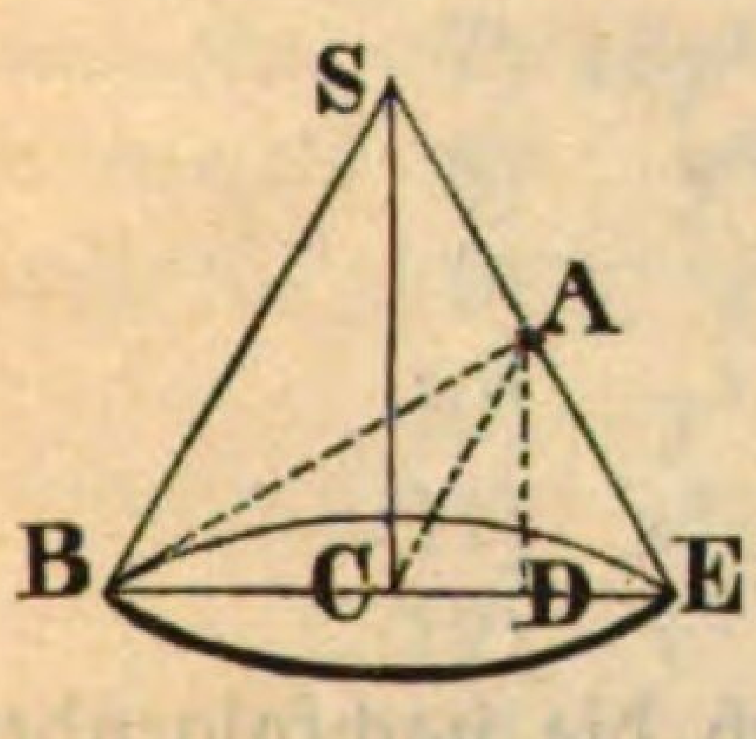
$$b^2 - 4ac = (B^2 - 4\,AC) . \sin \varphi^2,$$

woraus die Richtigkeit des Satzes folgt.

§. 468.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Der Durchmesser der Grundfläche des Kegels SBE sei = 2a, jede Seite ebenfalls = 2a. Es sei SC die Axe des Kegels und A der Mittelpunkt der Seite SE; von A aus sind die drei Linien gezogen: AB, AC und $AD \parallel SC$. Der Kegel ist auf dreifache Art durchschnitten, und zwar so, daß AB, AC und AD die Axen der drei entstandenen Kegelschnitte sind; es sollen die Gleichungen dieser Kegelschnitte unmittelbar aus dem Kegel hergeleitet werden.



Aufl. Man erhält:

1) wenn AB die Axe ist, die Ellipse:

$$y^2 = \tfrac{2}{3} a\sqrt{3} . x - \tfrac{2}{3} x^2;$$

2) wenn AC die Axe ist, die Parabel:

$$y^2 = ax;$$

3) wenn AD die Axe ist, die Hyperbel:

$$y^2 = \frac{1}{3}a\sqrt{3}\,.\,x + \frac{1}{3}x^2.$$

Aufgabe 2. Im Rechteck ABCD ist die Seite AB = 8′ und die Seite BC = 6′. Die Ecken A und C sind durch vier Parabeln verbunden, und zwar ist

für die erste	A	der Scheitel	und	AB	die	Axe,
» » zweite	C	»	»	»	CB	»	»
» » dritte	A	»	»	»	AD	»	»
» » vierte	C	»	»	»	CD	»	»;

man soll die Gleichungen dieser vier Parabeln für AB als Abscissenlinie und A als Anfangspunkt der Abscissen angeben.

Aufl. Für die erste Parabel ist die gesuchte Gleichung die Scheitelgleichung $y^2 = px$. Um p zu finden hat man $y = 6$, wenn $x = 8$ ist; daher entsteht $36 = p\,.\,8$, oder $p = \frac{9}{2}$. Die gesuchte Gleichung heißt also

$$y^2 = \frac{9}{2}x.$$

Für die zweite Parabel ist $p = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$; aus der Figur findet man nun leicht, wenn man von einem beliebigen Punkte P der Parabel sowohl auf AB, als auch auf BC eine Senkrechte fällt, die Gleichung:

$$(8 - x)^2 = \frac{32}{3}\,.\,(6 - y), \text{ oder}$$

$$3x^2 + 32y - 48x = 0.$$

Für die dritte Parabel erhält man auf ähnliche Weise:

$$y = \frac{3}{32}x^2.$$

Für die vierte Parabel entsteht die Gleichung:

$$2y^2 - 24y + 9x = 0.$$

Aufgabe 3. Dieselbe Aufgabe, es sei aber ABCD ein Quadrat zur Seite a.

Aufl. Die Gleichungen der vier Parabeln sind:

1) $y^2 = ax$

2) $x^2 + ay - 2ax = 0$

3) $y = \dfrac{1}{a}x^2$

4) $y^2 - 2ay + ax = 0.$

Aufgabe 4. Sind die Curven, welche durch die nachfolgenden Gleichungen gegeben sind, Parabeln, Ellipsen oder Hyperbeln?

1)	$y^2 + x = 1$	6)	$y^2 = 2x - x^2$
2)	$y + x^2 = 1$	7)	$y^2 = 2x + x^2$
3)	$y^2 - x^2 = 1$	8)	$y = 2x + x^2$
4)	$(y - x)^2 = x$	9)	$xy = 1$
5)	$y^2 + 2x^2 = x$	10)	$y^2 - xy = 4$

11) $y^2 - xy + x^2 = 10$
12) $y^2 - 3xy + x^2 = 10$
13) $y^2 - 4xy + 4x^2 - x - 10 = 0$
14) $y^2 - 4xy + 5x^2 - y - x - 1 = 0$
15) $2y^2 - 3xy - 6x^2 - 2y - x + 9 = 0.$

Antw. Nr. 1, 2, 4, 8 und 13 sind Parabeln; Nr. 5, 6 (Kreis), 11 und 14 sind Ellipsen; No. 3, 7, 9, 10, 12 und 15 sind Hyperbeln

Aufgabe 5. Es sind drei Kegelschnitte gegeben:

1) $y^2 = 2x$
2) $y^2 = 2x - 3x^2$
3) $y^2 = 4x + 5x^2$,

und diese Gleichungen gelten für dasselbe Coordinaten-System. Wenn nun für dieses Coordinaten-System ein Punkt B die Abscisse -4 und die Ordinate 0 hat, ein zweiter Punkt C die Abscisse 0 und die Ordinate -3, wie heißen die Gleichungen der drei Kegelschnitte für BC als Abscissenlinie und B als Anfangspunkt der Abscissen?

Antw. 1) $16z^2 - 24uz + 9u^2 - 30z - 40u + 200 = 0$
2) $43z^2 + 48uz + 57u^2 - 390z - 520u + 1400 = 0$
3) $29z^2 + 144uz + 71u^2 - 540z - 720u + 1600 = 0.$

Aufgabe 6. Die Lage und Gestalt folgender Curven zu bestimmen:

1) $y^2 - 4x + 6y + 1 = 0.$
2) $y^2 - 2y + x - 3 = 0.$
3) $2y^2 + 6y + 3x - 5 = 0.$
4) $2x^2 - y - 16x + 34 = 0.$
5) $x^2 + 2y - 4x - 3 = 0.$
6) $x^2 + 3y + 2x + 10 = 0.$
7) $16y^2 + 9x^2 - 128y - 36x + 148 = 0.$
8) $y^2 + 4x^2 - 2y + 6x - 1 = 0.$
9) $y^2 - x^2 + 4y + 2x - 1 = 0.$
10) $y^2 - 2x^2 - 2y + x + \frac{15}{8} = 0.$
11) $x^2 + 4y + 8x + 16 = 0.$
12) $y^2 - x^2 + 8x - 12 = 0.$
13) $9y^2 + x^2 + 8x + 7 = 0.$
14) $2y^2 - 3xy + x^2 - 3y + 2x + 1 = 0.$
15) $x^2 - 2xy + 4y - 4x + 4 = 0.$
16) $9y^2 - x^2 + 2x + 8 = 0.$
17) $y^2 + 2x + 4 = 0.$
18) $y^2 + 4x^2 + 16y - 40x + 64 = 0.$
19) $xy - 12 = 0.$

20) $y^2 + 4x^2 - 12y - 24x + 68 = 0.$
21) $y^2 + xy - 4 = 0.$
22) $y^2 + x - 4 = 0.$
23) $x^2 + y - 4 = 0.$
24) $y^2 - x^2 - 4 = 0.$
25) $y^2 + x^2 - 2y + 4x + 6 = 0.$
26) $4y^2 + x^2 - 4y + 8x + 17 = 0.$
27) $4y^2 + x^2 + 80y + 8x + 415 = 0.$
28) $y^2 - 2xy + x^2 - x + 3 = 0.$
29) $3y^2 + 5x^2 + 24y + 47 = 0.$
30) $9y^2 - 2x^2 - 54y + 16x + 46 = 0.$

Auflösung.

Zu 1.) $(y + 3)^2 = 4x - 1 + 9$ oder $(y + 3)^2 = 4(x + 2)$. Die Curve ist eine Parabel, deren Axe mit der Abscissenlinie parallel ist, und deren Scheitel die Abscisse -2 und die Ordinate -3 hat. Der Parameter ist $= +4$; die Curve erstreckt sich also vom Scheitel aus nach rechts. — Der Leser möge bei allen Beispielen die Curven aufzeichnen.

Zu 2.) Die Curve ist eine Parabel, deren Axe mit der Abscissenlinie parallel ist, und deren Scheitel die Abscisse $+4$ und die Ordinate $+1$ hat. Der Parameter ist $= -1$; folglich erstreckt sich die Curve vom Scheitel aus nach links; sie schneidet die X-Axe im Endpunkt der Abscisse $+3$.

Zu 3.) Die Curve ist eine Parabel; ihre Axe ist mit der Abscissenlinie parallel, ihr Scheitel hat die Abscisse $+3\frac{1}{6}$ und die Ordinate $-1\frac{1}{2}$; der Parameter ist $= -\frac{3}{2}$. Die Curve erstreckt sich also vom Scheitel aus nach links; sie schneidet die Abscissenlinie in der Entfernung $+1\frac{2}{3}$ vom Anfangspunkt der Abscissen.

Zu 4.) $x^2 - 8x = \frac{1}{2}y - 17$ oder
$(x - 4)^2 = \frac{1}{2}y - 1$ oder
$(x - 4)^2 = \frac{1}{2}(y - 2)$.

Die Curve ist eine Parabel, deren Axe auf der Abscissenlinie senkrecht steht, und deren Scheitel die Abscisse $+4$ und die Ordinate $+2$ hat. Der Parameter ist $= +\frac{1}{2}$; die Curve erstreckt sich also nach oben und schneidet die Abscissenlinie nicht.

Zu 5.) Die Curve ist eine Parabel, deren Axe auf der Abscissenlinie senkrecht steht. Der Scheitel hat die Abscisse $+2$ und die Ordinate $+\frac{7}{2}$, der Parameter ist $= -2$; die Curve erstreckt sich also vom Scheitel aus nach unten und schneidet die Abscissenlinie in zwei Punkten ($x_0 = 2 \pm \sqrt{7}$).

Zu 6.) Die Curve ist eine Parabel, deren Axe auf der Abscissenlinie senkrecht steht. Der Scheitel hat die Abscisse -1 und die Ordinate -3, der Parameter ist $= -3$, so daß sich also die Curve vom Scheitel aus nach unten erstreckt und die Abscissenlinie nicht schneidet.

Zu 7.) $16(y^2 - 8y) + 9(x^2 - 4x) = -148$
$16(y - 4)^2 + 9(x - 2)^2 = 144$

$$\frac{(y-4)^2}{9} + \frac{(x-2)^2}{16} = 1.$$

Die Curve ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Abscisse $+2$ und die Ordinate $+4$ hat. Die halbe große Axe ist $= 4$, die halbe kleine $= 3$, und die große Axe ist mit der Abscissenlinie parallel.

Zu 8.) Die Curve ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Abscisse $-\frac{3}{4}$ und die Ordinate $+1$ hat. Die halbe große Axe ist $= \frac{1}{2}\sqrt{17}$, die halbe kleine $= \frac{1}{4}\sqrt{17}$. Die große Axe steht auf der Abscissenlinie senkrecht. Die Ellipse schneidet die Abscissenlinie in den Entfernungen $+0{,}151\ldots$ und $-1{,}651\ldots$ vom Anfangspunkte der Abscissen.

Zu 9.) $y^2 + 4y - (x^2 - 2x) = 1$

$$(y+2)^2 - (x-1)^2 = 4$$

$$\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{4} = +1.$$

Die Curve ist eine Hyperbel, deren Mittelpunkt die Abscisse $+1$ und die Ordinate -2 hat. Die Hauptaxe steht auf der Abscissenlinie senkrecht (weil die rechte Seite $+1$ heißt), die halbe Hauptaxe ist $= 2$, die halbe Nebenaxe ebenfalls $= 2$; die Hyperbel ist also gleichseitig. Da die halbe Hauptaxe dem absoluten Werthe der Ordinate des Mittelpunkts gleich ist, so geht die Abscissenlinie durch den einen Scheitel der Hyperbel, und dieser Scheitel ist der einzige Punkt, welchen die Hyperbel mit der Abscissenlinie gemein hat; setzt man $y = 0$, so wird $x = +1$. Um die Hyperbel richtig aufzuzeichnen, kann man für x die Werthe $0, -1, -2$ u. s. w. setzen und y berechnen; für $x = +2, +3, +4$ u. s. w. erhält man für y bezüglich dieselben Werthe. Bequemer aber ist es, zuerst die Hauptaxe und den Mittelpunkt richtig aufzuzeichnen und nun einzelne Punkte der Hyperbel aus ihrer Mittelpunktgleichung $y^2 = x^2 - 4$ zu berechnen.

Zu 10.) $y^2 - 2y - 2(x^2 - \frac{1}{2}x) = -\frac{15}{8}$

$$(y-1)^2 - 2(x-\tfrac{1}{4})^2 = -\tfrac{15}{8} + 1 - \tfrac{1}{8}$$

$$\frac{(y-1)^2}{1} - \frac{(x-\frac{1}{4})^2}{\frac{1}{2}} = -1.$$

Die Curve ist eine Hyperbel, deren Mittelpunkt die Abscisse $+\frac{1}{4}$ und die Ordinate $+1$ hat. Die Hauptaxe ist mit der Abscissenlinie parallel (weil die rechte Seite -1 heißt), die halbe Hauptaxe ist $= \sqrt{\frac{1}{2}}$, die halbe Nebenaxe $= 1$. Hieraus ergiebt sich noch, daß die beiden Scheitel die Abscissen $\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{2}}$ haben, ihre Ordinaten aber $= +1$ sind.

Zu 11.) Die Curve ist eine Parabel, deren Axe auf der Abscissenlinie senkrecht steht. Der Scheitel hat die Abscisse -4 und die Ordinate 0, der Parameter ist $= -4$; die Parabel hat also ihren Scheitel in der Abscissenlinie und erstreckt sich von ihm aus nach unten.

Zu 12.) Die Curve ist eine gleichseitige Hyperbel, jede der beiden

halben Axen ist $= 2$. Der Mittelpunkt hat die Abscisse $+4$ und die Ordinate 0, die Abscissenlinie fällt mit der Hauptaxe der Hyperbel zusammen.

Zu 13.) Die Curve ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Ordinate -4 und die Abscisse 0 hat. Die halbe große Axe ist $= 3$, die halbe kleine Axe $= 1$; die große Axe liegt in der Abscissenlinie.

Zu 14.) Die Gleichung stellt keine Curve vor, sondern zwei gerade, sich schneidende Linien. Entwickelt man y, so erhält man

$$y = 1 + x \quad \text{und} \quad y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x,$$

so daß also die gegebene Gleichung auf die Form

$$(y - x - 1)(2y - x - 1) = 0$$

gebracht werden kann. Die erste Linie schneidet die Y-Axe in der Entfernung $+1$ von O, die zweite in der Entfernung $+\frac{1}{2}$, beide schneiden die X-Axe in der Entfernung -1 von O.

Zu 15.) Die Gleichung stellt keine Curve vor; sie läßt sich auf die Form bringen

$$2y(x-2) = (x-2)^2 \text{ oder}$$
$$(x-2)(2y - x + 2) = 0$$

und giebt also zwei gerade Linien

$$x = 2 \quad \text{und} \quad y = -1 + \tfrac{1}{2}x,$$

von welchen die erste mit der Y-Axe parallel ist und die X-Axe in der Entfernung $+2$ von O schneidet. Die zweite Linie geht durch denselben Punkt der X-Axe und schneidet die Y-Axe in der Entfernung -1 von O.

Zu 16.) Die Curve ist eine Hyperbel, deren Mittelpunkt die Abscisse $+1$ und die Ordinate 0 hat. Die halbe Hauptaxe ist $= 3$, die halbe Nebenaxe $= 1$; die Hauptaxe liegt in der Abscissenlinie, und die beiden Scheitel haben die Abscissen $+4$ und -2.

Zu 17.) Die Curve ist eine Parabel, deren Scheitel die Abscissen -2 und die Ordinate 0 hat. Die Axe fällt mit der Abscissenlinie zusammen, und der Parameter ist $= -2$, so daß sich die Curve von ihrem Scheitel aus nach links erstreckt. (Für $x = -4$ ist $y = \pm 2$.)

Zu 18.) Die Curve ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Abscisse $+5$ und die Ordinate -8 hat. Die halbe große Axe ist $= 10$, die halbe kleine $= 5$; die große Axe steht auf der Abscissenlinie senkrecht, und die Ellipse schneidet die Abscissenlinie in den Endpunkten der Abscissen $+8$ und $+2$.

Zu 19.) Die Curve ist eine Hyperbel. Aus ihrer Gleichung $xy = 12$ erkennt man zunächst, daß sie symmetrisch zu den beiden Coordinatenaxen X und Y liegt; denn diese Gleichung bleibt unverändert, wenn man x mit y vertauscht. Für $x = 0$ ist $y = \pm\infty$, und für $x = \pm\infty$ ist $y = 0$; die Hyperbel trifft also die Coordinatenaxen nicht, nähert sich aber der X-Axe um so mehr, je größer der absolute Werth der Abscisse x ist, und der Y-Axe um so mehr, je näher der absolute Werth von x an Null liegt. Da ferner x und y immer gleichzeitig positiv und negativ sind, so erkennt man, daß die eine der conjugirten Hyperbeln im ersten, die andere im dritten Quadranten

liegt. Setzt man z. B. $x = \pm 1$, so wird $y = \pm 12$, setzt man $x = \pm 12$, so wird $y = \pm 1$. Hieraus läßt sich nun schließen, daß der Durchschnittspunkt der Coordinatenaxen der Mittelpunkt der Hyperbel sein wird, ihre Hauptaxe aber den ersten und dritten Quadranten so durchschneidet, daß sie mit jeder Coordinatenaxe einen Winkel von 45° bildet. Es wird dies durch die weitere Rechnung bestätigt. Nach §. 467. (5.) ist $\operatorname{tg} 2\alpha = \infty$, woraus $\alpha = 45°$ folgt. Dreht man nun die X-Axe um O, bis sie einen Winkel von 45° beschrieben hat, und leitet die Gleichung für diese neue Lage der Axe her, nennt die Abscisse u und die Ordinate z, so entsteht

$$y = u\sqrt{\tfrac{1}{2}} + z\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$x = u\sqrt{\tfrac{1}{2}} - z\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

und setzt man diese Werthe in $xy = 12$ ein, so entsteht

$$\frac{u^2}{2} - \frac{z^2}{2} = 12 \text{ oder}$$

$$\frac{z^2}{24} - \frac{u^2}{24} = -1.$$

Diese Gleichung ist aber die Mittelpunkts-Gleichung der Hyperbel; man erkennt aus ihr, daß die Hyperbel gleichseitig ist, denn jede der beiden halben Axen ist $= 2\sqrt{6}$. In Bezug auf das ursprüngliche Coordinaten-System haben die beiden Scheitel die Abscissen $+2\sqrt{3}$ und $-2\sqrt{3}$ und resp. die Ordinaten $+2\sqrt{3}$ und $-2\sqrt{3}$.

Zu 20.) Die Curve ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Abscisse $+3$ und die Ordinate $+6$ hat. Die halbe große Axe ist $= 2$, die halbe kleine $= 1$; die große Axe steht auf der Abscissenlinie senkrecht.

Zu 21.) Die Curve ist eine Hyperbel: Um ihre Lage und ihre beiden Axen zu finden, drehen wir die X-Axe um O, bis sie den Winkel α beschrieben hat, und bezeichnen die Coordinaten der Curve für die neue Axe mit u und z. Nach §. 467. (5.) ist dann $\operatorname{tg} 2\alpha = -1$, woraus $2\alpha = 135°$ folgt, also

$$\alpha = 67° \; 30'.$$

Es ergiebt sich dann aus §. 467. (3.) für diesen Werth von α:

$$z^2 (\cos\alpha^2 - \sin\alpha\cos\alpha) + u^2 (\sin\alpha^2 + \sin\alpha\cos\alpha) - 4 = 0 \text{ oder}$$
$$z^2 (1 + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha) + u^2 (1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha) = 8.$$

Aus $\operatorname{tg} 2\alpha = -1$ folgt aber $\cos 2\alpha = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $\sin 2\alpha = +\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, und substituirt man diese Werthe, so entsteht:

$$z^2 (1 - \sqrt{2}) + u^2 (1 + \sqrt{2}) = 8 \text{ oder}$$

$$\frac{z^2}{8(1+\sqrt{2})} - \frac{u^2}{8(-1+\sqrt{2})} = -1.$$

Hieraus ergiebt sich nun vollständig die Gestalt der Hyperbel und ihre Lage zu dem ursprünglichen Axensystem. Der Mittelpunkt der Hyperbel ist der Durchschnittspunkt O der Coordinatenaxen X und Y, ihre Hauptaxe schneidet die

X-Axe unter einem Winkel von 67° 30′; die halbe Hauptaxe ist $= \sqrt{8(-1+\sqrt{2})}$, wodurch die Lage beider Scheitel bestimmt ist, und die halbe Nebenaxe ist $= \sqrt{8(1+\sqrt{2})}$.

Zu 22.) Die Curve ist eine Parabel, deren Scheitel die Abscisse $+4$ und die Ordinate 0 hat; ihre Axe fällt mit der Abscissenlinie zusammen, und ihr Parameter ist $= -1$, so daß sich die Curve vom Scheitel aus nach links erstreckt. (Für $x = 0$ ist $y = \pm 2$, für $x = -5$ ist $y = \pm 3$.)

Zu 23.) Die Curve ist eine Parabel und zwar dieselbe, welche die vorhergehende Aufgabe bestimmt, nur in anderer Lage. Der Scheitel hat die Abscisse 0 und die Ordinate $+4$, die Axe steht auf der Abscissenlinie senkrecht, der Parameter ist $= -1$, so daß sich die Curve vom Scheitel auch nach unten erstreckt. Sie schneidet die X-Axe in den Endpunkten der Abscissen $+2$ und -2.

Zu 24.) Die Curve ist eine gleichseitige Hyperbel; ihre Gleichung läßt sich unmittelbar auf die Form bringen

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = +1$$

und ist die Mittelpunkts-Gleichung für die Nebenaxe als Abscissenlinie. Jede der beiden halben Axen der Hyperbel ist $= 2$. Die Nebenaxe liegt in der gegebenen X-Axe, die Hauptaxe fällt mit der Y-Axe zusammen.

Zu 25.) Die gegebene Gleichung ist ohne geometrische Bedeutung; denn sie läßt sich auf die Form bringen: $(y-1)^2 + (x+2)^2 + 1 = 0$.

Zu 26.) Die gegebene Gleichung stellt einen Punkt vor, dessen Abscisse -4 und dessen Ordinate $+\frac{1}{2}$ ist.

Zu 27.) Die Curve ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Abscisse -4 und die Ordinate -10 hat. Die halbe große Axe ist $= 1$, die halbe kleine $= \frac{1}{2}$, die große Axe ist mit der Abscissenlinie parallel.

Zu 28.) Man erkennt unmittelbar, daß die Curve eine Parabel ist, deren Axe mit der X-Axe einen Winkel von 45° oder 135° bildet ($\operatorname{tg} 2\alpha = \infty$). Verschiebt man nun die X-Axe durch drehende Bewegung um O, bis sie einen Winkel von 45° beschrieben hat, und leitet die Gleichung der Parabel für diese neue Abscissenlinie her, nennt die Abscisse u und die Ordinate z, so erhält man (am bequemsten, wenn man der gegebenen Gleichung die Form $(y-x)^2 - x + 3 = 0$ giebt):

$$2z^2 + z\sqrt{\tfrac{1}{2}} - u\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 3 = 0 \text{ und hieraus:}$$

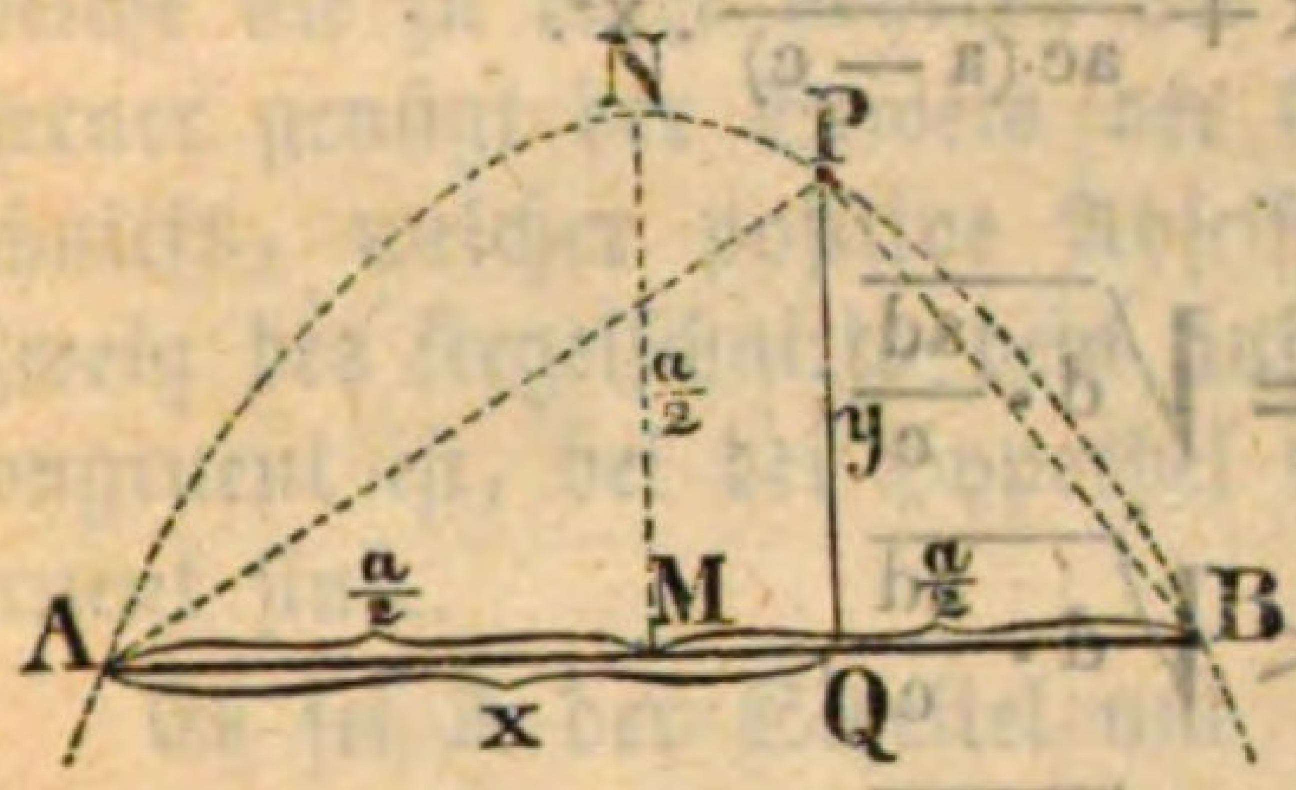
$$\left(z + \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\left(u - \frac{47\sqrt{2}}{16}\right).$$

Die Axe der Parabel ist sonach mit dieser neuen Abscissenlinie parallel, und ihr Scheitel hat die Abscisse $\frac{47\sqrt{2}}{16}$ und die Ordinate $-\frac{\sqrt{2}}{8}$, der Parameter ist $= \frac{1}{4}\sqrt{2}$; folglich erstreckt sich die Parabel vom Scheitel aus nach

rechts. In Bezug auf das ursprüngliche Coordinaten-System findet man die Abscisse des Scheitels $= 3\frac{1}{16}$ und die Ordinate $= 2\frac{13}{16}$.

Zu 29.) Die Curve ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Abscisse 0 und die Ordinate -4 hat. Die halbe große Axe ist $= \sqrt{\frac{1}{3}}$, die halbe kleine $= \sqrt{\frac{1}{5}}$; die große Axe steht auf der Abscissenlinie senkrecht und liegt also in der Y-Axe.

Zu 30.) Die Curve ist eine Hyperbel, deren Mittelpunkt die Abscisse $+4$ und die Ordinate $+3$ hat. Die halbe Hauptaxe ist $= \sqrt{\frac{1}{3}}$, die halbe Nebenaxe $= \sqrt{\frac{3}{2}}$; die Hauptaxe steht auf der Abscissenlinie senkrecht.

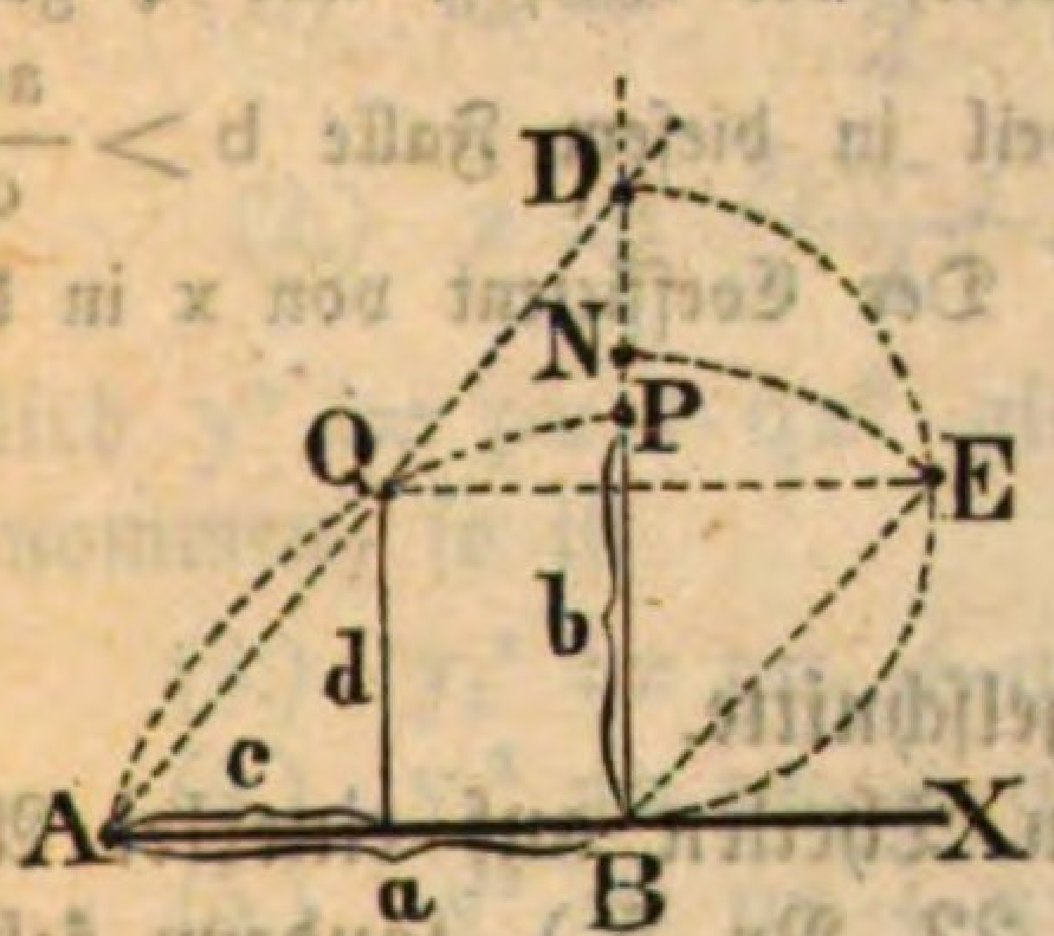


Aufgabe 7. Es ist eine Linie AB = a gegeben; man soll den geometrischen Ort des Punktes P der Bedingung gemäß bestimmen, daß der Inhalt des Dreiecks PAB dem Producte der beiden Abschnitte gleich sein soll, in welche die Linie AB durch die von P auf sie gefällte Senkrechte PQ zerlegt wird.

Aufl. Nimmt man AB zur Abscissenlinie und A zum Anfangspunkt der Abscissen, bezeichnet die Abscisse von P mit x und die Ordinate mit y, so erhält man unmittelbar aus der Bedingung der Aufgabe eine Gleichung, welche sich auf folgende Form bringen läßt:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = -\frac{a}{2}\left(y - \frac{a}{2}\right).$$

Der gesuchte geometrische Ort ist also eine Parabel, deren Scheitel (N) die Abscisse $\frac{a}{2}$ und die Ordinate $\frac{a}{2}$ hat. Da der Parameter negativ ist, so erstreckt sich die Parabel von N aus nach unten. Ihre Axe NM steht auf AB senkrecht und halbirt AB; die Parabel selbst geht durch A und B.



Aufgabe 8. In Bezug auf AX als Abscissenaxe und A als Anfangspunkt der Abscissen sind zwei Punkte P und Q durch ihre Coordinaten gegeben: P durch (a, b) und Q durch (c, d); man soll den Kegelschnitt bestimmen, welcher A zum Scheitel und AX zur Axe hat und durch die Punkte P und Q geht.

Aufl. Wir werden alle Coordinaten a, b, c und d positiv und $a > c$ annehmen und überlassen die Untersuchung der übrigen Fälle dem Leser. — Die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts hat die Form

$$(1.)\quad y^2 = px + qx^2$$

und damit dieser Kegelschnitt durch P und Q geht, muß

(2.) $b^2 = pa + qa^2$ und

(3.) $d^2 = pc + qc^2$

sein. Hieraus ergiebt sich

$$p = \frac{a^2d^2 - b^2c^2}{ac(a - c)} \text{ und } q = \frac{b^2c - ad^2}{ac(a - c)}.$$

Setzt man diese Werthe in (1.) ein, so ergiebt sich die Scheitelgleichung des gesuchten Kegelschnitts:

$$(4.)\quad y^2 = \frac{a^2d^2 - b^2c^2}{ac(a - c)} \cdot x + \frac{b^2c - ad^2}{ac(a - c)} \cdot x^2.$$

Dieser Kegelschnitt ist

eine Parabel, wenn $b = \sqrt{d \cdot \frac{ad}{c}}$,

eine Ellipse, wenn $b < \sqrt{d \cdot \frac{ad}{c}}$,

eine Hyperbel, wenn $b > \sqrt{d \cdot \frac{ad}{c}}$ ist.

Verbindet man A und Q durch eine gerade Linie und verlängert sie bis zu ihrem Durchschnittspunkte D mit der Richtung der Ordinate BP, so ist $BD = \frac{ad}{c}$. Schlägt man noch über BD einen Halbkreis, zieht QE $\mp$ AX und macht endlich BN = BE, so ist $BN = \sqrt{d \cdot \frac{ad}{c}}$. Hieraus folgt: fallen N und P zusammen, so ist der gefundene Kegelschnitt eine Parabel, liegt P unterhalb N, so ist er eine Ellipse, liegt P oberhalb N: eine Hyperbel. — Liegt P in D, so geht die Hyperbel in eine gerade Linie über, liegt P oberhalb D, so wird der Kegelschnitt wieder eine Hyperbel, aber A ist dann nicht der Scheitel des Theiles der Hyperbel, der durch P und Q geht, sondern Scheitel der conjugirten Hyperbel, weil in diesem Falle $b > \frac{ad}{c}$, also $bc > ad$, folglich auch $b^2c^2 > a^2d^2$ ist. Der Coefficient von x in der Gleichung (4.) wird dann negativ.

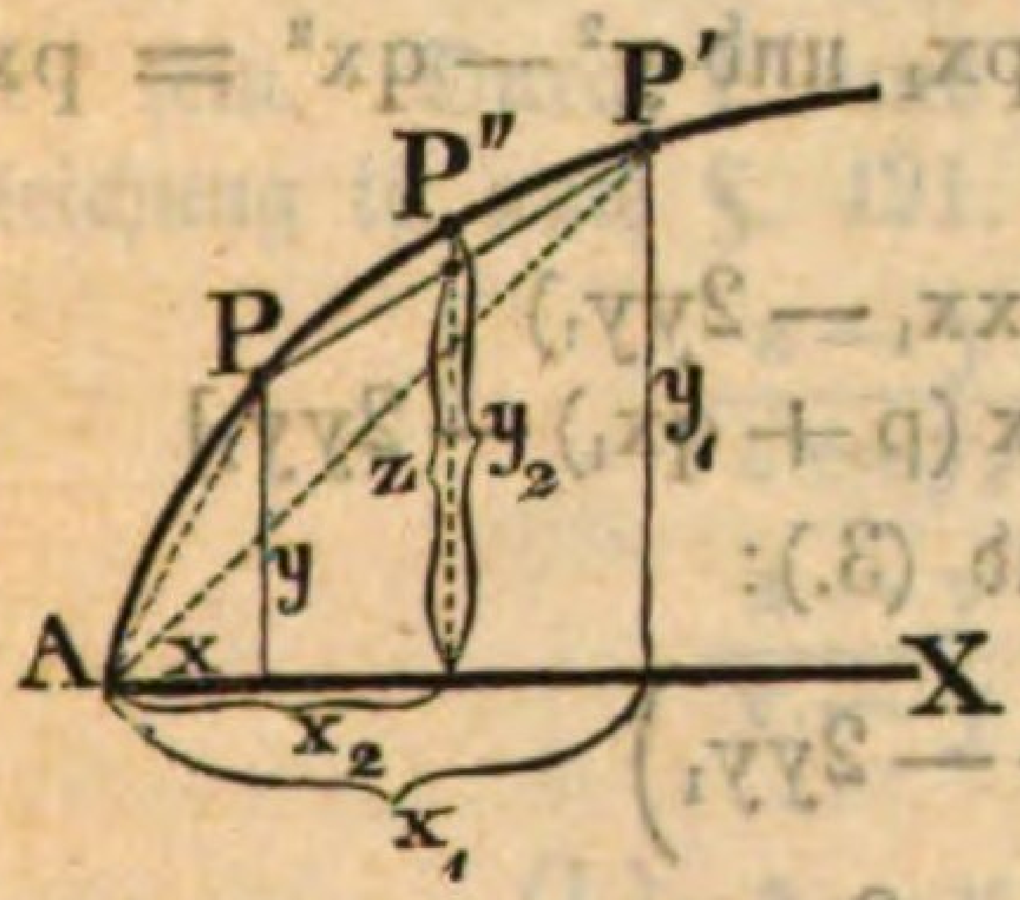
§. 469.

Die Concavität der Kegelschnitte.

Jeder Kegelschnitt ist in allen seinen Theilen auf einerlei Art gekrümmt; er hat keinen Wendepunkt (§. 22. Nr. 5.), sondern kehrt an jeder Stelle der Axe seine concave Seite zu. Diese Seite heißt seine innere, die convexe seine äußere Seite. — Man sagt auch, ein Punkt liegt innerhalb, oder außerhalb eines Kegelschnittes, je nachdem er auf der concaven oder convexen Seite desselben liegt.

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß alle Punkte des Kegelschnitts, welche zwischen den Endpunkten jeder beliebig kleinen Sehne liegen, auf der der Axe entgegengesetzten Seite der Sehne sich befinden. Es genügt aber, dies für einen Punkt nachzuweisen; denn auf der Seite der Sehne, auf welcher ein Punkt liegt, müssen alle liegen, weil eine gerade Linie einen Kegelschnitt in nicht mehr als zwei Punkten schneiden kann. Es ist dies schon am Kegel nachgewiesen worden, folgt aber auch aus der Verbindung der Gleichung des Kegelschnitts mit der Gleichung der geraden Linie (vergl. §. 423. Nr. 3.), welche nie zu einer höheren als quadratischen Gleichung führen kann. Ferner genügt der Beweis der Concavität für den Theil des Kegelschnitts, welcher positive Abscissen und Ordinaten hat, weil dieser Zweig des Kegelschnitts dem auf der andern Seite der Axe liegenden congruent ist, bei der Hyperbel aber auch die conjugirten Theile congruent sind.

Es sei A der Scheitel und AX die Axe des Kegelschnitts, PP′ eine beliebige Sehne, deren Endpunkte die Coordinaten x und y, x_1 und y_1 haben. Der Punkt P″ sei der Punkt des Bogens PP′, dessen Ordinate in der Mitte zwischen y und y_1 liegt; x_2 und y_2 sind seine Coordinaten. Der Punkt der Sehne PP′, dessen Abscisse x_2 ist, habe die Ordinate z, dann wird behauptet:



$$y_2 > z.$$

Zunächst ist $x_2 = x + \dfrac{x_1 - x}{2}$ oder

(1.) $x_2 = \dfrac{x_1 + x}{2}$; ferner

(2.) $z = \dfrac{y_1 + y}{2}$.

Wird $y^2 = px + qx^2$ als Scheitelgleichung des Kegelschnitts angenommen, so ist

(3.) $y_1^2 = px_1 + qx_1^2$

(4.) $y_2^2 = px_2 + qx_2^2$

(5.) $y^2 = px + qx^2$,

und zieht man die beiden ersten, dann auch die beiden letzten Gleichungen von einander ab, so entsteht:

$$y_1^2 - y_2^2 = p(x_1 - x_2) + q(x_1^2 - x_2^2)$$
$$y_2^2 - y^2 = p(x_2 - x) + q(x_2^2 - x^2)$$

und aus ihnen folgt wieder durch Subtraction:

$$(6.)\quad y_1^2 - 2y_2^2 + y^2 = p\,(x_1 - 2x_2 + x) + q\,(x_1^2 - 2x_2^2 + x^2)$$

Es ist aber aus (1.):

$$x_1 - 2x_2 + x = 0 \text{ und}$$

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x^2 = \frac{(x_1 - x)^2}{2};$$

daher ergiebt sich aus (6.):

$$y_1^2 - 2y_2^2 + y^2 = q\cdot\frac{(x_1 - x)^2}{2}; \text{ folglich ist}$$

$$y_2^2 = \frac{y_1^2 + y^2}{2} - q\cdot\left(\frac{x_1 - x}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{y_1 + y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y}{2}\right)^2 - q\cdot\left(\frac{x_1 - x}{2}\right)^2.$$

Aus (2.) folgt daher:

$$y_2^2 = z^2 + \tfrac{1}{4}\,(y_1^2 + y^2 - 2yy_1 - qx_1^2 - qx^2 + 2qxx_1).$$

Aus (3.) und (5.) ist aber $y_1^2 - qx_1^2 = px_1$ und $y^2 - qx^2 = px$; daher folgt:

$$y_2^2 = z^2 + \tfrac{1}{4}\,(px_1 + px + 2qxx_1 - 2yy_1)$$

$$= z^2 + \tfrac{1}{4}\,[x_1\,(p + qx) + x\,(p + qx_1) - 2yy_1]$$

Hieraus ergiebt sich mit Hülfe von (5.) und (3.):

$$y_2^2 = z^2 + \tfrac{1}{4}\left(x_1\frac{y^2}{x} + x\frac{y_1^2}{x_1} - 2yy_1\right)$$

$$= z^2 + \tfrac{1}{4}\,\frac{(x_1y)^2 + (xy_1)^2 - 2xx_1yy_1}{xx_1}$$

$$= z^2 + \frac{1}{xx_1}\left(\frac{x_1y - xy_1}{2}\right)^2.$$

Nach §. 426. I. ist aber $\frac{x_1y - xy_1}{2}$ der Inhalt des Dreiecks APP', und bezeichnen wir diesen Inhalt mit Δ, so folgt:

$$y_2^2 = z^2 + \frac{\Delta^2}{x.x_1},$$

woraus sich die Richtigkeit des Satzes ergiebt.

Der Kegelschnitt und die gerade Linie.

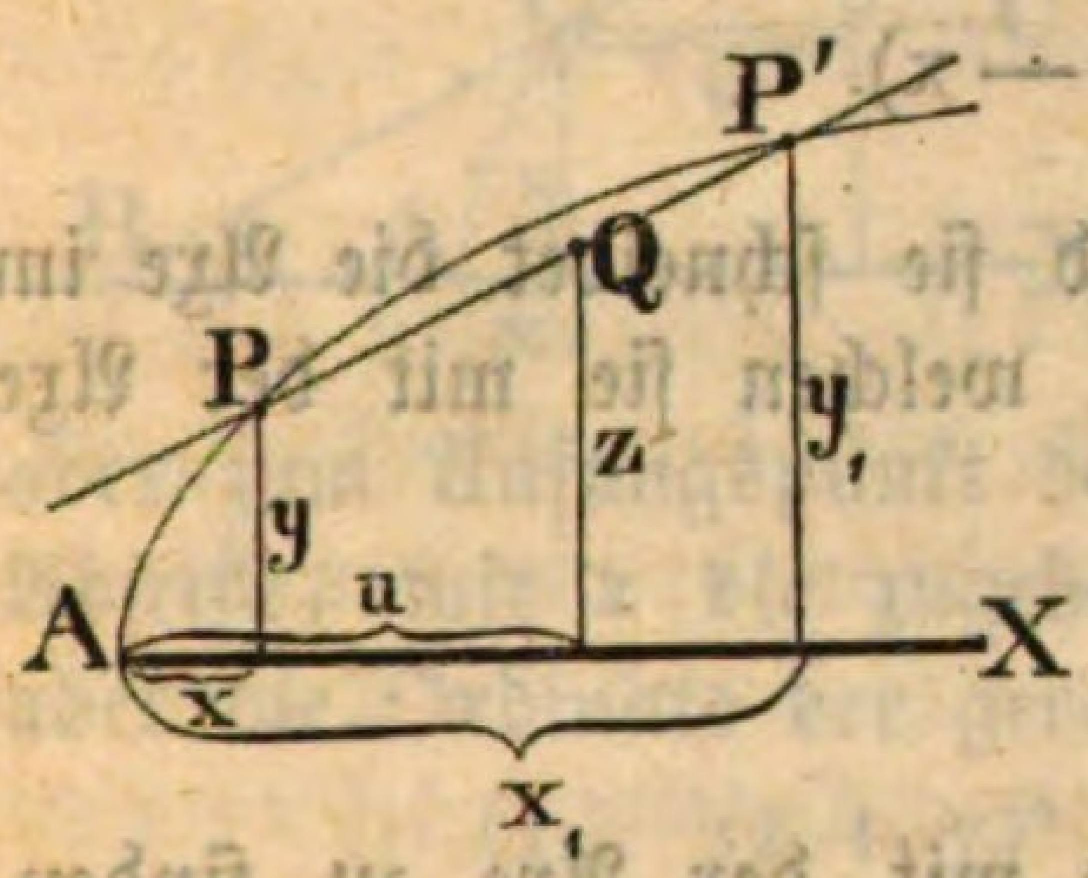
§. 470.

Die Tangenten des Kegelschnittes.

Die gerade Linie, deren Lage eine andere gerade Linie PP', welche eine krumme Linie in den Punkten P und P' schneidet, dann

annimmt, wenn der Punkt P unverändert bleibt, der Punkt P' aber dem Punkte P immer näher rückt und zuletzt mit ihm zusammenfällt, heißt die Tangente der krummen Linie für den Punkt P oder eine die krumme Linie in P berührende Linie; der Punkt P heißt der Berührungspunkt. (Vergl. §. 112. Anmerk. 2.) — Wir stellen jetzt folgende Aufgabe:

Für einen beliebigen Punkt P eines Kegelschnitts die Tangente durch ihre Gleichung zu bestimmen.



Auflösung. Es sei A der Scheitel und AX die Axe eines beliebigen Kegelschnittes

$$y^2 = px + qx^2;$$

ein Punkt P desselben habe die Coordinaten x und y, ein zweiter Punkt P' die Coordinaten x_1 und y_1, u und z aber mögen die Coordinaten der geraden Linie PP' sein. Durch P und P' ist die Linie PP' bestimmt, und ihre Gleichung ist nach §. 421. II. folgende:

$$\frac{z-y}{z-y_1} = \frac{u-x}{u-x_1} \text{ oder}$$

$$\frac{z-y}{y_1-y} = \frac{u-x}{x_1-x}, \text{ daher:}$$

$$(1.) \quad z-y = \frac{y_1-y}{x_1-x}(u-x).$$

Die Coordinaten der Punkte P und P' sind in dieser Gleichung als constant zu betrachten; zwischen ihnen finden aber die Gleichungen Statt:

$$y_1^2 = px_1 + qx_1^2 \text{ und}$$
$$y^2 = px + qx^2.$$

Zieht man diese Gleichungen von einander ab, so folgt:

$$y_1^2 - y^2 = p(x_1 - x) + q(x_1^2 - x^2).$$

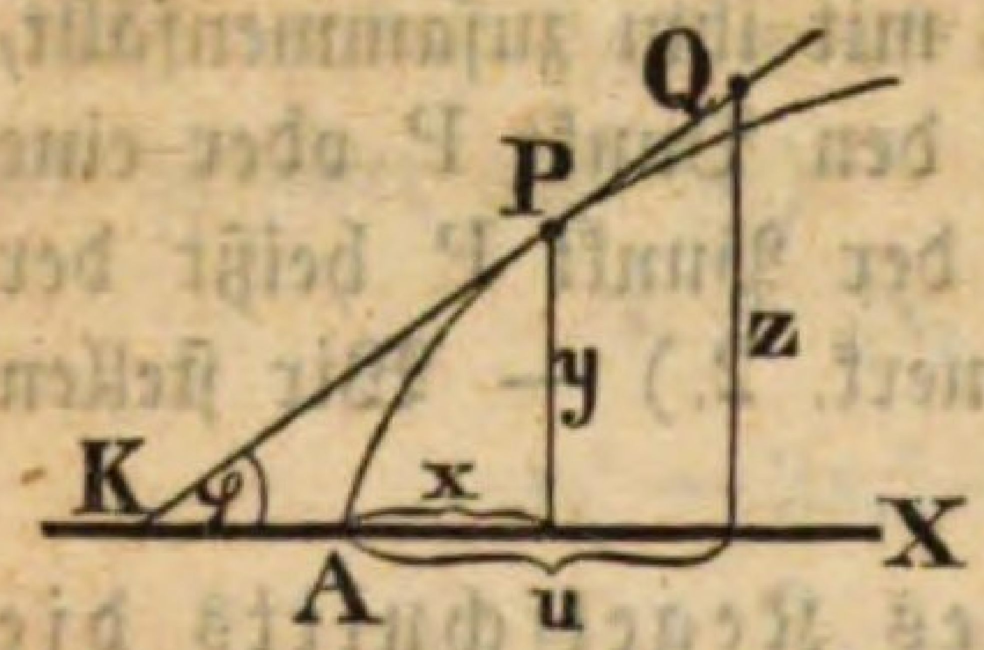
Aus dieser Gleichung folgt aber, wenn man die linke Seite in $(y_1 - y)(y_1 + y)$ zerlegt:

$$y_1 - y = \frac{p(x_1 - x) + q(x_1^2 - x^2)}{y_1 + y},$$

und setzt man diesen Werth in (1.) ein, so entsteht, wenn man durch $x_1 - x$ hebt:

$$(2.) \quad z-y = \frac{p + q(x_1 + x)}{y_1 + y}(u-x).$$

Aus dieser Gleichung der Linie PP′ ergiebt sich nun die Gleichung



der Tangente für den Punkt P, wenn man den Punkt P′ nach und nach dem Punkte P sich nähern und zuletzt mit ihm zusammenfallen läßt. Bei dieser Bewegung geht y_1 in y und x_1 in x über, und setzt man $y_1 = y$ und $x_1 = x$ in die Gleichung (2.) ein, so entsteht die Gleichung der Tangente für den Punkt P:

$$\text{I.}\quad z - y = \frac{p + 2qx}{2y}(u - x).$$

In der Figur ist PK diese Tangente, und sie schneidet die Axe im Punkte K. Bezeichnet man den Winkel, welchen sie mit der Axe bildet, mit φ, so ist (§. 419, II.)

$$\text{II.}\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{p + 2qx}{2y}.$$

Um den Durchschnittspunkt der Tangente mit der Axe zu finden, setzt man in I. z = 0; dann folgt

$$u_0 = x - \frac{2y^2}{p + 2qx}$$

$$= \frac{px + 2qx^2 - 2px - 2qx^2}{p + 2qx}, \text{ also}$$

$$(3.)\quad u_0 = -\frac{px}{p + 2qx}.$$

Die absolute Länge der Linie AK ist also:

$$\text{III.}\quad AK = \frac{px}{p + 2qx}.$$

Anmerkung. Die vorstehende Entwickelung bleibt ganz unverändert, wenn man annimmt, daß der Punkt P′ links von P, also zwischen P und A liegt; zum Punkte P gehört also nur eine Tangente. Nimmt man hinzu, daß der Kegelschnitt in allen Theilen einerlei Krümmung hat, so läßt sich schließen, daß der Berührungspunkt der einzige Punkt der Tangente ist, welcher im Kegelschnitte liegt, und daß alle andern Punkte auf der convexen Seite des Kegelschnittes liegen müssen. Auf beide Eigenschaften der Tangente werden wir weiterhin genauer eingehen.

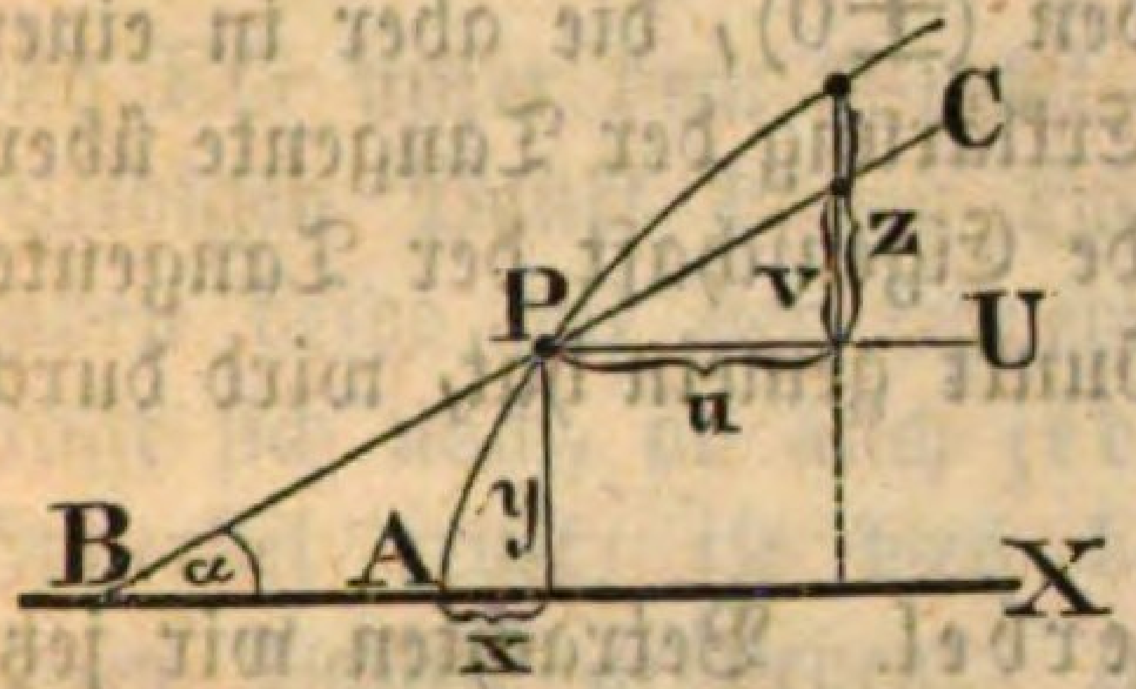
§. 471.

Die geraden Linien, welche nur einen Punkt mit einem Kegelschnitt gemein haben. Die Asymptoten der Hyperbel.

I. Aufgabe. Ein beliebiger Punkt P eines Kegelschnittes $y^2 = px + qx^2$ ist durch seine Coordinaten x und y gegeben; man

soll alle geraden Linien bestimmen, welche mit dem Kegelschnitt nur diesen einen Punkt P gemeinschaftlich haben.

Auflösung. Um die Aufgabe zu lösen, wollen wir den Winkel α bestimmen, den eine gerade Linie, welche die Bedingung der Aufgabe erfüllt, mit der Axe des Kegelschnittes bilden muß. Es sei AX die Axe und A der Scheitel des Kegelschnitts; BC sei die durch P gehende Linie, welche mit dem Kegelschnitt nur den Punkt P gemeinschaftlich haben soll. Zieht man durch P die Linie PU ∦ AX und nimmt PU sowohl für den Kegelschnitt, als auch für die Gerade BC zur Abscissenlinie, P aber zum Anfangspunkt der Abscissen, bezeichnet mit u eine beliebige Abscisse, mit z die zugehörige Ordinate des Kegelschnittes, mit v aber die Ordinate der geraden Linie: so hat man



$$(1.)\quad (z+y)^2 = p(u+x) + q(u+x)^2$$

$$(2.)\quad v = u.\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Für jeden gemeinschaftlichen Punkt beider Linien muß für dasselbe u auch $z = v$ werden; substituirt man aber den Werth von v aus (2.) statt z in (1.), so folgt

$$(u\,\mathrm{tg}\,\alpha + y)^2 = p(u+x) + q(u+x)^2$$

und diese Gleichung muß, wenn die Bedingung der Aufgabe erfüllt werden soll, für u nur den Werth Null geben. Löst man die Klammern auf, so entsteht, weil y^2 gegen $px + qx^2$ sich hebt:

$$(3.)\quad u\,[(\mathrm{tg}\,\alpha^2 - q).u + (2y\,\mathrm{tg}\,\alpha - p - 2qx)] = 0.$$

Diese Gleichung hat nur dann die eine Wurzel $u = 0$, wenn in der großen Klammer entweder das nach u constante Glied gleich Null ist, oder das erste Glied, welches u enthält. Die Linie BC hat also mit dem Kegelschnitt nur den einen Punkt P gemein, wenn entweder

$$(4.)\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{p+2qx}{2y},\ \text{oder}$$

$$(5.)\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \pm\sqrt{q}$$

ist. Es giebt also im Allgemeinen drei Linien der gesuchten Art.

II. Die durch P gehende Linie, welche durch die Gleichung (4.) bestimmt wird, ist nach dem vorhergehenden §. die Tangente des Kegelschnittes für den Punkt P. Es ist dies auch aus der Gleichung (3.) zu erkennen. Setzt man nämlich den Werth von tg α aus (5.) in (3.) ein, so erhält man in Bezug auf u eine Gleichung des ersten Grades

$$(2y\sqrt{q} - p - 2qx)\,u = 0,$$

aus welcher der eine Werth $u = 0$ folgt. Setzt man hingegen den Werth von $tg\alpha$ aus (4.) in (3.) ein, so erhält man eine reine quadratische Gleichung

$$\left(\frac{p}{2y}\right)^2 . u^2 = 0,$$

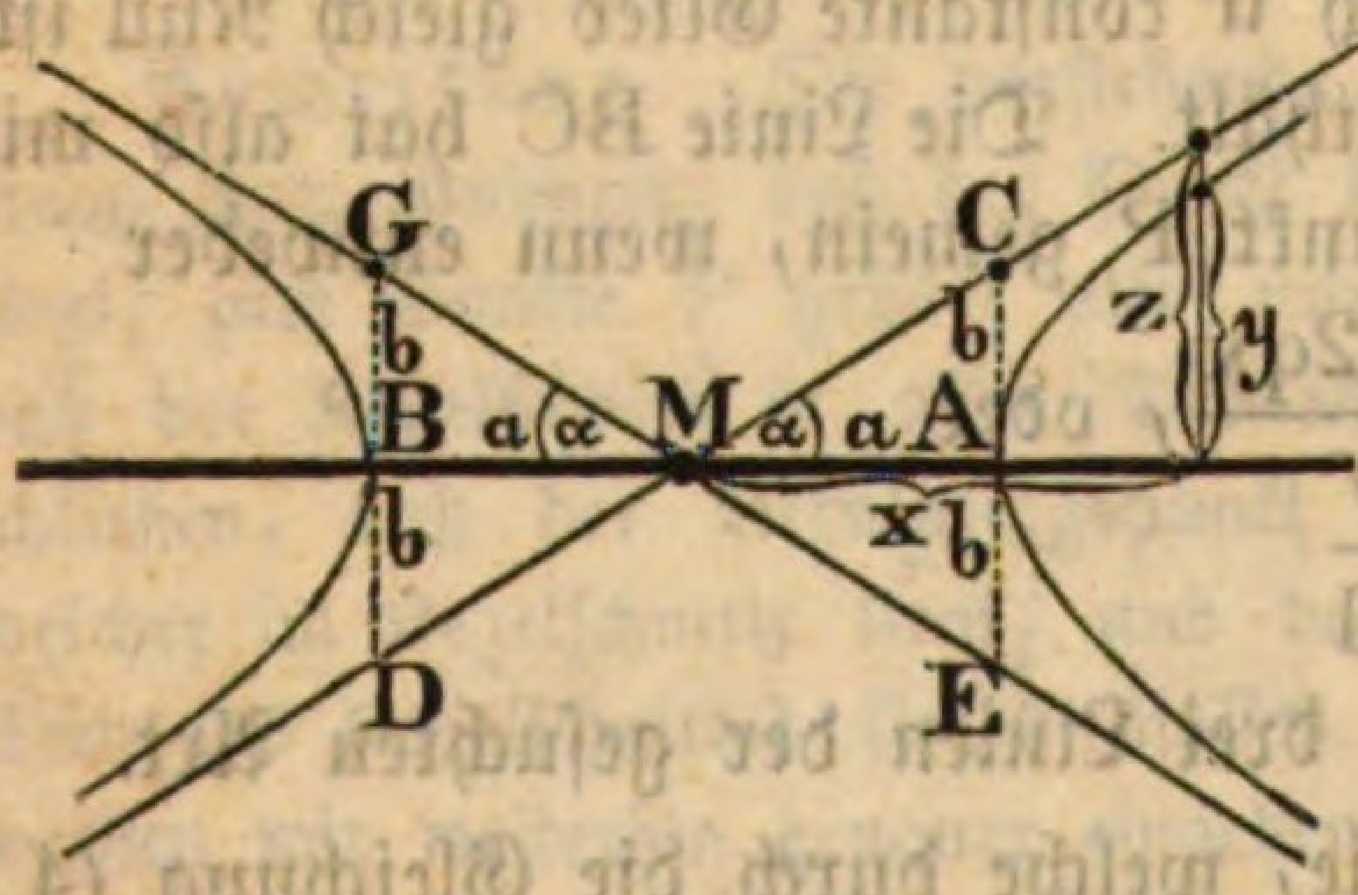
aus welcher sich zwei Werthe für u ergeben (± 0), die aber in einen zusammenfallen, und hiermit stimmt die Erklärung der Tangente überein. Auch die in ihrer Erklärung liegende Eigenschaft der Tangente, daß sie mit dem Kegelschnitt nur einen Punkt gemein hat, wird durch die Auflösung zu I. bestätigt.

III. Die Asymptoten der Hyperbel. Betrachten wir jetzt die durch P gehenden Linien, welche sich aus der Gleichung (5.) $tg\alpha = \pm\sqrt{q}$ ergeben haben, und zwar unabhängig von den Coordinaten des Punktes P. Durch die Gleichung (5.) sind die Linien bezeichnet, welche den Kegelschnitt in dem einzigen Punkte P schneiden. Es zeigt sich dies unmittelbar bei der Parabel und Ellipse, läßt sich aber auch leicht bei der Hyperbel nachweisen.

1) Bei der Parabel ist $q = 0$, folglich $tg\alpha = 0$, daher $\alpha = 0$. Hieraus folgt, daß jede mit der Axe der Parabel parallele Linie die Parabel nur in einem Punkte schneidet.

2) Bei der Ellipse ist q negativ, folglich $tg\alpha$ imaginär, d. h. es giebt keine Linie, welche die Ellipse in nur einem Punkte schneidet.

3) Bei der Hyperbel ist q positiv; daher folgt aus $tg\alpha = \pm\sqrt{q}$, daß durch jeden Punkt der Hyperbel zwei, sie nur in diesem Punkte schneidende Linien möglich sind; die Winkel, unter welchen diese Linien die Axe schneiden, sind Supplementswinkel. Um aber zu beweisen, daß wirklich ein Schneiden Statt findet, wollen wir uns an die nebenstehende Figur anschließen, welche zwei conjugirte Hyperbeln zeigt. M ist der Mittelpunkt, A und B sind die beiden Scheitel; die halbe Hauptaxe wollen wir mit a, die halbe Nebenaxe mit b bezeichnen. Nach §. 465. Nr. (7.) ist $q = \frac{b^2}{a^2}$, folglich ist für die Hyperbel:



$$tg\alpha = \pm\frac{b}{a}.$$

Schneidet man also in A und B die Hauptaxe durch zwei auf ihr senkrecht stehende Linien CE und GD, macht AC = AE = b und auch BD = BG = b und zieht CD und EG, so schneiden sich diese Linien in M und bilden mit der Axe AB Winkel, deren Tangente gleich $\pm \frac{b}{a}$ ist, d. h. CD schneidet MA unter dem Winkel α, und EG unter dem Winkel $180° - \alpha$. Zieht man also durch einen beliebigen Punkt P der Hyperbel mit diesen Linien Parallelen, so haben beide mit der Hyperbel nur diesen einen Punkt gemein. Es fragt sich noch, ob auch jede mit CD oder EG parallele Linie die Hyperbel trifft; ist dies der Fall, so kann es natürlich nur in einem Punkte geschehen. Um hierüber zu entscheiden, wollen wir zunächst die Linie CD selbst betrachten, und ihren mit der Hyperbel gemeinschaftlichen Punkt suchen. Nehmen wir die Richtung MA als Abscissenlinie, M als Anfangspunkt der Abscissen, bezeichnen wir die Abscisse mit x und die zugehörige Ordinate der Hyperbel und der Linie CD resp. mit y und z, so ist

$$(6.)\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \text{ und}$$

$$(7.)\quad z = \frac{b}{a}.x.$$

Für welchen Werth von x ist nun y = z? Setzt man aber den Werth von z statt y in die erste der beiden Gleichungen ein, so folgt

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

und diese Gleichung zeigt nur dann keinen Widerspruch, wenn $x = \pm\infty$ ist. Um aber den Sinn dieses Werthes von x zu ermitteln, wollen wir die Differenz der Ordinaten z und y herleiten. Wird (7.) quadrirt, und dann (6.) von (7.) abgezogen, so entsteht:

$$z^2 - y^2 = b^2, \text{ folglich}$$

$$(8.)\quad z - y = \frac{b^2}{z + y}.$$

Diese Gleichung zeigt nicht blos, daß $z > y$ ist (x, y und z positiv genommen), daß also die Linie CD ganz auf der convexen Seite der Hyperbel liegt, sondern auch, daß die Differenz $z - y$ der Null um so näher rückt, je größer x wird, da y und z mit x gleichzeitig in's Unendliche wachsen, daß diese Differenz aber erst für $x = \infty$ verschwindet. Weil nun der Theil der Figur oberhalb AB dem Theile unterhalb, und der Theil rechts von M dem Theile links congruent

ist, so folgt hieraus, daß CD und EG zwei Linien sind, welche sich, je mehr sie sich von M entfernen, um so mehr einem Zweige jeder der beiden conjugirten Hyperbeln, ohne ihn ganz zu erreichen, so nähern, daß die Abstände der Punkte dieser Zweige von ihnen $[(z - y) \cos a]$ für steigende Werthe von x der Null immer näher kommen, aber erst für $x = \infty$ zu Null werden.

Jede gerade Linie, welche zu einer Curve die Lage hat, daß die Abstände der Punkte der Curve von ihr sich fortwährend der Null nähern, aber erst in der Unendlichkeit zu Null werden, heißt eine Asymptote der Curve. Die Hyperbel hat sonach zwei Asymptoten, deren Construction nach der vorstehenden Figur, wenn man den Mittelpunkt und die beiden halben Axen der Hyperbel kennt, unmittelbar auszuführen ist; zwischen ihnen (in den Ebenen zweier Scheitelwinkel) liegen die conjugirten Hyperbeln.

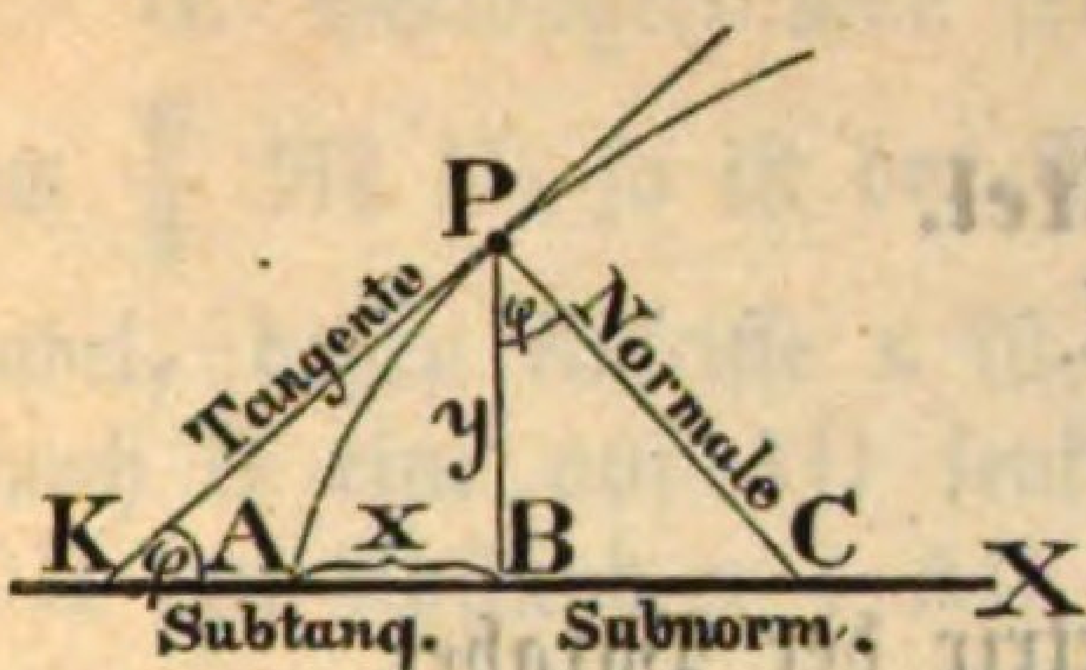
Aus dem Gesagten folgt aber, daß jede mit einer Asymptote parallele Linie die Hyperbel (in nur einem Punkte) schneiden muß; denn auf welcher Seite dieser Asymptote sie auch liegen mag, immer liegt auf derselben Seite eine der conjugirten Hyperbeln, und diese kommt in dem einen ihrer Zweige der Asymptote unendlich nahe und entfernt sich in dem andern Zweige unendlich weit von ihr; folglich muß die mit der Asymptote parallele Linie diesen Theil der Hyperbel schneiden.

§. 472.

Die Tangenten, Normalen, Subtangenten und Subnormalen des Kegelschnitts.

Die gerade Linie, welche auf der Tangente einer krummen Linie im Berührungspunkte P senkrecht steht, heißt die Normale der krummen Linie für den Punkt P. Die Normale ist nach dieser Erklärung, wie die Tangente, eine unbegrenzte Linie; man gebraucht aber die beiden Wörter »Tangente« und »Normale« noch in einem engeren Sinne und versteht unter Tangente den Theil der unbegrenzten Tangente, welcher zwischen dem Berührungspunkt und der Abscissenlinie liegt, und unter Normale den Theil der unbegrenzten Normale, welcher zwischen dem Berührungspunkt der Tangente und der Abscissenlinie liegt. Die Projection der (begrenzten) Tangente auf die Abscissenlinie heißt die Subtangente, die Projection der (begrenzten) Normale auf die Abscissenlinie aber die Subnormale für den Punkt P.

Für den Kegelschnitt AP werden wir seine Axe AX zur Abscissenlinie nehmen. Ist PK die Tangente für den Punkt P, $PC \perp PK$



und $PB \perp AX$, so ist PC die Normale, BK die Subtangente und BC die Subnormale. Sind x und y die Coordinaten des Punktes P für den Scheitel A als Anfangspunkt der Abscissen, und schneidet PK die Axe unter dem Winkel φ, so ist auch $\measuredangle BPC = \varphi$; daher:

die Subtangente $= y.\operatorname{cotg}\varphi$, die Subnormale $= y.\operatorname{tg}\varphi$.

Die Tangente und die Normale findet man durch den Pythagoreischen Lehrsatz. Zunächst hat man mit Hülfe von §. 470. II.:

$$(1.)\quad y^2 = px + qx^2$$

$$(2.)\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{p+2qx}{2y} = \frac{y}{2x} + q\cdot\frac{x}{2y},$$

und hieraus folgt nun:

$$\text{I. Die Subtangente} = \frac{2y^2}{p+2qx} = 2\cdot\frac{px+qx^2}{p+2qx}.$$

$$\text{II. Die Subnormale} = \frac{p+2qx}{2} = \frac{p}{2} + q\,.\,x.$$

$$\text{III. Die Tangente} = \sqrt{y^2 + (\text{Subtangente})^2}.$$

$$\text{IV. Die Normale} = \sqrt{y^2 + (\text{Subnormale})^2}.$$

Um noch die Gleichung der (unbegrenzten) Normale zu finden, hat man die Bedingungen: sie muß durch den Punkt P (x, y) gehen, also, wenn u und z die Coordinaten der Normale sind, die Form haben

$$z - y = b\,.\,(u - x),$$

und sie muß auf der Tangente senkrecht stehen. Daher ist b die entgegengesetzte Reciproke von $\operatorname{tg}\varphi$, und man erhält:

V. Die Gleichung der Normale:

$$z - y = -\frac{2y}{p+2qx}\,.\,(u-x).$$

Beispiel. Es ist die Hyperbel $y^2 = 4x + \frac{1}{2}x^2$ gegeben; man soll für den Punkt der Hyperbel, welcher gleiche Coordinaten hat, aber nicht der Scheitel ist, die Gleichung der Tangente und Normale, dann die Länge der Subtangente, Subnormale, Tangente und Normale finden.

Aufl. Die Gleichung der Tangente ist $z = 2 + \frac{3}{4}u$;
die Gleichung der Normale: $z = \frac{56}{3} - \frac{4}{3}u$;
die Subtangente $= 10\frac{2}{3}$, die Subnormale $= 6$, die Tangente $= 13\frac{1}{3}$, die Normale $= 10$.

Zweites Kapitel.
Die Parabel.

§. 473.
Der Brennpunkt und die Directrix der Parabel.

I. Um den **Brennpunkt** der Parabel $y^2 = px$ zu finden, wissen wir (§. 457.), daß derselbe in der Axe liegt und daß der Brennstrahl nach jedem Punkte P der Parabel um die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel größer ist, als die zu P gehörige Abscisse. Bezeichnen wir die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel mit w, so ist der Brennstrahl $= \sqrt{y^2 + (x-w)^2}$; folglich muß

$$\sqrt{y^2 + (x-w)^2} = x + w$$

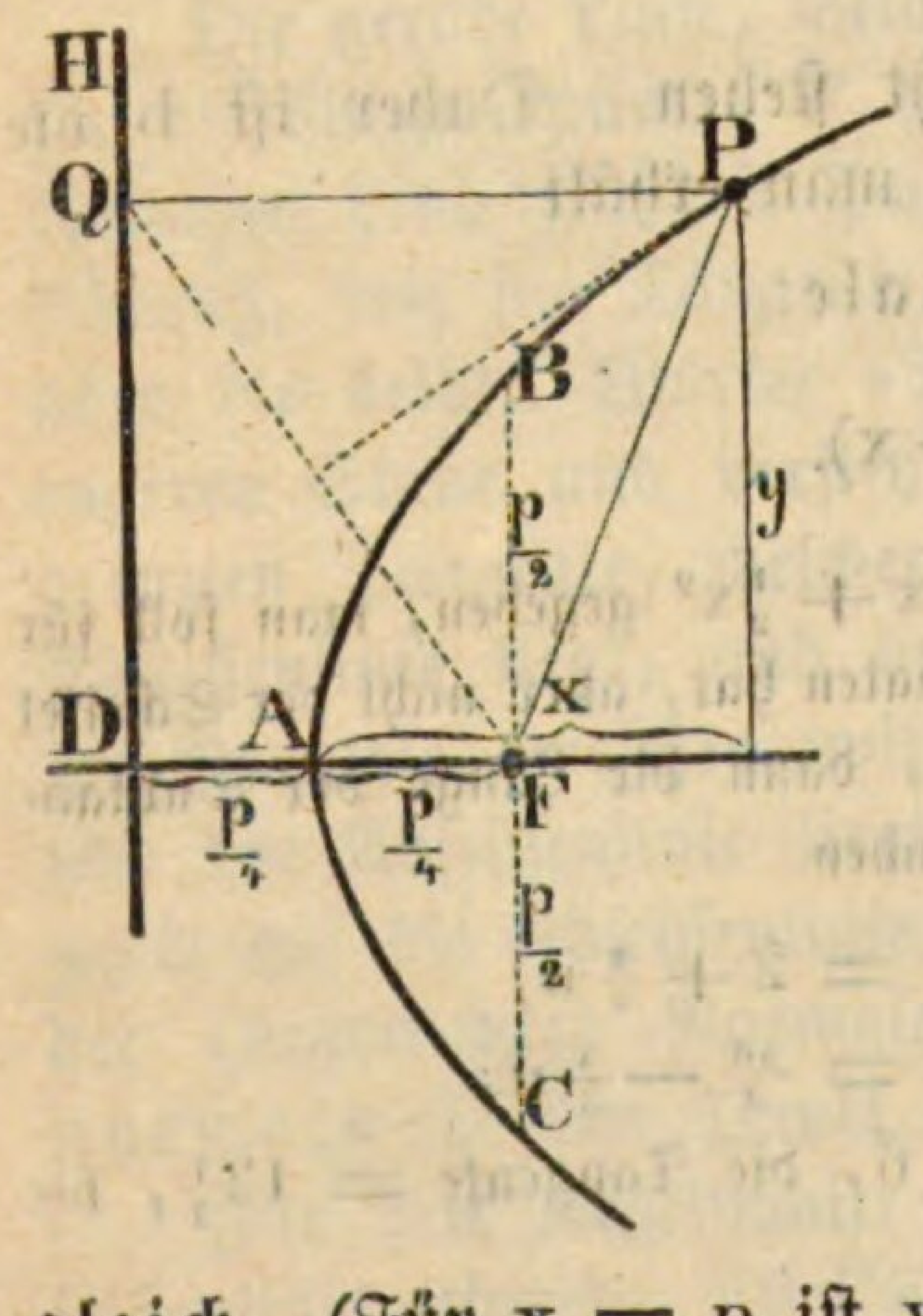
sein. Entwickelt man aus dieser Gleichung w (am bequemsten, wenn man $x = w$, also $y^2 = pw$ setzt), so folgt, weil $y^2 = px$ ist:

$$(1.) \qquad w = \frac{p}{4},$$

d. h. **der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel ist dem vierten Theile des Parameters gleich.**

Macht man also $AF = \frac{p}{4}$, so ist F der **Brennpunkt** der Parabel; folglich ist

$$(2.) \qquad FP = x + \frac{p}{4};$$



also ist FP nach x **rational**. Der Brennstrahl FB, welcher auf der Axe senkrecht steht, ist nach (2.) gleich $\frac{p}{4} + \frac{p}{4}$, also gleich $\frac{p}{2}$ (dasselbe Resultat erhält man aus der Gleichung $y^2 = px$, wenn man $x = \frac{p}{4}$ setzt), und da $FC = FB$ ist, so folgt:

$$(3.) \qquad BC = p,$$

d. h. **die Sehne der Parabel, welche im Brennpunkt auf der Axe senkrecht steht, ist dem Parameter gleich.** (Für $x = p$ ist $y = \pm p$.)

II. Verlängert man ferner die Axe der Parabel über den Scheitel um $\frac{p}{4}$ bis D, so ist der Brennstrahl nach jedem Punkte P der Parabel, dessen Abscisse x ist, gleich $x + AD$, und weil, wenn man durch D eine auf AD senkrechte Linie DH zieht, dann auch P von DH den Abstand $x + AD$ hat, so folgt, wenn $PQ \perp DH$ steht:

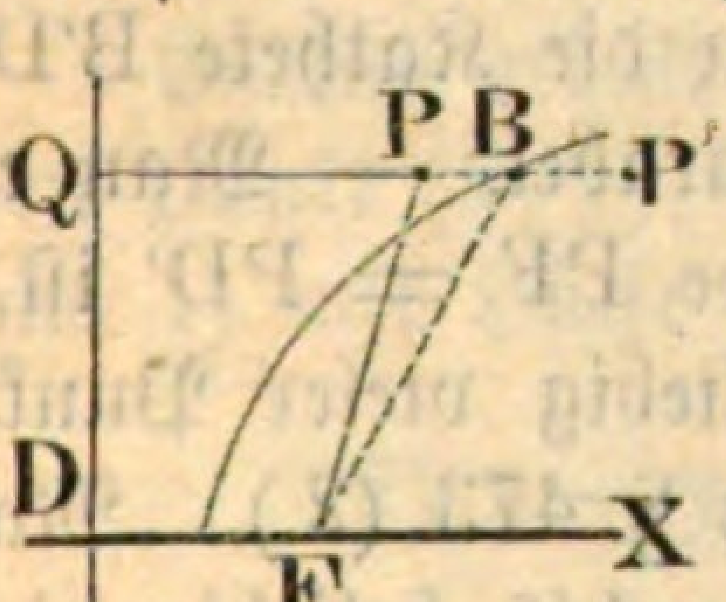
$$(4) \qquad PF = PQ.$$

Man nennt die Linie DH, welche die Axe der Parabel auf der convexen Seite derselben in der Entfernung $\frac{p}{4}$ vom Scheitel senkrecht schneidet, die Directrix (auch Leitlinie) der Parabel; daher heißt das Gesetz in (4.):

Jeder Punkt der Parabel ist von dem Brennpunkte eben so weit entfernt, als von der Directrix.

III. Jeder Punkt, welcher außerhalb der Parabel liegt, ist vom Brennpunkt (F) weiter entfernt, als von der Directrix; jeder Punkt innerhalb der Parabel aber liegt dem Brennpunkte näher als der Directrix.

Beweis. P sei der Punkt außerhalb der Parabel. Die von P auf die Directrix gefällte Senkrechte PQ muß, weil sie der Axe parallel ist, die Parabel schneiden; den Durchschnittspunkt B verbinde man mit F. In jedem Dreieck ist eine Seite größer als die Differenz der beiden andern; daher ist $PF > BF - BP$; statt BF kann man aber BQ setzen. — Analog ist der Beweis für den Punkt P′ innerhalb der Parabel; man geht davon aus, daß $P'F < BF + BP'$ ist.



IV. Ein Punkt liegt in der Parabel, oder außerhalb, oder innerhalb derselben, je nachdem seine Entfernung vom Brennpunkte seiner Entfernung von der Directrix gleich ist, oder größer als diese, oder kleiner.

Der Satz ist eine unmittelbare Folge der Gesetze in II. und III.

§. 474.

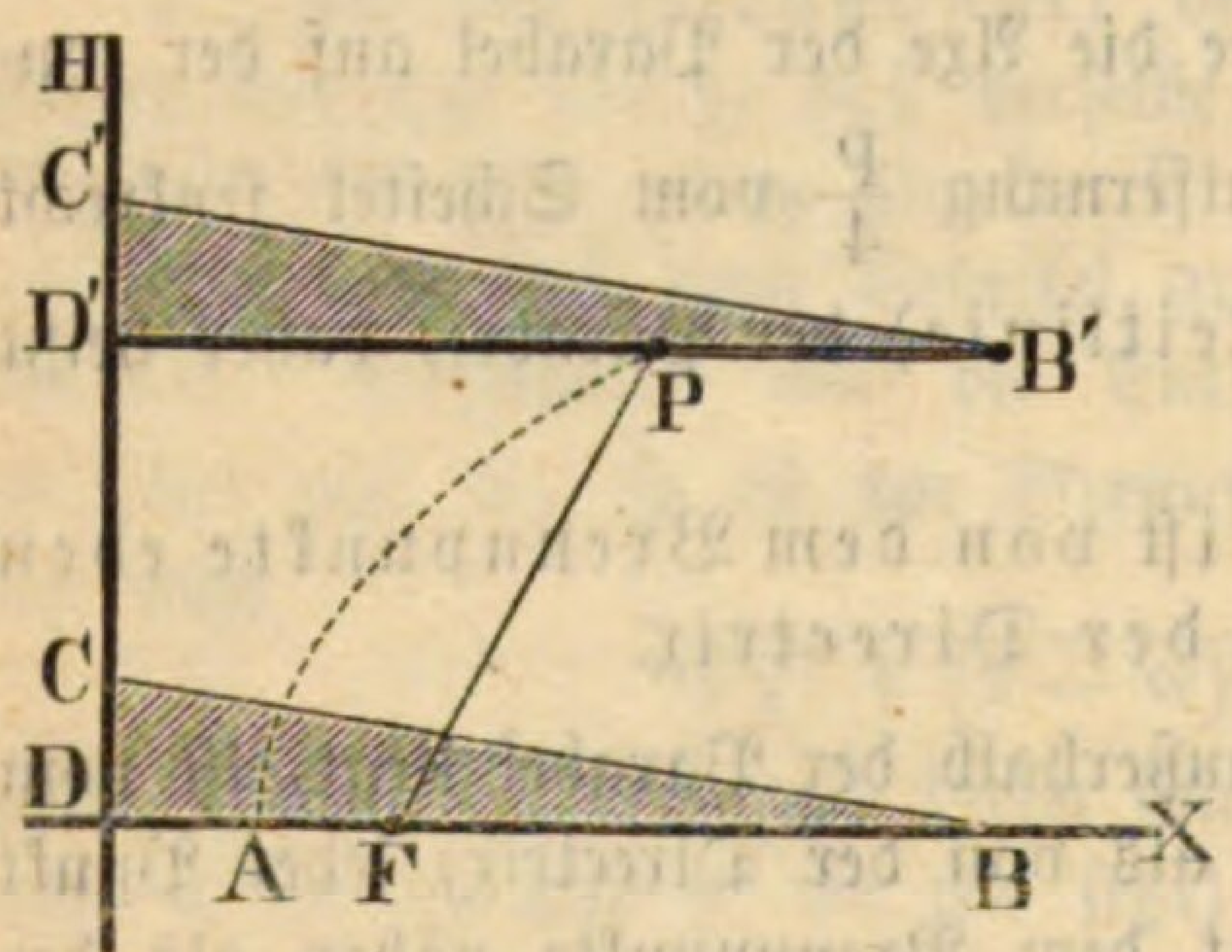
Construction der Parabel.

Man kann zunächst das Gesetz §. 473. (4.) zur Construction beliebig vieler Punkte der Parabel benutzen. Zieht man FQ (Fig. S. 418.), so ist Δ PFQ gleichschenklig; folglich muß die in der Mitte von FQ auf FQ errichtete Senkrechte die Linie, welche durch Q mit der Axe parallel läuft, in einem Punkt der Parabel schneiden. Legt man also

27*

durch beliebig viele Punkte der Directrix Parallelen mit der Axe, verbindet jeden Punkt mit dem Brennpunkt, halbirt alle diese Verbindungslinien (am einfachsten durch eine in A auf der Axe senkrechte Linie) und errichtet auf jede in ihrer Mitte ein Loth, so sind die Durchschnittspunkte dieser Lothe mit den zugehörigen Parallelen Punkte der Parabel.

Nach demselben Gesetz kann man ein beliebiges Stück der Parabel durch stetige Bewegung erzeugen. Es sei DX die Axe, F der Brennpunkt und DH die Directrix der Parabel. Man lege ein rechtwinkliges Dreieck BDC so an die Axe, daß die eine Kathete in die Axe, die andere in die Directrix fällt, nehme dann einen Faden von der Länge BD und befestige den einen Endpunkt desselben an dem Dreieck in B, den andern aber auf dem Papiere im Brennpunkt F. Nun schiebe man das Dreieck so in die Höhe, daß die Kathete DC immer in der Directrix bleibt, greife mit einem Bleistift in den Faden ein und drücke ihn während der Bewegung immer angespannt an die Kathete B'D'; die Spitze des Bleistiftes beschreibt dann die Parabel. — Man erkennt, daß für jeden Punkt P der erzeugten Curve PF = PD' ist.



Eine andere, recht bequeme Construction beliebig vieler Punkte der Parabel ergiebt sich unmittelbar aus dem Gesetz §. 473. (2.). Man schneide von der Axe vom Scheitel A aus nach rechts beliebig viele und beliebig große Stücke ab: AB, AC, AD, AE u. s. w., dann aber von A aus nach links eben so große Stücke: AB' = AB, AC' = AC, AD' = AD, AE' = AE u. s. w. Dann errichte man in B, C, D, E u. s. w. Lothe auf die Axe, setze den Zirkel in den Brennpunkt F ein und schneide mit dem Radius AB' das in B errichtete Loth, mit AC' das Loth in C, mit AD' das Loth in D, mit AE' das Loth in E u. s. w. Die Durchschnittspunkte sind Punkte der Parabel.

Anmerkung. Denkt man sich in der Figur zu §. 457. Nr. I. (S. 361.) die Ebene des Kreises NN', in welchem die Kugel die Kegelfläche berührt, verbreitet, bis sie die (ebenfalls verbreitete) Ebene der Parabel schneidet, so ist die Durchschnittslinie die Directrix. Schneidet nämlich die Kreisebene die verlängerte Parabelaxe in D, so ist $AD = AN = AF = \frac{p}{4}$.

§. 475.

Die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale der Parabel.

Ist P ein beliebiger, den Coordinaten x und y zugehöriger Punkt der Parabel $y^2 = px$, und bezeichnet φ den Winkel, den die Tangente für den Punkt P mit der Axe der Parabel bildet (vergl. die Fig. in §. 472.), so erhält man unmittelbar aus §. 472., wenn man $q = 0$ setzt:

1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{2y} = \frac{y}{2x}$;

2) die Subtangente $= 2x$;

3) die Subnormale $= \frac{p}{2}$, also constant;

4) die Tangente $= \sqrt{px + 4x^2}$;

5) die Normale $= \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}$.

Aus dem Werthe der Subtangente folgt ferner:

6) $AK = AB = x$,

d. h. der Durchschnittspunkt der Tangente für den Punkt P mit der Axe ist eben so weit vom Scheitel entfernt, als der Fußpunkt der Ordinate des Punktes P.

Endlich erhält man die Gleichung der Tangente der Parabel für den Punkt (x, y), wenn u und z die Coordinaten der Tangente sind, aus 1) mit Hülfe von §. 421. Nr. 1. Anm. oder von §. 470. I.:

7) $z - y = \frac{p}{2y}(u - x)$.

Anmerkung. Man kann in 7) auch $\frac{y}{2x}$ statt $\frac{p}{2y}$ setzen und die Gleichung der Tangente auf die Form bringen:

$$2 \cdot \frac{z}{y} - \frac{u}{x} = 1.$$

§. 476.

Folgerungen. Gesetze.

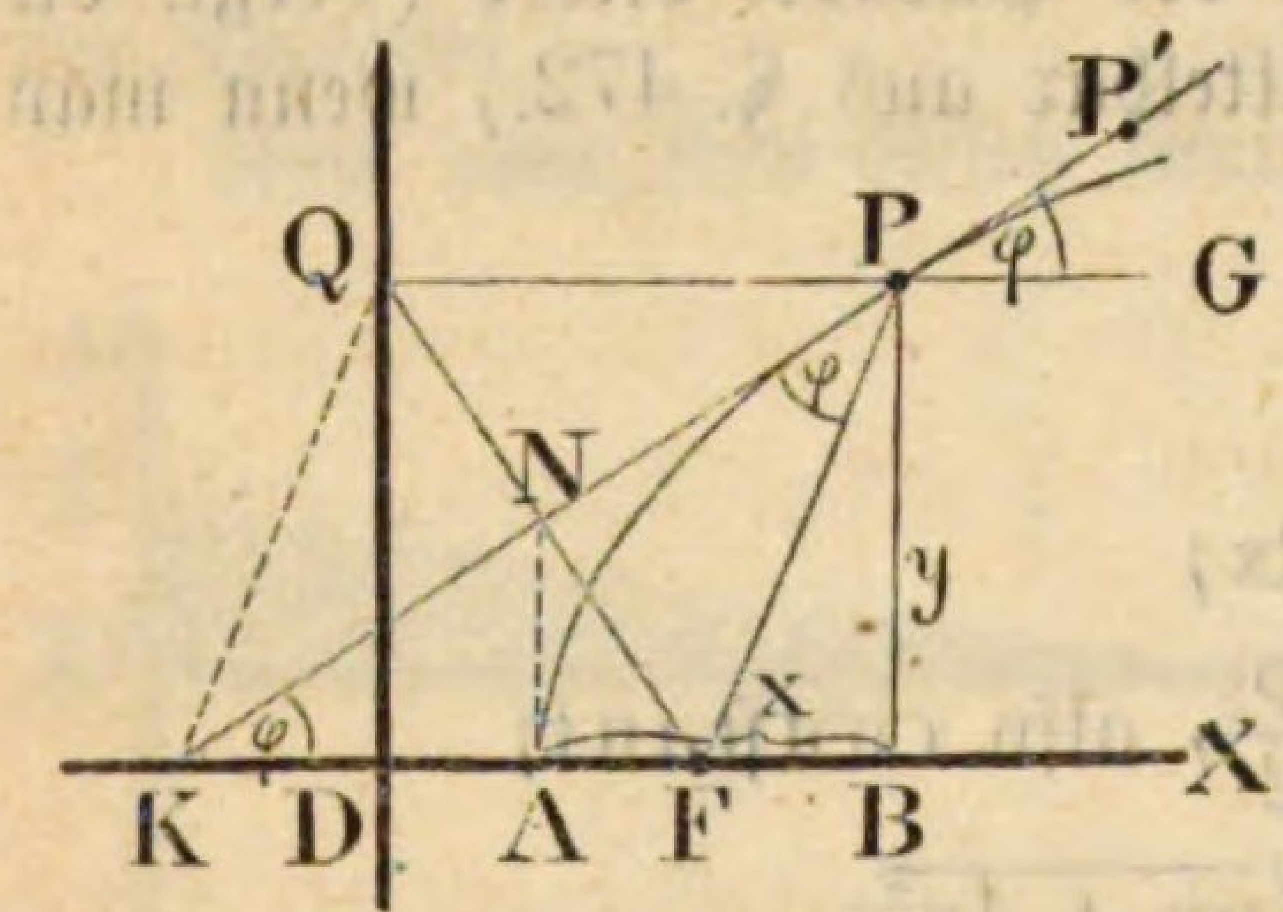
I. Ist PK die Tangente der Parabel AP (deren Scheitel A und deren Axe AX ist) für den Punkt P, so ist nach dem vorhergehenden §. $AK = AB = x$. Weil aber der Brennstrahl $FP = x + AF$ ist, und AK statt x gesetzt werden kann, so folgt:

$$FP = FK,$$

d. h. der Brennpunkt einer Parabel ist vom Berührungs-

punkt einer Tangente und von dem Durchschnittspunkte derselben mit der Axe gleich weit entfernt.

Ist DQ die Directrix der Parabel, fällt man PQ ⊥ DQ und verbindet man Q mit K, so ist hiernach KFPQ ein Rhombus. Die Tangente PK steht daher auf FQ senkrecht und halbirt FQ, woraus wieder folgt, daß außer dem Berührungspunkte alle anderen Punkte der Tangente außerhalb der Parabel liegen. Denn verbindet man einen beliebigen Punkt P′ der Tangente mit F und Q, so ist P′F = P′Q, und da P′Q größer ist, als die von P′ auf die Directrix gefällte Senkrechte, so liegt P′ der Directrix näher, als dem Brennpunkte.



II. Der Brennstrahl nach einem beliebigen Punkte P der Parabel bildet mit der Tangente PK des Punktes P denselben Winkel, welchen die durch P mit der Axe parallel gezogene Linie PG mit der Verlängerung der Tangente über P hinaus bildet.

Beweis. △ FPK ist gleichschenklich, folglich ∡ FPK = ∡ FKP; statt ∡ FKP kann man seinen Gegenwinkel GPP′ setzen. (Oder: die Tangente halbirt den ∡ P im Rhombus FPQK.)

Betrachtet man die Parabel als eine, Lichtstrahlen zurückwerfende physische Linie, so werden alle Lichtstrahlen, welche parallel der Axe die Parabel auf der concaven Seite treffen (z. B. GP), so von ihr zurückgeworfen, daß sie sich in F sammeln; daher der Namen Brennpunkt.

III. Die Senkrechte, vom Brennpunkt der Parabel auf eine beliebige Tangente gefällt, hat ihren Fußpunkt in der Geraden, welche im Scheitel der Parabel auf der Axe senkrecht steht; der Fußpunkt ist also der Durchschnittspunkt der Geraden und der Tangente.

Beweis. Ist FN ⊥ PK, so ist N der Mittelpunkt von PK; A ist der Mittelpunkt von BK. Die Linie NA ist daher parallel PB, steht folglich senkrecht auf der Axe.

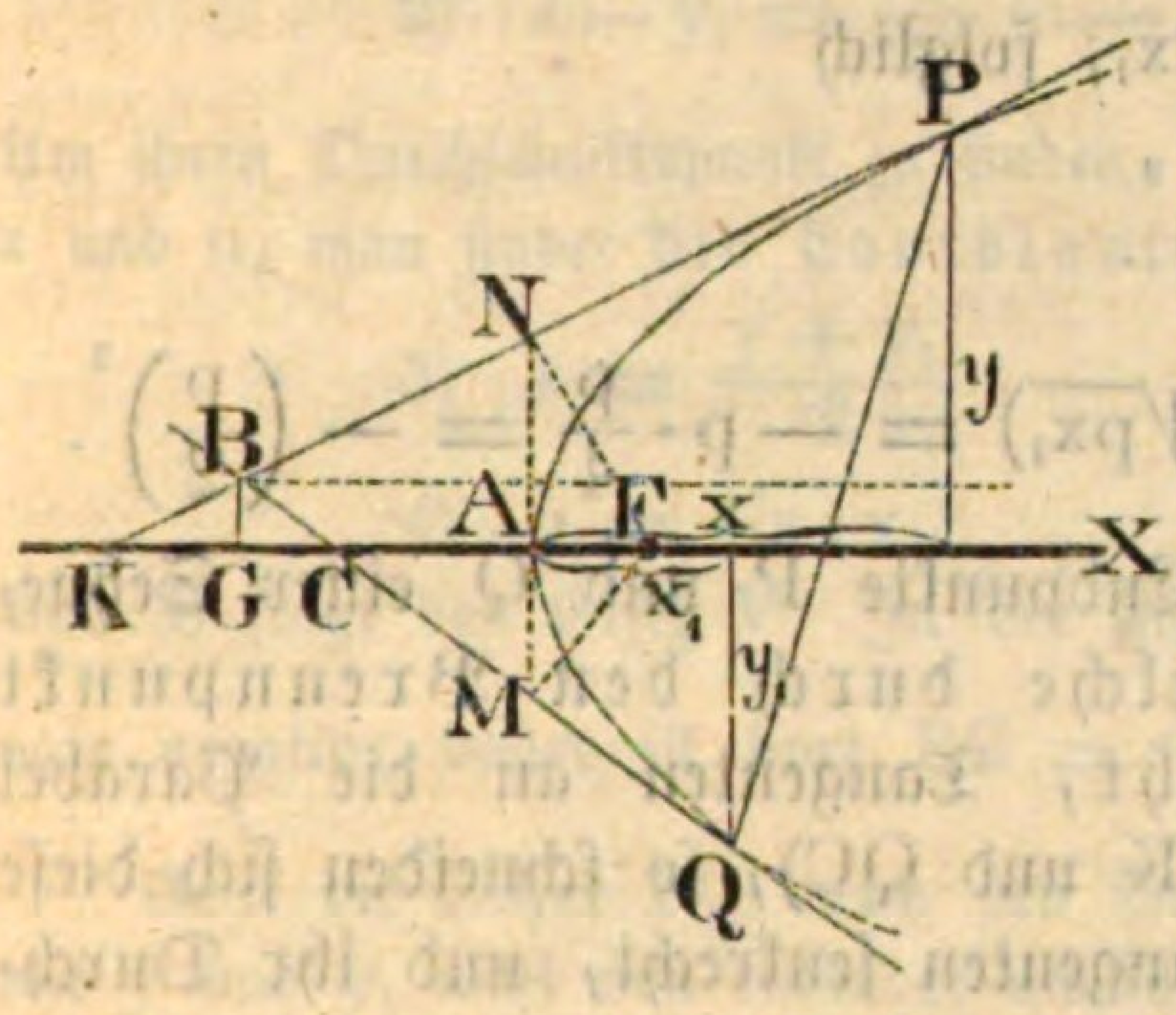
Anmerkung. Hieraus folgt noch: NA = $\frac{1}{2}$y.

IV. Construction der Tangente (vorhergehende Figur). Durch einen gegebenen Punkt P eine Tangente an eine Parabel zu legen.

Auflösung. 1) Wenn P in der Parabel liegt. Man fälle PB senkrecht auf die Axe, mache AK = AB und verbinde K mit P; KP ist die gesuchte Tangente (§. 475. Nr. 6.).

2) Wenn P außerhalb der Parabel liegt (in der Figur der Punkt P'). Man verbinde P' mit dem Brennpunkt F und schlage um P'F als Durchmesser einen Kreis. Schneidet dieser Kreis die im Scheitel A auf AX errichtete Senkrechte in den Punkten N und N', so verbinde man beide Punkte mit P'; NP' und N'P' sind dann Tangenten der Parabel. — Der Beweis ergiebt sich aus III.

V. Legt man durch die Endpunkte P und Q einer Sehne PQ der Parabel Tangenten an diese Curve, so liegt ihr Durchschnittspunkt B in der Mitte zwischen den Linien, welche sich durch P und Q mit der Axe parallel legen lassen, d. h. eine durch B mit der Axe parallel gelegte Linie halbirt die Sehne PQ.



Beweis. Die Coordinaten des Punktes P mögen x und y sein, die des Punktes Q aber x_1 und $-y_1$; von B ist BG ⊥ KC gefällt, und vom Brennpunkte F auf jede beider Tangenten ein Loth: FN ⊥ PK und FM ⊥ QC; es ist die Gerade NAM gezogen (III.). — Nun ist $\Delta BKC \sim \Delta FNM$, weil ihre Seiten auf einander senkrecht stehen (§. 84.); daher verhält sich:

$$BG : FA = KC : NM \text{ oder}$$

$$BG : \frac{p}{4} = x - x_1 : \frac{y + y_1}{2} \text{ (§. 475. Nr. 6. und §. 476. III. Anm.)}$$

Hieraus folgt aber:

$$2BG = \frac{px - px_1}{y + y_1} = \frac{y^2 - y_1^2}{y + y_1} = y - y_1; \text{ also:}$$

$$BG = \frac{y - y_1}{2}; \text{ daher}$$

$$y_1 + BG = \frac{y + y_1}{2}, \text{ woraus der Satz folgt.}$$

VI. Geht eine Sehne PQ der Parabel durch ihren Brennpunkt, so ist das Product der Abscissen x und x_1 ihrer Endpunkte constant, gleich dem Quadrat der Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel, und auch das Product der Ordinaten y und $-y_1$ ihrer Endpunkte ist constant, gleich dem negativen Quadrat der Ordinate, deren Fußpunkt der Brennpunkt ist, oder

$$1)\ x \cdot x_1 = \left(\frac{p}{4}\right)^2 \text{ und } 2)\ y \cdot (-y_1) = -\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Beweis. Der Brennstrahl nach P ist $= x + \frac{p}{4}$, der nach Q $= x_1 + \frac{p}{4}$; daher folgt aus ähnlichen Dreiecken (vergl. die folgende Figur):

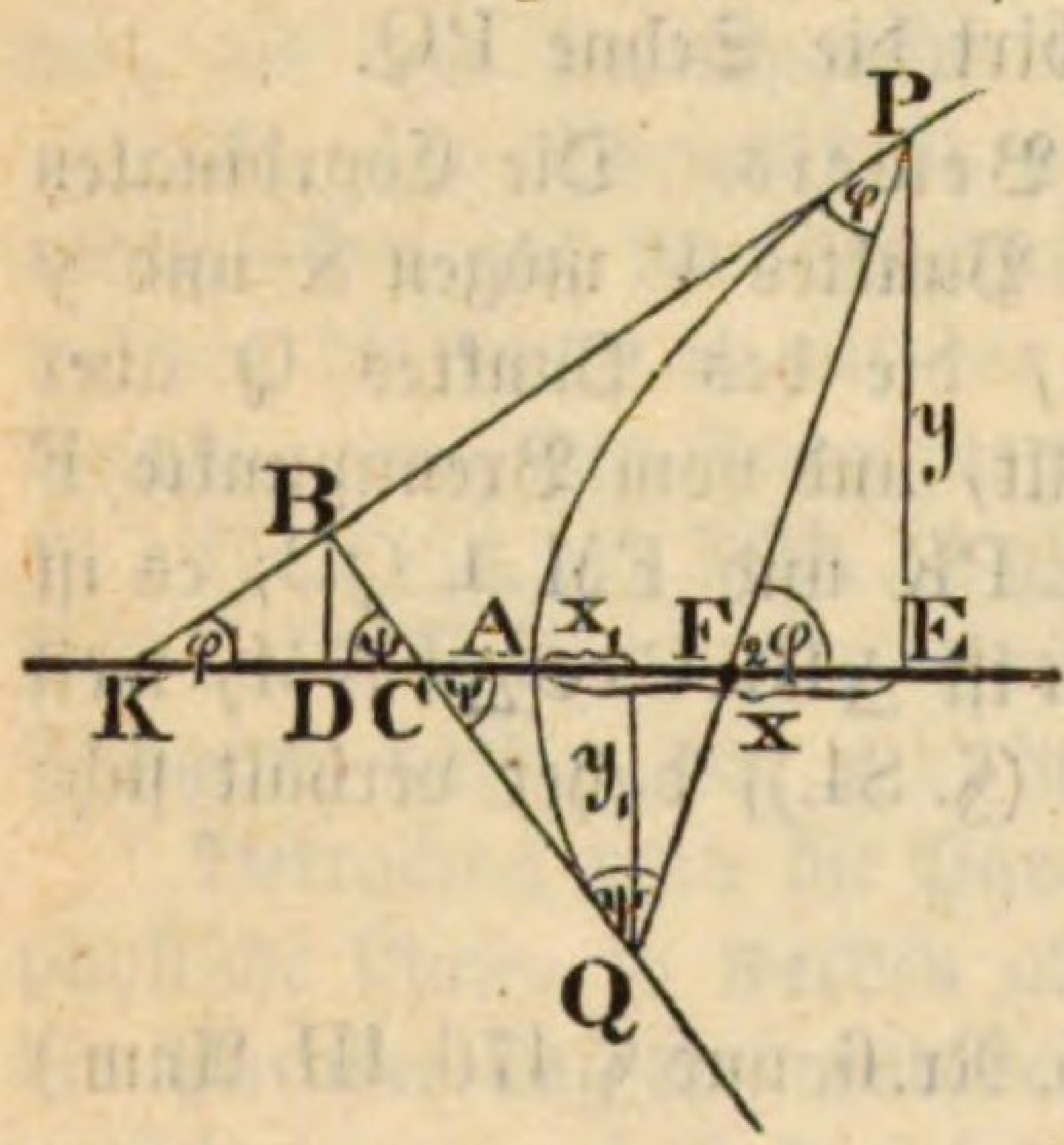
$$x + \frac{p}{4} : x - \frac{p}{4} = x_1 + \frac{p}{4} : \frac{p}{4} - x_1 \text{ oder}$$

$$2x : \frac{p}{2} = \frac{p}{2} : 2x_1; \text{ folglich}$$

$$1)\ x \cdot x_1 = \left(\frac{p}{4}\right)^2.$$

Ferner ist $2)\ y \cdot (-y_1) = \sqrt{px} \cdot (-\sqrt{px_1}) = -p \cdot \frac{p}{4} = -\left(\frac{p}{2}\right)^2.$

VII. Legt man durch die Endpunkte P und Q einer Sehne, welche durch den Brennpunkt geht, Tangenten an die Parabel (PK und QC), so schneiden sich diese Tangenten senkrecht, und ihr Durchschnittspunkt B liegt in der Directrix.



Beweis. Bezeichnet man die Winkel bei K und C in dem Dreieck BKC mit φ und ψ, so findet man leicht aus dem Δ FCQ:

$$2\varphi + 2\psi = 180°, \text{ folglich}$$
$$\varphi + \psi = 90°;$$

daher ist Δ BKC rechtwinklig, also QB $\perp$ PK.

Ferner ist Δ BDK $\sim$ Δ PEK; daher verhält sich:

$$BD : DK = y : 2x; \text{ oder aus V.:}$$

$$\frac{y - y_1}{2} : DK = y : 2x; \text{ daher ist:}$$

$$DK = \frac{y - y_1}{y} \cdot x = x - \frac{xy_1}{y}.$$

Weil aber AK $= x$ ist, so folgt DA $= x -$ DK oder:

$$DA = \frac{xy_1}{y} = \frac{y_1}{y} \cdot \frac{y^2}{p} = \frac{y \cdot y_1}{p}.$$

Weil ferner aus VI. $y \cdot y_1 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ ist, so folgt

$$DA = \frac{p}{4};$$

daher ist BD die Richtung der Directrix.

Anmerkung. Die vorstehenden Gesetze, welche sich auf den Durchschnittspunkt und die gegenseitige Lage zweier Tangenten der Parabel beziehen, lassen sich aus der Gleichung der Tangente auf folgende Weise analytisch entwickeln:

Die Gleichungen der Tangenten, welche durch die Punkte P (x, y) und Q (x_1, y_1) der Parabel gehen, sind (§. 475. Nr. 7.):

$$1)\quad z - y = \frac{p}{2y}(u - x)$$

$$2)\quad z - y_1 = \frac{p}{2y_1}(u - x_1).$$

Um ihren Durchschnittspunkt zu finden, entwickelt man aus beiden Gleichungen z und u; man findet die Coordinaten des Durchschnittspunktes:

$$3)\quad z = \frac{y + y_1}{2}$$

$$4)\quad u = \sqrt{x \cdot x_1}.$$

Aus 3) folgt das Gesetz V. In der Figur zu V. ist die zu x_1 gehörige Ordinate negativ; daher ist dort $BG = \frac{y - y_1}{2}$.

Geht die Sehne PQ durch den Brennpunkt F, so können x und x_1, so wie y und y_1 nicht von einander unabhängig sein. Um das Gesetz ihrer Abhängigkeit von einander zu finden, bilden wir die Gleichung der Sehne PQ:

$$\frac{z - y}{z - y_1} = \frac{u - x}{u - x_1}, \text{ oder}$$

$$5)\quad z = \frac{yx_1 - y_1x}{x_1 - x} + \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \cdot u.$$

Soll diese Linie durch den Brennpunkt gehen, so muß $z = 0$ für $u = \frac{p}{4}$ sein, woraus folgt:

$$\frac{yx_1 - y_1x}{y_1 - y} = -\frac{p}{4}.$$

Hieraus ergiebt sich, weil $x_1 = \frac{y_1^2}{p}$ und $x = \frac{y^2}{p}$ ist:

$$6)\quad y \cdot y_1 = -\left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

so daß eine beider Ordinaten negativ sein muß. Aus 6) folgt $y^2 \cdot y_1^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^4$, und hieraus, wenn man $y^2 = px$ und $y_1^2 = px_1$ setzt:

$$7)\quad x \cdot x_1 = \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

Nr. 6. und 7. sind die in VI. bewiesenen Gesetze.

Findet aber die Gleichung 6) Statt, d. h. geht PQ durch den Brennpunkt, so folgt aus 1) und 2), daß die beiden Tangenten auf einander senkrecht stehen; denn es ist dann $\frac{p}{2y} \times \frac{p}{2y_1} = -1$ (§. 423. V.). Endlich ergiebt sich in diesem Falle, wenn man den Werth von $x \cdot x_1$ aus 7) in 4) substituirt:

$$8)\quad u = -\frac{p}{4},$$

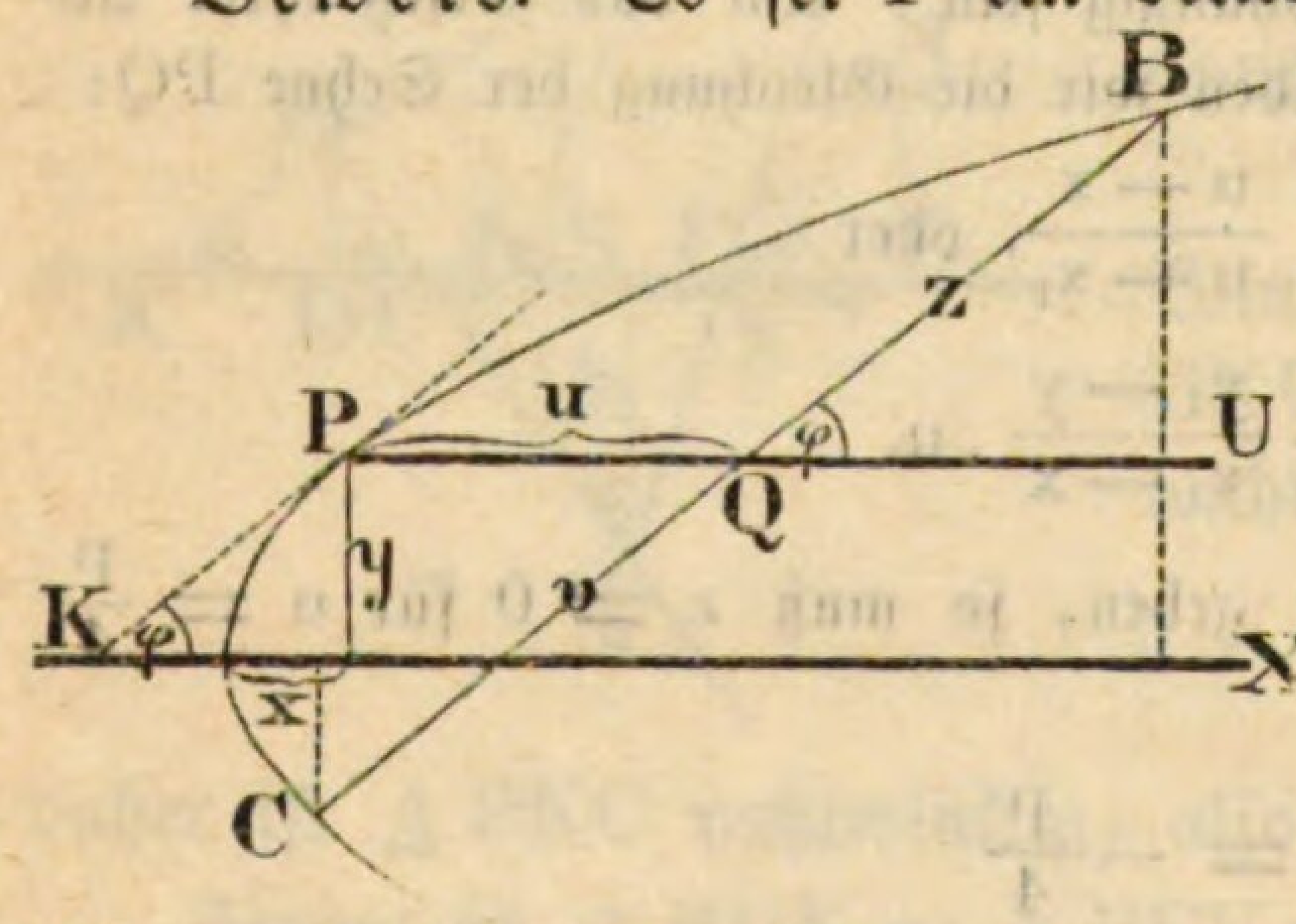
und zwar ist das Vorzeichen — zu nehmen, weil P und Q auf verschiedenen Seiten der Axe liegen. Aus 8) ergiebt sich das Gesetz VII., nach welchem der Durchschnittspunkt der Tangente in der Directrix liegt.

§. 477.
Die Durchmesser der Parabel.

I. Eine gerade Linie, welche alle mit einander parallelen Sehnen einer krummen Linie halbirt, heißt ein Durchmesser der krummen Linie. Der Durchschnittspunkt des Durchmessers und der Curve heißt der Scheitel des Durchmessers. Stehen die Sehnen, welche der Durchmesser halbirt, auf ihm senkrecht, so geht er in eine Axe der Curve über.

II. Jede mit der Axe einer Parabel parallele Linie ist ein Durchmesser der Parabel; denn sie halbirt alle Sehnen der Parabel, welche mit der Tangente parallel sind, die man durch den Scheitel des Durchmessers an die Parabel legen kann.

Beweis. Es sei P ein beliebiger, den Coordinaten x und y zugehöriger Punkt der Parabel, PK die Tangente für den Punkt P und die Linie PU mit der Axe X der Parabel parallel. Um nun zu beweisen, daß PU ein Durchmesser der Parabel ist, trage man auf PU eine beliebige Abscisse PQ = u ab und lege durch Q eine mit der Tangente PK parallele Sehne BC. Bezeichnet man QB mit z und QC mit v, so ist zu beweisen, daß z = v ist. Da aber B und C Punkte der Parabel sind, so findet zwischen ihren Axen-Coordinaten die Scheitelgleichung der Parabel Statt; folglich ist



$$1)\quad (z \sin\varphi + y)^2 = p\,(x + u + z\cos\varphi)$$
$$2)\quad (v \sin\varphi - y)^2 = p\,(x + u - v\cos\varphi).$$

Zieht man diese Gleichungen von einander ab, so entsteht:

$$(z^2 - v^2)\sin\varphi^2 + 2y\sin\varphi\,.\,(z + v) = p\cos\varphi\,.\,(z + v)$$

und wenn man durch $z + v$ hebt:

$$(z - v)\sin\varphi^2 + 2y\sin\varphi = p\cos\varphi \text{ oder}$$
$$(z - v)\sin\varphi^2 = \cos\varphi\,.\,(p - 2y\operatorname{tg}\varphi).$$

Nach §. 475. Nr. 1. ist aber $2y\operatorname{tg}\varphi = p$; folglich ist

$$(z - v)\sin\varphi^2 = 0, \text{ also } z = v.$$

III. Um noch die Gleichung der Parabel zwischen den schiefwinkligen Coordinaten u und z zu entwickeln, also für den Durchmesser PU als Abscissenlinie und seinen Scheitel P als Anfangspunkt der Abscissen, lösen wir in der vorhergehenden Gleichung 1) die Klammern auf. Da $y^2 = px$ ist, so entsteht:

$$z^2 \sin\varphi^2 + 2yz \sin\varphi = pu + pz \cos\varphi$$
$$z^2 \sin\varphi^2 + z \cos\varphi \,.\, (2y \operatorname{tg}\varphi - p) = pu, \text{ also}$$
$$z^2 \sin\varphi^2 = pu.$$

Nun ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{2y}$, folglich:

$$\sin\varphi^2 = \frac{p^2}{p^2 + 4y^2} = \frac{p^2}{p^2 + 4px} = \frac{p}{p + 4x},$$

und setzt man diesen Werth oben ein, so erhält man die gesuchte Gleichung:

$$z^2 = (p + 4x) \,.\, u.$$

Man nennt $p + 4x$ den **Parameter für den Durchmesser** PU, und bezeichnet man ihn mit p', so ist

$$z^2 = p' \,.\, u.$$

Bemerkenswerth ist noch, daß, wie bei der Axe, die Entfernung des Brennpunktes F vom Scheitel P des Durchmessers $= \frac{p'}{4}$ ist. Es ist nämlich $p' = 4\left(x + \frac{p}{4}\right)$, und $x + \frac{p}{4}$ ist bekanntlich die Länge des Brennstrahles nach dem Punkte P; für die Gleichung oben zwischen u und z kann daher auch gesetzt werden:

$$z^2 = 4 \,.\, FP \,.\, u.$$

Anmerkung Daß die Mittelpunkte paralleler Sehnen der Parabel in einer mit der Axe parallelen Linie liegen, ergiebt sich aus der Gleichung der geraden Linie

$$(1.)\quad y = a + bx$$

und der Gleichung der Parabel

$$(2.)\quad y^2 = px,$$

wenn man die Durchschnittspunkte P und Q beider Linien sucht. Aus der Verbindung beider Gleichungen folgt

$$y^2 = p \cdot \frac{y - a}{b} \text{ oder}$$

$$y^2 - \frac{p}{b} y + \frac{ap}{b} = 0.$$

Bezeichnen y_1 und y_2 die Wurzeln dieser Gleichung, also die Ordinaten von P und Q, so ist bekanntlich (Arithm. §. 157. I.) $y_1 + y_2 = \frac{p}{b}$, folglich:

$$(3.) \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{2b}.$$

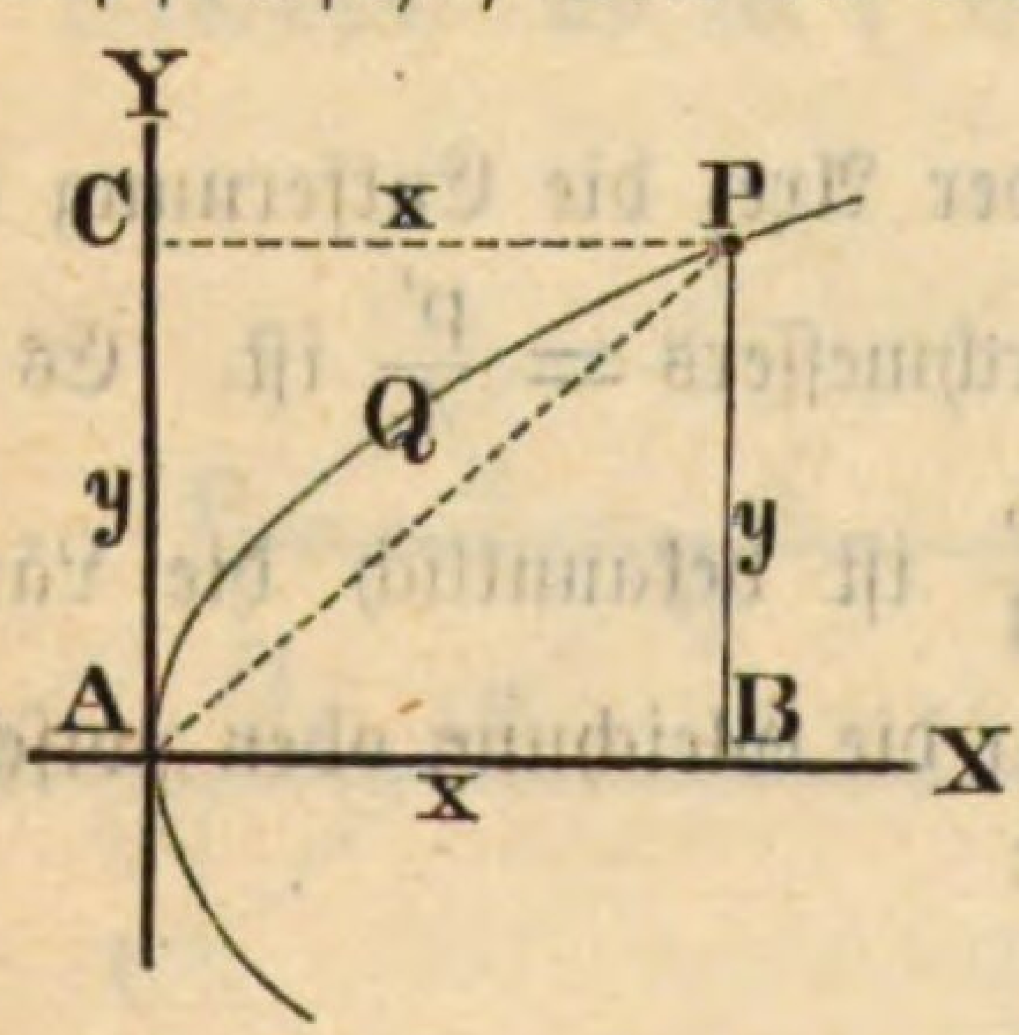
Nun ist aber $\frac{y_1 + y_2}{2}$ die Entfernung des Mittelpunktes der Sehne PQ von der Axe der Parabel, und diese Entfernung hängt also nach (3.) nicht von der Constanten a, sondern nur von den Constanten b und p ab. Alle geraden Linien aber, welche dieselbe Constante b haben, sind parallel; folglich sind die Mittelpunkte aller parallelen Sehnen der Parabel von der Axe gleich weit entfernt, liegen also in einer mit der Axe parallelen Linie.

§. 478.

Aufgabe.

Die Parabel zu quadriren.

Auflösung. »Die Parabel quadriren« heißt den Inhalt der parabolischen Ebene AQPB berechnen, welcher von den Coordinaten x und y des Punktes P der Parabel und dem zugehörigen Theil AP der Parabel selbst begrenzt wird. Diese Ebene ist schon deshalb keine Simpsonsche, weil die Ordinate y eine irrationale Function von x ist; fällt man aber PC senkrecht auf die Y-Axe, so kann die Ebene AQPC nach der Simpsonschen Regel gefunden werden. Macht man nämlich AY zur Abscissenaxe und A zum Anfangspunkt der Abscissen, so ist für jeden Punkt (P) der Parabel die Abscisse (AC) gleich y und die Ordinate (CP) gleich x; daher folgt aus $y^2 = px$:



$$x = \frac{1}{p} y^2,$$

d. h. die Ordinate ist eine Function des zweiten Grades in Bezug auf die Abscisse. Man hat daher (§. 315.) entweder nach der Simpsonschen Regel, oder bequemer unmittelbar aus der vorstehenden Gleichung:

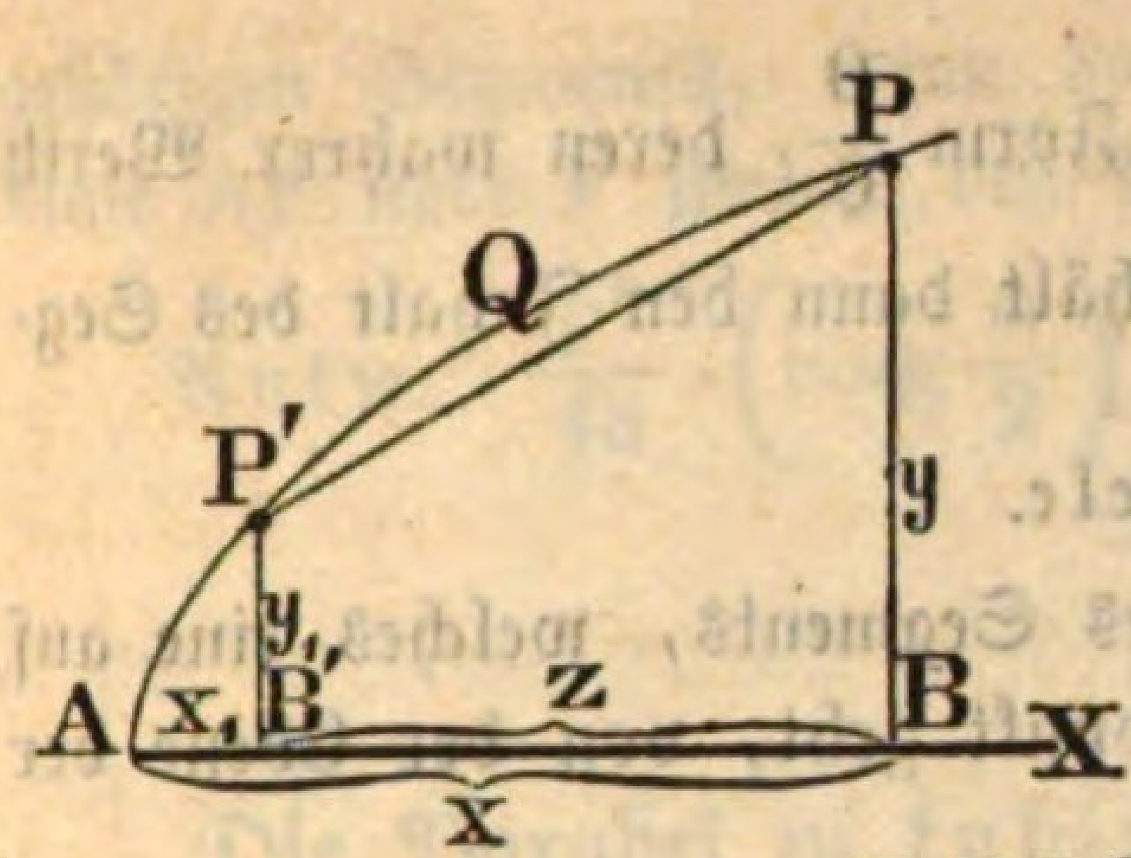
$$\text{Inhalt der Ebene AQPC} = \frac{1}{p} \cdot \frac{y^3}{3} = \tfrac{1}{3} xy.$$

Zieht man nun diese Ebene von dem Rechteck ABPC ab, so entsteht:

I. Der Inhalt der Ebene ABPQ $= \frac{2}{3} xy$.

Um noch das Segment APQ zu finden, welches die Sehne AP von der Ebene der Parabel abschneidet, braucht man nur den Inhalt des Dreiecks ABP ($\frac{1}{2} xy$) von $\frac{2}{3} xy$ abzuziehen. Man findet so:

II. Der Inhalt des Segments ABQ $= \frac{1}{6} xy$.



Um den Inhalt des Theiles einer parabolischen Ebene zu berechnen, welcher zwischen zwei Ordinaten y und y_1 liegt, braucht man nur die parabolische Ebene $AB'P'$ von ABP abzuziehen. Man erhält aus I.:

III. Der Inhalt der Ebene

$$B'BPQP' = \tfrac{2}{3}(xy - x_1y_1).$$

Um endlich noch das Segment zu berechnen, welches eine beliebige Sehne PP' von der Ebene der Parabel abschneidet, denke man sich P und P' mit A verbunden; man erhält dann das Segment $P'PQ$ durch algebraische Addition der zu AP und AP' gehörigen Segmente und des Dreiecks APP', dessen Inhalt nach §. 426. I. zu finden ist. Recht bequem drückt sich der Inhalt des Segments durch die Ordinaten y, y_1 und ihren Abstand von einander $(x - x_1)$ aus. Es ist, wenn man diesen Abstand z nennt:

$$(1.) \qquad y_1^2 = px_1$$

$$(2.) \qquad y^2 = p(x_1 + z).$$

Aus diesen Gleichungen findet man:

$$(3.) \qquad x_1 = \frac{z \cdot y_1^2}{y^2 - y_1^2} \quad \text{und} \quad x = x_1 + z = \frac{z \cdot y^2}{y^2 - y_1^2}.$$

Bezeichnet S den Inhalt des Segments, so ist

$$S = \tfrac{1}{6}(xy - x_1y_1) - \tfrac{1}{2}(xy_1 - x_1y),$$

und setzt man die Werthe von x und x_1 aus (3.) ein, so entsteht:

$$S = \frac{z}{6} \cdot \frac{y^3 - y_1^3}{y^2 - y_1^2} - \frac{z \cdot y \cdot y_1}{2} \cdot \frac{y - y_1}{y^2 - y_1^2},$$

daher, wenn man hebt:

$$S = \frac{z}{6} \cdot \frac{y^2 + yy_1 + y_1^2}{y + y_1} - \frac{z}{2} \cdot \frac{yy_1}{y + y^2}$$

$$= \frac{z}{6} \cdot \frac{y^2 - 2yy_1 + y_1^2}{y + y_1}; \text{ folglich ist:}$$

IV. Der Inhalt des Segments $P'PQ = \dfrac{(y - y_1)^2}{y + y_1} \cdot \dfrac{x - x_1}{6}$.

Anmerkung. Diese Formel ist allgemein richtig, d. h. sie gilt für beliebige Werthe der Abscissen und Ordinaten, also auch, wenn y oder y_1 negativ ist; nur erhält man, wenn y und y_1 negativ sind, oder wenn die zu der größeren Abscisse gehörige Ordinate allein negativ ist, ein negatives Resultat. Man hat dann nur nöthig, das Resultat positiv zu nehmen, d. h. die untere Seite der Parabelaxe als die positive anzusehen. — Der Leser möge sich durch Herleitung der Formel für den Fall, wenn P und P' auf verschiedenen Seiten der Axe liegen, von ihrer Richtigkeit überzeugen. — Die Formel ist auch dann richtig, wenn PP' auf der Axe senkrecht steht; sie führt aber in diesem Falle, wenn

man sie $\frac{(y-y_1)^2}{6} \cdot \frac{x-x_1}{y+y_1}$ schreibt, auf die Form $\frac{0}{0}$, deren wahrer Werth nach Arithm. §. 91. leicht zu finden ist; man erhält dann den Inhalt des Segments $= \frac{4}{3}xy$.

Uebungs-Beispiele.

Beispiel 1. Wie groß ist der Inhalt des Segments, welches eine auf der Axe senkrechte Sehne, die durch den Brennpunkt geht, von der Ebene der Parabel abschneidet?

Antw. $\frac{1}{6}p^2$.

Beispiel 2. Die Axe einer Parabel wird durch zwei Sehnen von der Länge 3′ und 6′ senkrecht geschnitten, deren Abstand von einander 9′ beträgt; wie groß ist der Inhalt des Theiles der parabolischen Ebene, der zwischen beiden Sehnen liegt?

Antw. 42 □′.

Beispiel 3. Ein Punkt P einer Parabel hat die Abscisse 2 und die Ordinate $+4$; ein zweiter Punkt Q hat die Ordinate $+8$. Wie groß ist der Inhalt des zur Sehne PQ gehörigen Segments?

Antw. $\frac{4}{3}$ □-Einheiten.

Beispiel 4. Es ist eine Parabel $y^2 = 2x$ gegeben. Ein Punkt P dieser Parabel hat die Ordinate $+4$, ein zweiter Punkt Q die Ordinate -2; wie groß ist das Segment, welches die Sehne PQ von der Ebene der Parabel abschneidet?

Antw. 18 □-Einheiten.

Beispiel 5. Es ist die Parabel $y^2 = 4x$ gegeben. Eine zweite Parabel hat dieselbe Axe, ihr Scheitel aber ist der Brennpunkt der ersten Parabel; die Durchschnittspunkte beider Parabeln haben die Ordinaten $+6$ und -6. Wie groß ist der Inhalt der Ebene, welche von beiden Parabeln vollständig begrenzt wird?

Antw. 8 □-Einheiten.

Beispiel 6. Im Rechteck ABCD ist die Seite AB $= a$ und BC $= b$. Eine Parabel hat A zum Scheitel, AB zur Axe und geht durch den Punkt C; eine zweite Parabel hat B zum Scheitel, BA zur Axe und geht durch den Punkt D. Wie groß ist der Theil des Rechtecks ABCD, welcher von der Seite AB und den Bogen beider Parabeln begrenzt wird, welche von A und B nach ihrem Durchschnittspunkte gehen?

Antw. $\frac{1}{3}ab\sqrt{2}$.

Beispiel 7. Zwei Punkte A und B der Parabel $y^2 = px$ sind durch ihre Ordinaten gegeben: A hat die Ordinate $+p$, B die Ordinate $-\frac{p}{2}$; wie groß ist das parabolische Segment, welches die Sehne AB von der Parabel abschneidet?

Antw. $\frac{9}{16}p^2$.

Beispiel 8. Der Scheitel A einer Parabel $y^2 = px$ ist mit einem Punkte B dieser Parabel verbunden; wie groß ist der Inhalt des zur Sehne AB

gehörigen Segments, wenn der Brennstrahl FB mit der Verlängerung der Linie AF über F hinaus den Winkel α bildet?

Antw. $\frac{p^2}{48} \cdot \left(\cotg \frac{\alpha}{2}\right)^3$.

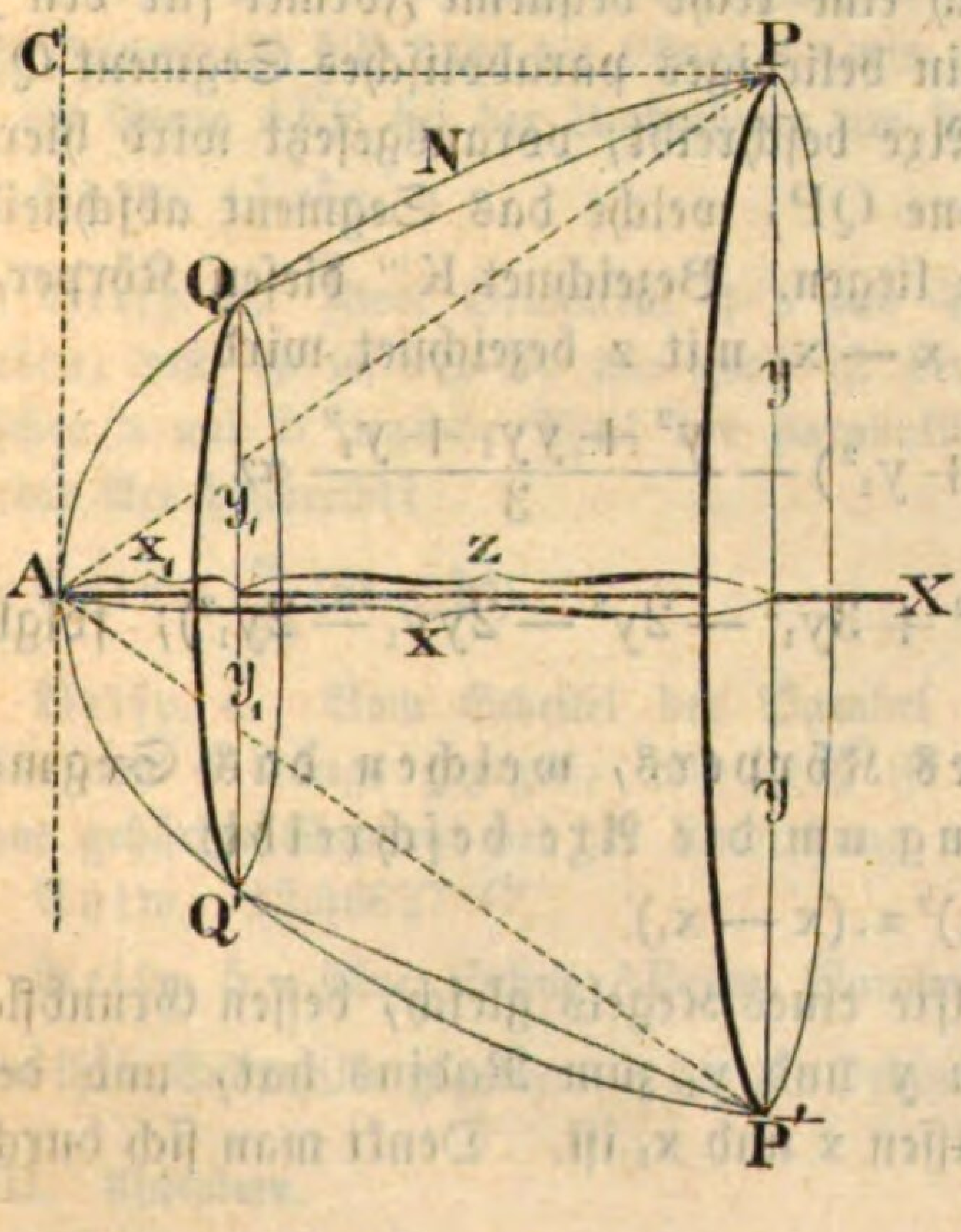
§. 479.
Aufgabe.

Die Parabel zu kubiren.

Auflösung. »Die Parabel kubiren« heißt den Inhalt des Körpers berechnen, welchen die von x und y begrenzte parabolische Ebene bei einer vollen Umdrehung um die Axe AX beschreibt. Dieser Körper APP′, ein Paraboloid oder ein parabolisches Konoid genannt, ist ein Simpsonscher; denn für jeden Werth von x ist seine auf der Axe senkrechte Durchschnittsfläche $= y^2\pi = px\pi$, also eine Function des ersten Grades von x. Daß der Körper auch die in §. 308. angegebene Eigenschaft hat, erkennt man, wenn man eine Durchschnittsfläche so parallel fortbewegt, daß ihr Mittelpunkt immer in der Axe bleibt. Der Inhalt K des Körpers APP′ ist nun entweder nach der Simpsonschen Regel, oder kürzer unmittelbar aus seiner Durchschnittsfläche $p\pi . x$ nach §. 309. zu berechnen. Man erhält:

$$K = p\pi \cdot \frac{x^2}{2} = \tfrac{1}{2} px . \pi . x \text{ oder}$$

I. Der Inhalt des Paraboloids APP′ $= \frac{1}{2} y^2 \pi x$, d. h. gleich dem halben Product aus Grundfläche und Höhe.



Den Inhalt des Körpers, welchen das Segment APQ bei der Umdrehung um die Axe AX beschreibt, findet man durch Subtraction des Kegels APP′ von dem Paraboloid APP′.

Man erhält aus I. den Inhalt K′ dieses Körpers:

$$K' = \tfrac{1}{2} y^2 \pi x - \tfrac{1}{3} y^2 \pi x$$

oder

$$\text{II.} \quad K' = \tfrac{1}{6} y^2 \pi x.$$

Der Theil QQ′P′P des Paraboloids APP′, welcher zwischen den Durchschnittsflächen $y^2\pi$ und $y_1{}^2\pi$ liegt,

deren Abscissen resp. x und x_1 sind, findet man, indem man das Paraboloid AQQ' von dem Paraboloid APP' abzieht. Bezeichnet K'' diesen Körper, so ist

$$K'' = \tfrac{1}{2}y^2\pi x - \tfrac{1}{2}y_1{}^2\pi x_1 = \frac{\pi}{2}(y^2x - y_1{}^2x_1).$$

Man kann nun entweder noch px und px_1 resp. statt y^2 und $y_1{}^2$ setzen, oder man kann aus §. 478. (3.) die Werthe von x und x_1 oben substituiren, also resp. $\frac{y^2z}{y^2-y_1{}^2}$ und $\frac{y_1{}^2z}{y^2-y_1{}^2}$, in welchen z die Differenz $x - x_1$ bezeichnet. Im letzteren Falle entsteht:

$$K'' = \frac{\pi}{2}\left(\frac{y^4z}{y^2-y_1{}^2} - \frac{y_1{}^4z}{y^2-y_1{}^2}\right) = \frac{\pi}{2}z(y^2+y_1{}^2).$$

Hieraus folgt also:

III. Der Inhalt des Körpers QQ'P'P

$$= \frac{\pi}{2}(y^2x - y_1{}^2x_1) = \frac{p\pi}{2}(x^2-x_1{}^2) = \frac{\pi}{2}(y^2+y_1{}^2)(x-x_1).$$

Da man dem letzten Ausdrucke die Form $\frac{y^2\pi + y_1{}^2\pi}{2}\cdot(x-x_1)$ geben kann, so erhält man den Theil eines Paraboloids, welcher zwischen zwei auf der Axe senkrechten Durchschnittsflächen liegt, wenn man das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen mit der Höhe multiplicirt. Dies Gesetz gilt nach der Formel I. auch für das ganze Paraboloid APP'.

Endlich erhält man noch eine recht bequeme Formel für den Inhalt des Körpers, welchen ein beliebiges parabolisches Segment QPN bei der Umdrehung um die Axe beschreibt; vorausgesetzt wird hierbei, daß die Endpunkte der Sehne QP, welche das Segment abschneidet, auf derselben Seite der Axe liegen. Bezeichnet K''' diesen Körper, so ergiebt sich aus III., wenn $x - x_1$ mit z bezeichnet wird:

$$K''' = \frac{\pi}{2}z(y^2+y_1{}^2) - \frac{y^2+yy_1+y_1{}^2}{3}\pi z$$

$$= \frac{\pi z}{6}\cdot(3y^2+3y_1{}^2-2y^2-2yy_1-2y_1{}^2);\ \text{folglich:}$$

IV. Der Inhalt des Körpers, welchen das Segment QPN bei der Umdrehung um die Axe beschreibt:

$$= \tfrac{1}{6}(y-y_1)^2\pi.(x-x_1).$$

Der Körper ist also der Hälfte eines Kegels gleich, dessen Grundfläche die Differenz der Ordinaten y und y_1 zum Radius hat, und dessen Höhe die Differenz der Abscissen x und x_1 ist. Denkt man sich durch Q

eine mit der Axe parallele Linie gelegt, welche PP′ in D schneiden mag, so entsteht dieser Kegel, wenn ΔQDP um QD eine volle Umdrehung macht.

Anmerkung. Legt man durch den Scheitel A der Parabel eine die Axe senkrecht schneidende Linie AC und fällt PC ⊥ AC, so läßt sich der Körper K berechnen, welchen die Ebene AQPC bei der Umdrehung um AC beschreibt. Nimmt man AC zur Abscissenlinie der Parabel und A zum Anfangspunkt der Abscissen, bezeichnet jede Abscisse mit u und die Ordinate mit z, so ist

$$u^2 = pz, \quad \text{folglich} \quad z = \frac{1}{p}u^2.$$

Die auf AC senkrechte Durchschnittsfläche ist daher gleich $z^2\pi = \frac{\pi}{p^2}\cdot u^4$. Der Körper ist daher kein Simpsonscher, aber sein Inhalt ist nach §. 312. gleich $\frac{\pi}{p^2}\cdot\frac{u^5}{5}$, oder

$$K = \frac{1}{5}\left(\frac{u^2}{p}\right)^2\pi . u = \tfrac{1}{5}z^2\pi . u.$$

Hieraus folgt der Inhalt des Körpers, welchen die Ebene AQPC beschreibt, gleich $\frac{1}{5}PC^2.\pi.AC$, also gleich dem fünften Theile des Products aus Grundfläche und Höhe.

Uebungs-Beispiele.

Beisp. 1. Der Parameter einer Parabel sei $\frac{2}{3}$ Fuß; wie groß ist der Inhalt eines Paraboloids derselben von der Höhe 9′?

Antw. 84,823 C′.

Beisp. 2. Die Gleichung der Parabel AP (Fig. S. 424) sei $y^2 = ax$. Der Brennstrahl FP habe die Länge a; wie groß ist der Inhalt des Körpers, den die Ebene AFP bei der Umdrehung um die Axe AE beschreibt?

Antw. $\frac{5}{32}a^3\pi$.

Beisp. 3. Zwei Ordinaten $+a$ und $+b$ der Parabel $y^2 = px$ sind gegeben, und es sei $a > b$; wie groß ist der Inhalt des Körpers, den der zwischen a und b liegende Theil der parabolischen Ebene bei der Umdrehung um die Axe beschreibt?

Antw. $\frac{\pi}{2p}(a^4 - b^4)$.

Beisp. 4. Vom Scheitel der Parabel mit dem Parameter 6′ ist eine Sehne von 4′ Länge gezogen; wie groß ist der Körper, den das zu dieser Sehne gehörige Segment bei der Umdrehung um die Axe beschreibt?

Antw. 12,56637 C′.

Beisp. 5. Eine Sehne AB der Parabel $y^2 = px$ ist durch die Ordinaten ihrer Endpunkte gegeben: A hat die Ordinate $+\frac{p}{2}$, B die Ordinate $+p$.

Wie groß ist der Inhalt des Körpers, welchen das zu AB gehörige Segment bei der Umdrehung um die Axe beschreibt?

Antw. $\frac{1}{32}p^3\pi$.

Beisp. 6. Die Endpunkte einer Sehne der Parabel $y^2 = 6x$ haben positive Ordinaten, die zugehörigen Abscissen sind 3 und 12; wie groß ist der Inhalt des Körpers, den das zu der Sehne gehörige Segment bei der Umdrehung um die Axe beschreibt?

Antw. 84,823 Kub.-Einheiten.

Beisp. 7. Der Radius der Grundfläche eines Paraboloids ist 4′, die Höhe 10′. Der Körper ist in der Entfernung 7′ von der Grundfläche durch eine mit dieser Fläche parallele Ebene durchschnitten; wie groß ist der zwischen den parallelen Ebenen liegende Theil des Paraboloids?

Antw. 228,7079 C′.

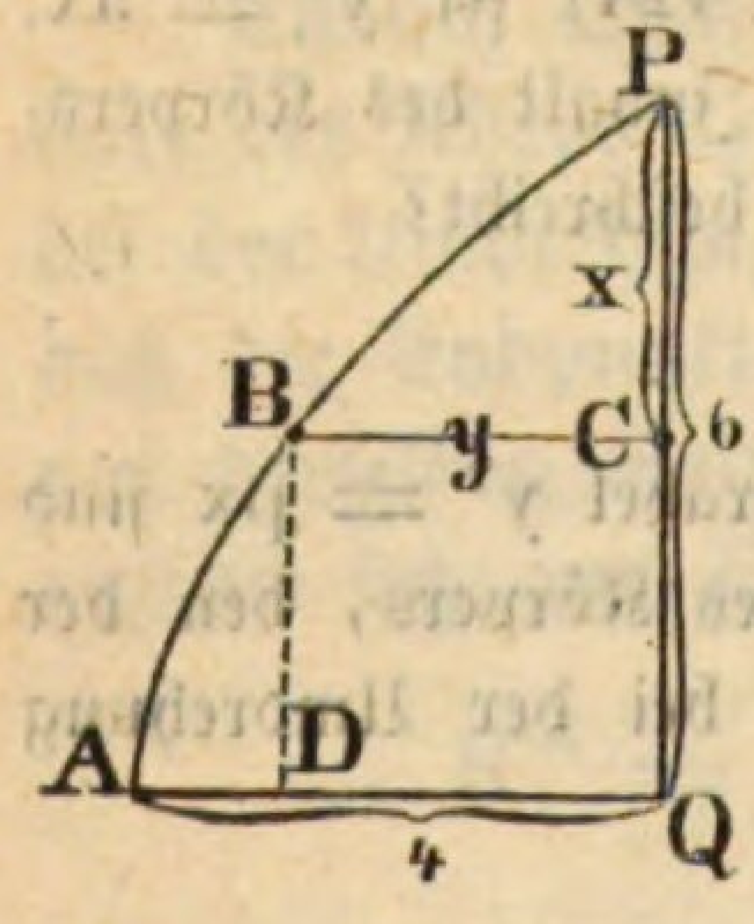
Beisp. 8. Es sei ABP eine Parabel, A der Scheitel und AQ die Axe, $PQ \perp AQ$; ferner sei $AQ = 4'$ und $PQ = 6'$. Wie groß ist der Inhalt des Körpers, welchen die Ebene APQ bei der Umdrehung um PQ beschreibt?

Aufl. Den Parameter der Parabel findet man aus der Gleichung $6^2 = p.4$; es ist $p = 9$. Um die Aufgabe zu lösen, muß zuerst die Gleichung der Parabel für PQ als Abscissenlinie und P als Anfangspunkt der Abscissen gefunden werden. Ist B ein beliebiger Punkt der Parabel, fällt man $BC \perp PQ$ und bezeichnet PC mit x und BC mit y, so erhält man (wenn $BD \perp AQ$ gefällt wird) leicht die Gleichung

$$(6 - x)^2 = 9.(4 - y).$$

Hieraus ergiebt sich

$$y = \tfrac{4}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2.$$



Aus y erhält man den Inhalt der Durchschnittsfläche des Körpers, welche durch den Endpunkt von x mit der Grundfläche parallel geht, also auf PQ senkrecht steht. Diese Durchschnittsfläche φx ist $= y^2\pi$, oder

$$\varphi x = \frac{16\pi}{9}x^2 - \frac{8\pi}{27}x^3 + \frac{\pi}{81}x^4.$$

Der Körper ist sonach kein Simpson'scher, sein Inhalt K ist aber nach §. 312. zu berechnen. Zunächst erhält man den zu x gehörigen Theil des Körpers:

$$\frac{16\pi}{9}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{8\pi}{27}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{\pi}{81}\cdot\frac{x^5}{5},$$

und setzt man nun die ganze Höhe 6 statt x, so entsteht

$$K = \frac{16\pi}{9}\cdot\frac{6^3}{3} - \frac{8\pi}{27}\cdot\frac{6^4}{4} + \frac{\pi}{81}\cdot\frac{6^5}{5} \text{ oder}$$

$$K = 51{,}2.\pi = 160{,}8495 \text{ Kub.-Fuß.}$$

Beisp. 9. Eine Sehne der Parabel $y^2 = px$ steht auf der Axe senkrecht und geht durch den Brennpunkt; wie groß ist der Inhalt des Körpers, den das zugehörige Segment bei der Umdrehung um die Sehne beschreibt?

Antw. $\frac{1}{30}p^3\pi$.

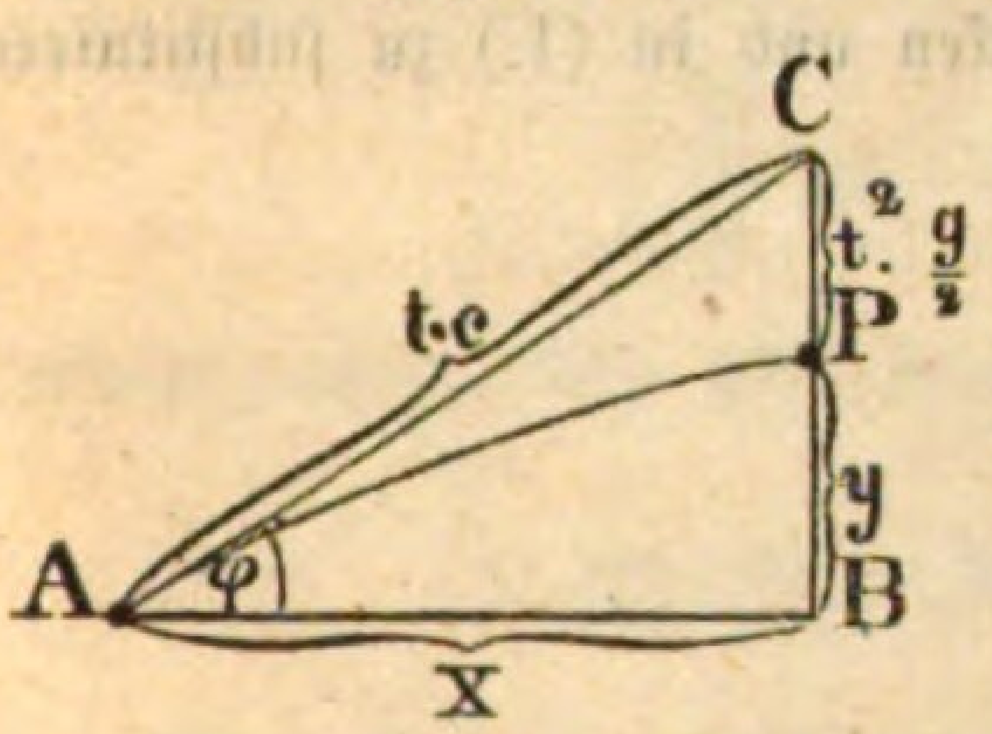
Uebungen über die Parabel.

§. 480.

Die Parabel als Flugbahn.

Die folgende Untersuchung hat den Zweck, den Winkel, unter welchem ein Geschütz gerichtet werden muß, aus dem Treffpunkt und dem höchsten Punkt der deckenden Brustwehr (der Krete) unter der Voraussetzung zu finden, daß die Kugel unmittelbar über die Krete fortfliegen soll, die Flugbahn aber (die krumme Linie, in welcher sich der Schwerpunkt der Kugel bewegt) eine Parabel sei *). Letztere Vor-

*) Erläuterung. Wenn ein Körper im luftleeren Raum von A aus in der Richtung AC, unter dem Winkel φ gegen den Horizont, in die Höhe geworfen wird, so würde er sich, wenn die Schwerkraft nicht auf ihn einwirkte, in der Richtung AC gleichförmig fortbewegen, d. h. er würde, wenn er in der ersten Secunde einen Weg von c Fuß zurücklegte, in 2 Secunden, vom Beginn der Bewegung an gerechnet, den Weg 2c, in 3 Secunden den Weg 3c u. s. w., also in t Secunden den Weg t.c Fuß zurücklegen. Macht man also $AC = t.c$, so würde sich der Körper nach t Secunden in C befinden. Weil aber der Körper schwer ist, so treibt ihn die Schwerkraft in jedem Augenblick vertical nach unten; er befindet sich nach t Secunden nicht in C, sondern vertical unter C, etwa in P; es fragt sich nur, wie lang CP ist. Nun durchfällt aber ein schwerer Körper im luftleeren Raum frei fallend in der ersten Secunde einen Raum von $15\frac{5}{8}$ Fuß, welche Zahl gewöhnlich mit $\frac{g}{2}$ bezeichnet wird (so daß $g = 31\frac{1}{4}$ ist); er bewegt sich aber nicht gleichförmig, sondern beschleunigt, und zwar so, daß er in 2 Secunden (immer vom Beginn der Bewegung an gerechnet) nicht $2\cdot\frac{g}{2}$, sondern $2^2\cdot\frac{g}{2}$ Fuß, in 3 Secunden nicht $3\cdot\frac{g}{2}$, sondern $3^2\cdot\frac{g}{2}$ Fuß u. s. w. zurücklegt. Es verhalten sich also die vom Beginn der Bewegung an zurückgelegten Wege zu einander, wie die Quadrate der verflossenen Zeiten; daher durchfällt der Körper in t Secunden einen Raum von $t^2\cdot\frac{g}{2}$ Fuß vertical nach unten. Hieraus folgt nun, daß der Körper, welcher ursprünglich von A aus in der Richtung AC in die Höhe geworfen wurde, nach t Secunden sich nicht in C, sondern $t^2\cdot\frac{g}{2}$ Fuß tiefer befindet, daß also $CP = t^2\cdot\frac{g}{2}$ ist. Bezeichnet nun x die Abscisse AB, und y die Ordinate BP des Punktes P, so ist zunächst:



aussetzung trifft nach den Gesetzen der Dynamik nur dann zu, wenn der Widerstand der Luft nicht berücksichtigt wird; daher ist der Gebrauch der unten in II. entwickelten Formel nur in solchen Fällen in der Praxis von Werth, wo der Luftwiderstand von geringerem Einfluß ist, namentlich bei flachen Schüssen; sie eignet sich daher beim Ricochettiren zur Berechnung des Elevations-Winkels.

I. APSM sei eine Parabel, S der Scheitel, SN die Axe, p der Parameter, AM eine auf der Axe senkrechte Sehne; man soll die Gleichung dieser Parabel für AM als Abscissenlinie und A als Anfangspunkt der Abscissen herleiten. Der Punkt A ist durch den Winkel φ gegeben, den die Tangente AD der Parabel, welche A zum Berührungspunkt hat, mit der Sehne AM bildet.

$$(1.)\quad y = tc.\sin\varphi - t^2.\frac{g}{2}.$$

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von t, gestattet aber nur mittelbar jeden Punkt der Curve, welche der Körper durchläuft, zu finden; denn sie drückt y nicht als Function von x, sondern als Function der Zeit t aus. Um y als Function von x zu bestimmen, braucht man nur t durch x auszudrücken und in (1.) zu substituiren. Es ist aber

$$(2.)\quad tc.\cos\varphi = x,\ \text{also}\ t = \frac{x}{c.\cos\varphi},$$

und setzt man diesen Werth in (1.) ein, so folgt:

$$(3.)\quad y = \operatorname{tg}\varphi.x - \frac{g}{2c^2\cos\varphi^2}x^2.$$

Die Curve AP ist also eine Parabel, und bringt man ihre Gleichung auf die Form

$$(4.)\quad \left(x - \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{g}\right)^2 = -\frac{2c^2\cos\varphi^2}{g}\left[y - \frac{c^2\sin\varphi^2}{2g}\right],$$

so sind Axe, Scheitel und Parameter nach §. 463. III. zu bestimmen. Die Axe steht auf AB senkrecht, und die Parabel erstreckt sich nach unten, weil der Parameter negativ ist. Nehmen wir an, es wäre P der Scheitel, also PB die Axe, so würde namentlich

$$AB = \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{g}\ \text{und}\ BP = \frac{c^2\sin\varphi^2}{2g}$$

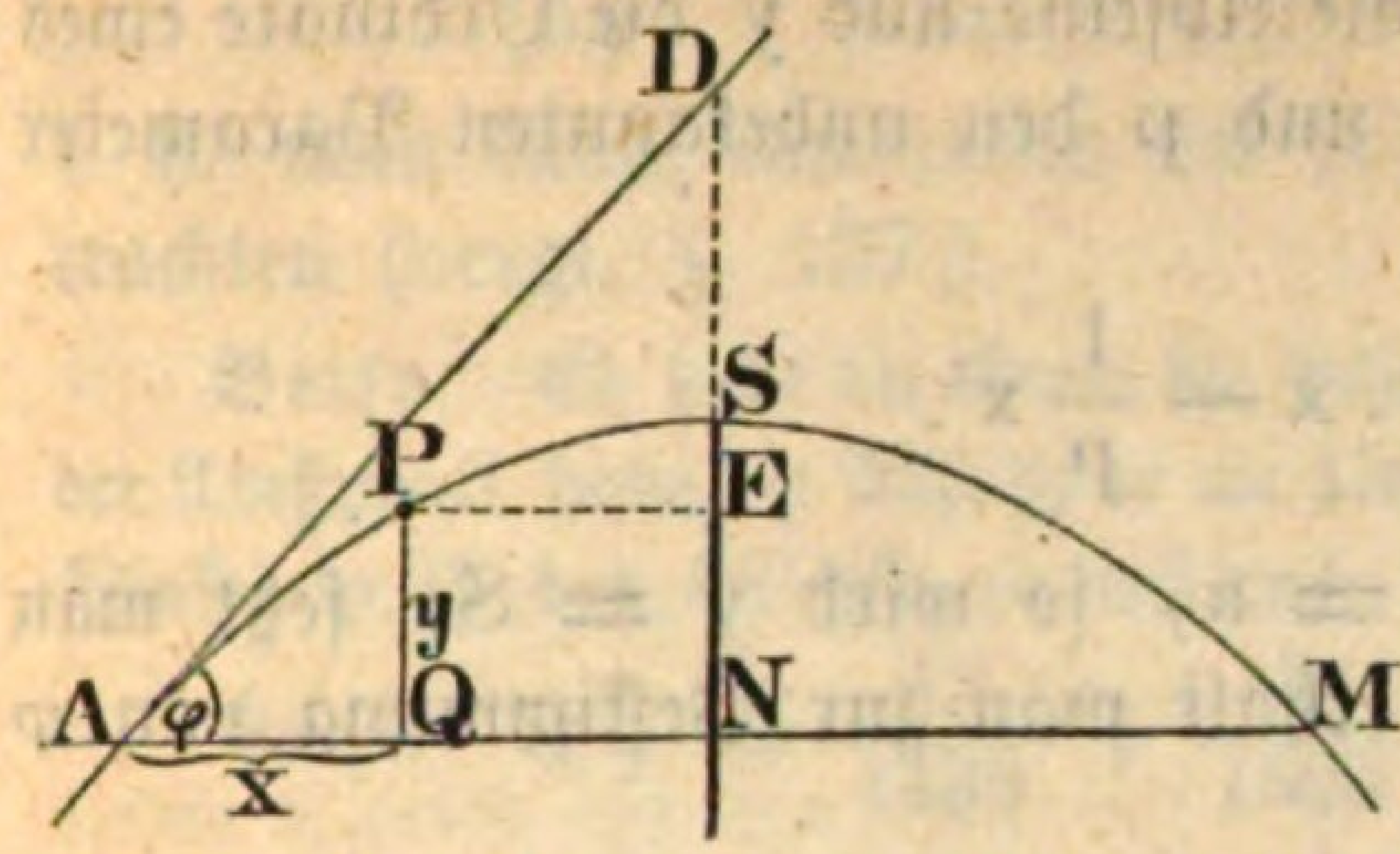
sein. Hieraus folgt aber

$$BP = \frac{AB.\operatorname{tg}\varphi}{2},$$

und weil

$$BC = AB.\operatorname{tg}\varphi$$

ist, so ergiebt sich, daß BP = PC, also AC eine die Parabel in A berührende Linie ist.



Auflösung. Es sei P ein beliebiger Punkt der Parabel, seine Abscisse $AQ = x$, seine Ordinate $PQ = y$; ferner sei $PE \perp SN$ gefällt. Aus $PE^2 = p.SE$ erhält man nun:

(1.) $(AN-x)^2 = p.(SN-y)$.

Zur Bestimmung von AN in SN hat man (weil $NS = SD$ ist) die Gleichungen:

(2.) $SN = \frac{1}{2} AN.\operatorname{tg}\varphi$.

(3.) $AN^2 = p.SN$.

Multiplicirt man (2.) mit (3.), so folgt

$$AN = \frac{p}{2}\operatorname{tg}\varphi, \quad \text{folglich aus (2.):}$$

$$SN = \frac{p}{4}\operatorname{tg}\varphi^2.$$

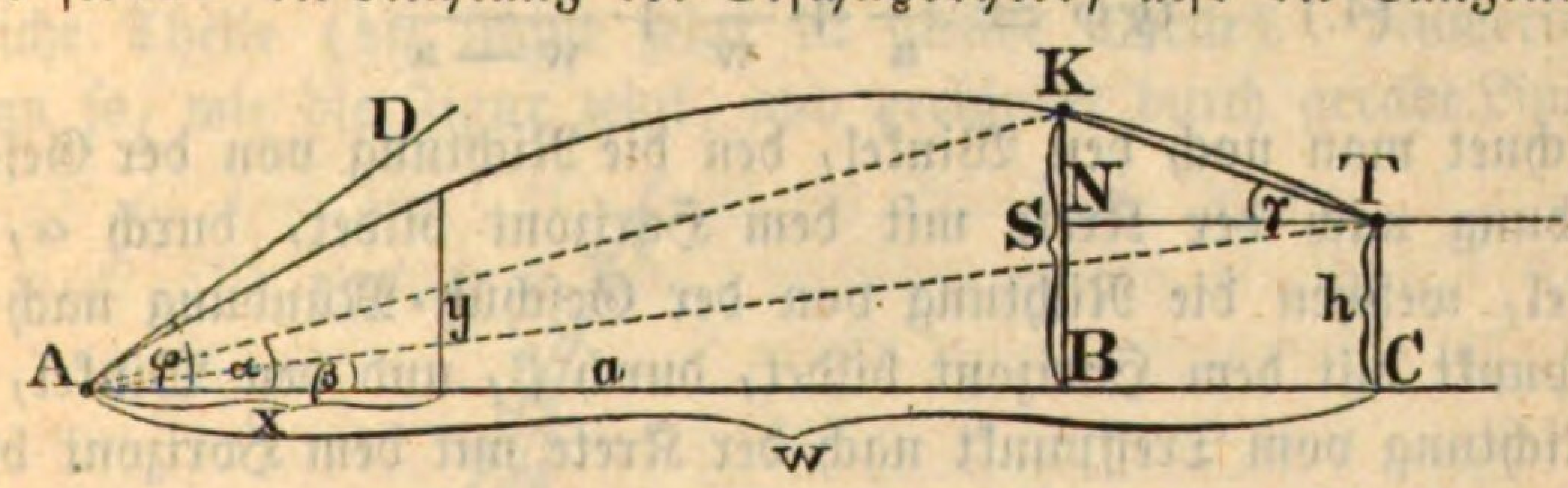
Setzt man diese Werthe in (1.) ein, so entsteht:

$$\left(\frac{p}{2}\operatorname{tg}\varphi - x\right)^2 = p\left(\frac{p}{4}\operatorname{tg}\varphi^2 - y\right).$$

Ordnet man diese Gleichung, so erhält man

(4.) $$y = \operatorname{tg}\varphi.x - \frac{1}{p}x^2.$$

II. Es sei AKT die Flugbahn, A die Mündung des Geschützes, K die Krete, T der Treffpunkt; AC sei horizontal in der Ebene der Flugbahn und sei die Abscissenlinie, A der Anfangspunkt der Abscissen; ferner sei AD die Richtung des Geschützrohres, also die Tangente der



Flugbahn für den Punkt A, die Krete K habe die Abscisse a und die Ordinate S, der Treffpunkt T die Abscisse w (die Wurfweite) und die Ordinate h; man soll den Elevationswinkel φ des Geschützrohres, also den Winkel, welchen AD mit der Horizontalen AC bildet, unter der Voraussetzung finden, daß die Flugbahn eine Parabel mit verticaler Axe sei.

Auflösung. Bezeichnet x die Abscisse und y die Ordinate eines beliebigen Punktes der Flugbahn und p den unbekannten Parameter der Parabel, so ist nach I. (4.):

$$y = \operatorname{tg}\varphi . x - \frac{1}{p} x^2.$$

Setzt man in diese Gleichung x = a, so wird y = S; setzt man x = w, so wird y = h; daher erhält man zur Bestimmung von φ und p die beiden Gleichungen

$$(1.) \qquad S = \operatorname{tg}\varphi . a - \frac{1}{p} a^2.$$

$$(2.) \qquad h = \operatorname{tg}\varphi . w - \frac{1}{p} w^2.$$

Da nur φ gesucht wird, so ist p zu eliminiren; multiplicirt man zu diesem Zwecke die erste Gleichung mit $\frac{w}{a}$, die zweite mit $\frac{a}{w}$, so folgt:

$$\frac{wS}{a} = \operatorname{tg}\varphi . w - \frac{1}{p} aw$$

$$\frac{ah}{w} = \operatorname{tg}\varphi . a - \frac{1}{p} aw,$$

und aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch Subtraction:

$$(3.) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{S}{a} w - \frac{h}{w} a}{w - a}.$$

Hieraus erhält man durch zwei Partial-Divisionen, wenn man nur zuerst mit w in das erste Glied des Zählers, dann aber mit — a in das entsprechende Glied des Restes dividirt:

$$(4.) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{S}{a} + \frac{h}{w} + \frac{S - h}{w - a}.$$

Bezeichnet man noch den Winkel, den die Richtung von der Geschütz-Mündung nach der Krete mit dem Horizont bildet, durch α, den Winkel, welchen die Richtung von der Geschütz-Mündung nach dem Treffpunkt mit dem Horizont bildet, durch β, und den Winkel, den die Richtung vom Treffpunkt nach der Krete mit dem Horizont bildet, durch γ, so folgt aus (4.):

$$(5.) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma.$$

Da in den Anwendungen α, β, γ und φ nur kleine Winkel sind, so kann man ohne einen praktisch bedeutenden Fehler arc φ statt φ, arc α statt α u. s. w. setzen (Arithm. §. 215. VI.), so daß aus (5.) annähernd folgt arc φ = arc α + arc β + arc γ, also auch

$$(6.)\qquad \varphi = \alpha + \beta + \gamma,$$

d. h. man kann annähernd die Flugbahn als einen Kreisbogen betrachten (vergl. §. 127.).

Beisp. Es habe die Krete die Abscisse $a = 1430'$, die Ordinate $S = 12'$; der Treffpunkt habe die Abscisse $w = 1500'$ und die Ordinate $5'$; unter welchem Winkel φ ist das Geschütz zu richten?

Aufl. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{12}{1430} + \frac{5}{1500} + \frac{7}{70}$ oder

$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}11172494$; und hieraus:

$\varphi = 6^\circ\ 22'\ 29''$.

Um zu prüfen, wie weit die Näherungsformel (6.) dieses Resultat genau giebt, wollen wir die Winkel α, β und γ den oben gegebenen Zahlen entsprechend berechnen; natürlich würde man die Formel (6.) nur anwenden, wenn die Winkel α, β, γ unmittelbar gegeben oder gemessen sind. Man erhält

$$\alpha = 0^\circ\ 28'\ 50''$$
$$\beta = 0^\circ\ 11'\ 27''$$
$$\gamma = 5^\circ\ 42'\ 38'',$$ folglich nach (6.):
$$\varphi = 6^\circ\ 22'\ 55''.$$

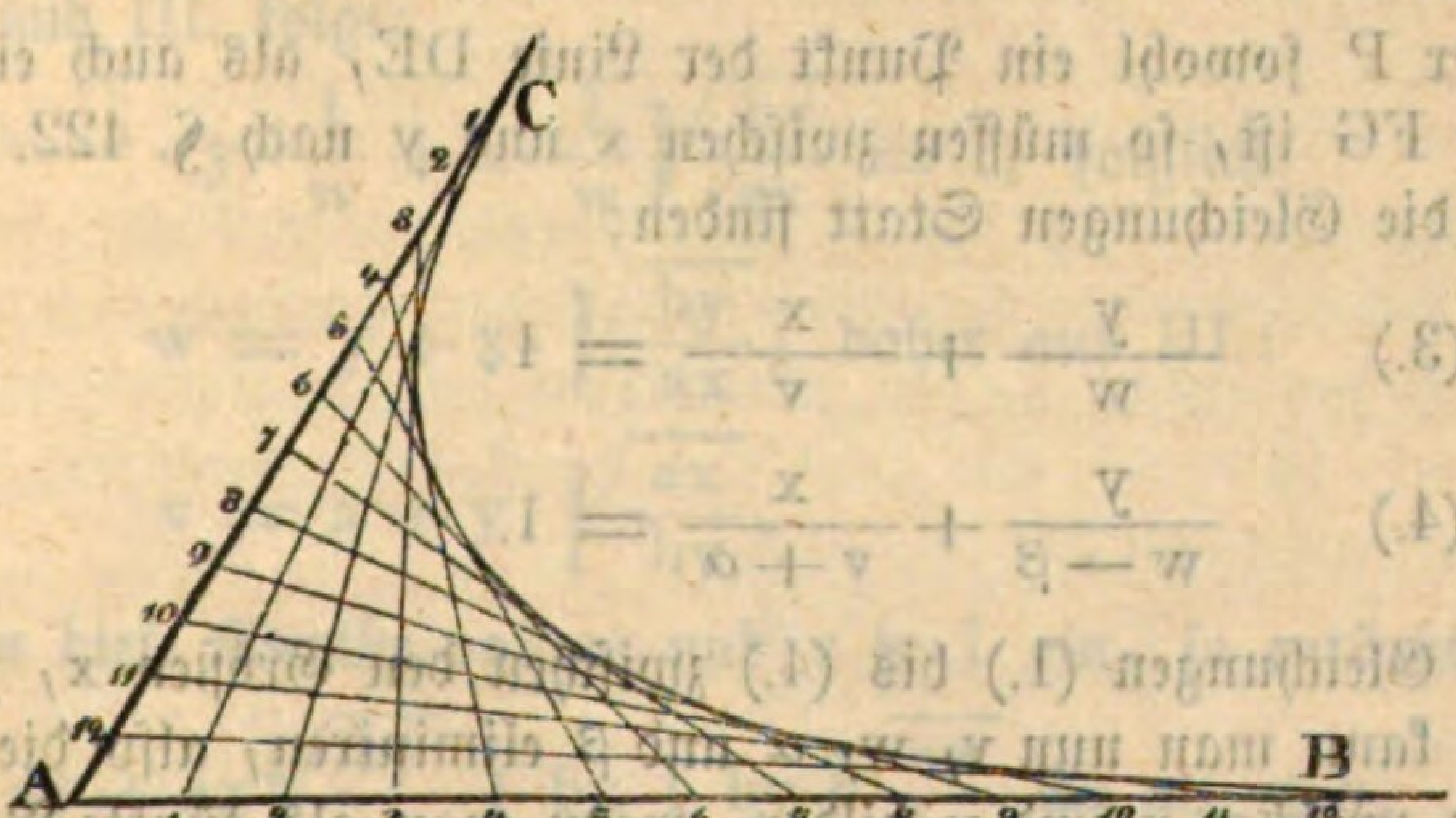
Der Unterschied beträgt also nur 26 Secunden.

§. 481.

Ueber eine beim freien Handzeichnen vorkommende Construction einer Parabel.

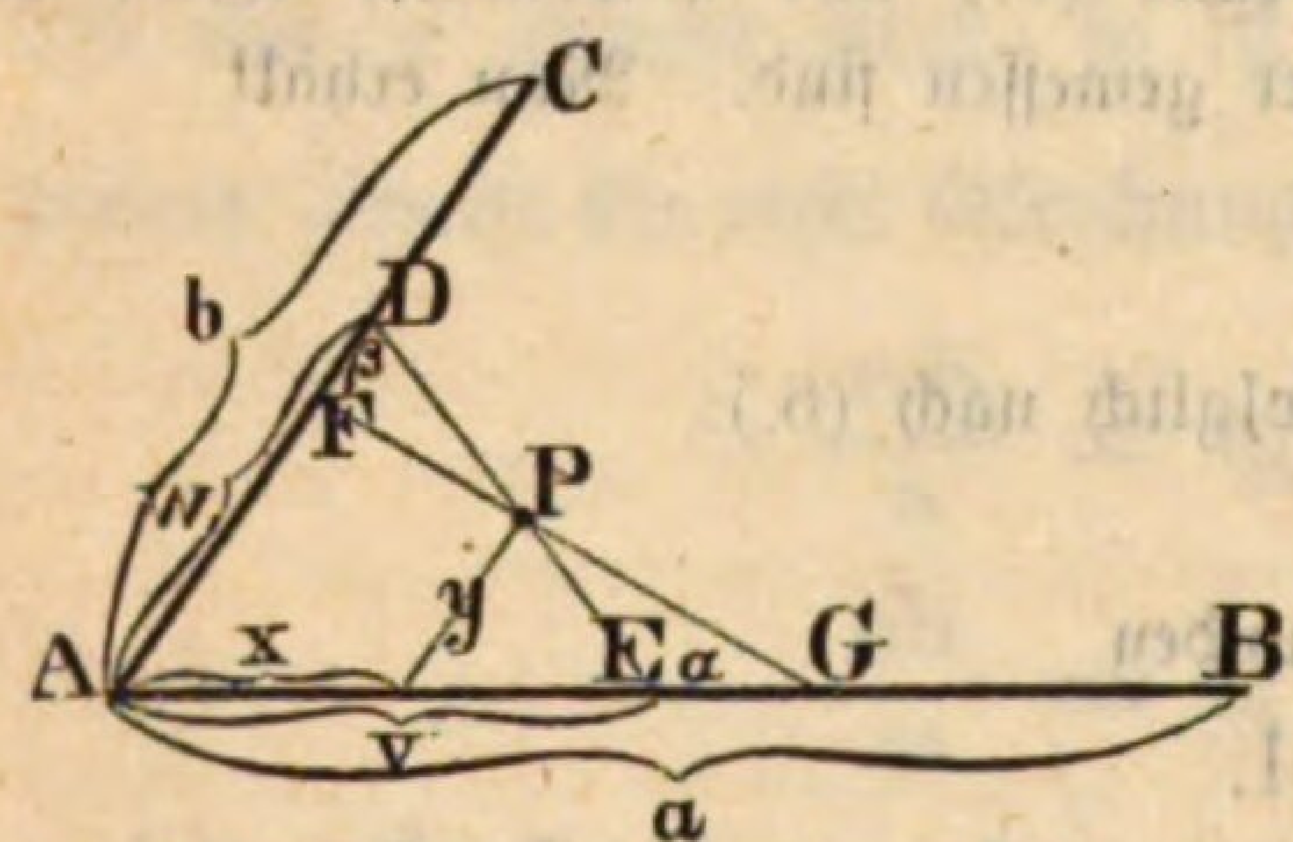
Um den Uebergang aus einer geraden Linie CA in eine andere AB durch eine Curve zu vermitteln, bedient man sich beim freien Handzeichnen häufig folgender Construction:

Sollen C und B die Punkte sein, in welchen die Curve in die geraden Linien überführt, und schneiden sich diese geraden Linien in A, so theilt man AC in beliebig viele, AB aber in eben so viele gleiche Theile (die Figur zeigt 12 gleiche Theile). Numerirt man dann so, wie die Figur zeigt, und verbindet durch gerade Linien den



Punkt 1 mit dem Punkt 1, dann 2 mit 2, 3 mit 3, 4 mit 4 u. s. w., zuletzt 12 mit 12, so entsteht zwischen C und B eine gebrochene Linie, welche beim Zeichnen als Anhalt für die Zeichnung der gewünschten Curve dient. Die gebrochene Linie nähert sich einer krummen Linie immer mehr und mehr, wenn man AC und AB in immer mehr und mehr gleiche Theile theilt, und geht endlich in eine krumme Linie über, wenn man sich die Anzahl der Theile unendlich groß denkt. Es soll ermittelt werden, welche Curve es ist, die hier als die Grenze einer gebrochenen Linie erscheint.

Auflösung. Bei der Herleitung der Gleichung der gesuchten Curve wollen wir uns der Richtungen AB und AC als Coordinatenaxen bedienen, also die Gleichung für schiefwinklige Coordinaten bilden; es sei AB die Abscissenaxe und AC die Ordinatenaxe. Jede der begrenzten Linien AB und AC denken wir uns in n gleiche Theile getheilt und setzen, wenn AB mit a und AC mit b bezeichnet wird,



$$\frac{a}{n} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{b}{n} = \beta,$$

so daß für ein unendlich großes n, α und β unendlich klein werden. Es mögen nun DE und FG zwei auf einander folgende Verbindungslinien sein, so daß DF $= \beta$ und EG $= \alpha$ ist; schneiden sich DE und FG in P, so ist für ein unendlich kleines α und β, P ein Punkt der gesuchten Curve; x und y bezeichnen die Coordinaten des Punktes P. Wird noch AD $=$ w und AE $=$ v gesetzt, so müssen die Punkte D, E, F und G den Bedingungen entsprechen:

(1.) $\quad b - w : v = b : a.$

(2.) $\quad \beta : \alpha = b : a.$

Da ferner P sowohl ein Punkt der Linie DE, als auch ein Punkt der Linie FG ist, so müssen zwischen x und y nach §. 422. Aufg. 3. Anmerk. die Gleichungen Statt finden:

(3.) $$\frac{y}{w} + \frac{x}{v} = 1.$$

(4.) $$\frac{y}{w - \beta} + \frac{x}{v + \alpha} = 1.$$

Aus den Gleichungen (1.) bis (4.) zwischen den Größen x, y, v, w, α und β kann man nun v, w, α und β eliminiren, also die gesuchte Gleichung zwischen x und y bilden, wenn man als fünfte Bedingung

benutzt, daß α und β unendlich klein sein sollen. Zieht man zunächst (4.) von (3.) ab, so entsteht:

$$y\cdot\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{w-\beta}\right)+x\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v+\alpha}\right)=0 \text{ oder}$$

$$y\cdot\frac{-\beta}{w(w-\beta)}+x\cdot\frac{\alpha}{v(v+\alpha)}=0; \text{ daher}$$

$$\frac{\alpha x}{v(v+\alpha)}=\frac{\beta y}{w(w-\beta)} \text{ oder}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{y}{x}\cdot\frac{v(v+\alpha)}{w(w-\beta)}.$$

Setzt man aus (2.) $\frac{a}{b}$ statt $\frac{\alpha}{\beta}$, so folgt:

$$(5.)\qquad \frac{a}{b}=\frac{y}{x}\cdot\frac{v}{w}\cdot\frac{v+\alpha}{w-\beta}.$$

Eine Curve entsteht zwischen C und B nur, wenn man sich AC und AB in unendlich viele gleiche Theile zerlegt denkt, wenn man sich also α und β im Verschwinden denkt. Dann hat aber das Verhältniß $\frac{v+\alpha}{w-\beta}$ die Grenze $\frac{v}{w}$; daher entsteht, wenn man von der gebrochenen Linie zur Curve übergeht, aus (5.):

$$(6.)\qquad \frac{a}{b}=\frac{y}{x}\cdot\frac{v^2}{w^2}.$$

Diese Gleichung tritt an die Stelle der Gleichung (4.), und da die Gleichung (2.) nicht mehr gebraucht wird, so haben wir zur weiteren Entwickelung zwischen x, y, v und w folgende drei Gleichungen, welche resp. aus (1.), (3.) und (6.) entstehen:

$$\text{I.}\ aw+bv=ab.\quad \text{II.}\ \frac{y}{w}+\frac{x}{v}=1.\quad \text{III.}\ v=w\sqrt{\frac{ax}{by}}.$$

Aus II. und III. folgt:

$$y\cdot\frac{1}{w}+x\cdot\frac{1}{w}\sqrt{\frac{by}{ax}}=1; \text{ folglich:}$$

$$w=y+x\cdot\sqrt{\frac{by}{ax}}, \text{ daher aus III.:}$$

$$v=x+y\cdot\sqrt{\frac{ax}{by}}.$$

Setzt man diese Werthe von w und v in I. ein, so entsteht:

$$ay+ax\sqrt{\frac{by}{ax}}+bx+by\sqrt{\frac{ax}{by}}=ab \text{ oder}$$

$$ay + bx + 2\sqrt{abxy} = ab \text{ oder}$$
$$ay + bx - ab = -2\sqrt{abxy}.$$

Quadrirt man diese Gleichung und ordnet sie nach den fallenden Potenzen von y und x, so entsteht:

$$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 - 2a^2by - 2ab^2x + a^2b^2 = 0.$$

Die Curve, welche diese Gleichung darstellt, ist nach §. 467. Anmerk. 2. eine Parabel.

§. 482.

Uebungs-Aufgaben über die Parabel.

Vorbemerkung. In den nachfolgenden Aufgaben beziehen sich die Abscisse und die Ordinate eines Punktes einer Parabel immer auf die Axe als Abscissenlinie und den Scheitel als Anfangspunkt der Abscissen, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt ist.

Aufgabe 1. Wie lang ist die Sehne der Parabel $y^2 = 4x$, deren Endpunkte die Ordinaten -2 und $+4$ haben?

Antw. 6,708204 Längen-Einheiten.

Aufgabe 2. Wie lang ist die Sehne einer Parabel, wenn der eine Endpunkt die Abscisse $+a$ und die Ordinate $+b$, der andere aber die Ordinate $-2b$ hat?

Antw. $3\sqrt{a^2 + b^2}$.

Aufgabe 3. Unter welchem Winkel schneidet eine Tangente der Parabel die Axe, wenn die Projection des Berührungspunktes auf die Axe der Brennpunkt ist?

Antw. Unter einem Winkel von 45°.

Aufgabe 4. Wie heißt die Gleichung der Parabel $y^2 = px$, wenn man die Directrix zur Abscissenlinie und ihren Durchschnittspunkt mit der Axe zum Anfangspunkt der Abscissen nimmt?

Antw. $z = \frac{p}{4} + \frac{u^2}{p}$, wenn u die Abscisse und z die Ordinate bedeutet.

Aufgabe 5. Für welchen Punkt der Parabel $y^2 = 12x$ ist die Ordinate sechsmal so groß, als die Abscisse?

Antw. Der gesuchte Punkt hat die Abscisse $\frac{1}{3}$ und die Ordinate 2.

Aufgabe 6. Der Inhalt einer parabolischen Ebene, welche von den zusammengehörigen Coordinaten x und y begrenzt wird, ist $= a^2$, der Inhalt des Körpers, den diese Ebene bei der Umdrehung um die Axe erzeugt, ist $= a^3$; wie groß sind die Coordinaten, und wie heißt die Scheitelgleichung der Parabel?

Antw. $x = \frac{9}{8} a\pi$, $y = \frac{4a}{3\pi}$; die Scheitelgleichung der Parabel ist $y^2 = \frac{128a}{81\pi^3} \cdot x$.

Aufgabe 7. Wie lang ist die Sehne der Parabel $y^2 = px$, welche durch den Brennpunkt geht und die Axe unter dem Winkel α schneidet?

Antw. $\frac{p}{\sin \alpha^2}$. — Hieraus folgt, daß unter allen durch den Brennpunkt gehenden Sehnen die auf der Axe senkrechte die kürzeste ist.

Aufgabe 8. Durch Punkt B der Axe der Parabel $y^2 = px$, welcher vom Scheitel den Abstand a hat, ist eine Sehne gelegt, welche die Axe unter dem Winkel α schneidet; wie lang ist die Sehne?

Antw. $\frac{1}{\sin \alpha^2} \cdot \sqrt{p^2 \cos \alpha^2 + 4ap \sin \alpha^2}$. — Giebt man diesem Ausdrucke die Form $\sqrt{4ap + (4ap + p^2 \operatorname{cosec} \alpha^2) \operatorname{cotg} \alpha^2}$, so folgt, daß unter allen Sehnen, welche durch denselben Punkt der Axe gehen, die auf der Axe senkrechte ($\sqrt{4ap}$) die kürzeste ist.

Aufgabe 9. Eine Parabel ist durch die Gleichung $y^2 = 2x$ gegeben. Von einem Punkt B der Axe, welcher vom Scheitel den Abstand 5 hat, ist nach einem Punkte P der Parabel eine Linie von der Länge 5 gezogen, und die Linie PB ist über B verlängert, bis sie wieder die Parabel in Q trifft; wie lang ist die Sehne PQ?

Antw. $8\frac{1}{8}$ Längen-Einheiten.

Aufgabe 10. Für den Punkt der Parabel $y^2 = 9x$, welcher die Ordinate 6 hat, die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale zu bestimmen.

Aufl. Subtangente $= 8$; die Tangente $= 10$; die Subnormale $= 4\frac{1}{2}$; die Normale $= 7\frac{1}{2}$.

Aufgabe 11. Dieselbe Aufgabe für den Punkt der Parabel $y^2 = px$, dessen Projection auf die Axe der Brennpunkt ist.

Aufl. Die Subtangente $= \frac{p}{2}$; die Tangente $= \frac{p}{2}\sqrt{2}$; die Subnormale $= \frac{p}{2}$; die Normale $= \frac{p}{2}\sqrt{2}$.

Aufgabe 12. Dieselbe Aufgabe für den Punkt der Parabel $y^2 = \frac{3}{2}x$, dessen Abscisse $= 6$ ist.

Aufl. Die Subtangente $= 12$; die Tangente $= 12{,}3693$; die Subnormale $= 0{,}75$; die Normale $= 3{,}0924$.

Aufgabe 13. Eine Linie berührt die Parabel $y^2 = \frac{3}{4}x$ in einem Punkte, dessen Ordinate $= 10$ ist; welchen Winkel bildet sie mit der Axe?

Antw. $2^\circ\ 8'\ 51''$.

Aufgabe 14. Ein Punkt P der Parabel $y^2 = 8x$ hat die Ordinate $+12$; wie heißt die Gleichung der geraden Linie, welche die Parabel in P berührt?

Antw. Zur Ordinate 12 gehört die Abscisse 18; daher hat die Gleichung der Tangente nach §. 475. Anmerk. die Form $2 \cdot \frac{y}{12} - \frac{x}{18} = 1$ oder $y = 6 + \frac{1}{3}x$, wobei dasselbe Coordinaten-System vorausgesetzt wird, für welches die Gleichung der Parabel gilt.

Aufgabe 15. Wie heißt in Bezug auf die vorhergehende Aufgabe die Gleichung der Normale für den Punkt P?

Antw. $y = 66 - 3x$.

Aufgabe 16. Eine Parabel ist durch die Gleichung $y^2 = 4x$ gegeben; wie heißt die Gleichung der Normale dieser Parabel, welche die Axe in der Entfernung 11 vom Scheitel schneidet?

Aufl. Die Aufgabe hat zwei Auflösungen; die gesuchte Gleichung ist entweder $y = 33 - 3x$, oder $y = -33 + 3x$. — Der Punkt, in welchem die Normale die Parabel schneidet, hat (§. 475. Nr. 3.) die Abscisse 9.

Aufgabe 17. Eine Parabel ist durch die Gleichung $y^2 = 4x$ gegeben, ein Punkt P durch seine demselben Coordinaten-System zugehörigen Coordinaten $x = -2$ und $y = +1$; man soll die Gleichung der Linien bestimmen, welche durch P gehen und die Parabel berühren, auch die Berührungspunkte ermitteln.

Aufl. 1. Jede gerade Linie, welche durch P geht, hat die Form

$$(1.)\quad y - 1 = b\,(x + 2).$$

Verbindet man diese Gleichung mit der gegebenen Gleichung der Parabel

$$(2.)\quad y^2 = 4x,$$

und eliminirt x, so erhält man die quadratische Gleichung:

$$y^2 - \frac{4}{b}\,y + \frac{4}{b} + 8 = 0,$$

und aus ihr folgt

$$(3)\quad y = \frac{2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{b} - 8}.$$

Aus dieser Gleichung ist b so zu bestimmen, daß sich für y nur ein Werth ergiebt, und setzt man zu diesem Zwecke den Radicand gleich Null, so folgt

$$\frac{2}{b} = \begin{Bmatrix} +4 \\ -2 \end{Bmatrix}, \text{ folglich } b = \begin{Bmatrix} +\frac{1}{2} \\ -1 \end{Bmatrix}.$$

Setzt man diese Werthe von b in (1.) ein, so erhält man die Gleichungen der beiden Tangenten, die sich durch P an die Parabel legen lassen:

$$\text{I.}\quad y = 2 + \tfrac{1}{2}x; \qquad \text{II.}\quad y = -1 - x.$$

Die Ordinate des Berührungspunktes ergiebt sich am einfachsten aus (3.), die

Abscisse aus (2.) oder resp. aus I. oder II. Der Berührungspunkt der ersten Tangente hat die Abscisse 4 und die Ordinate 4, der Berührungspunkt der zweiten die Abscisse 1 und die Ordinate — 2.

Aufl. 2. Bezeichnen x und y die Coordinaten der gesuchten Tangente, so hat ihre Gleichung nach §. 275. Nr. 7. Anmerk. die Form:

$$(1.)\quad 2 \cdot \frac{y}{y_1} - \frac{x}{x_1} = 1,$$

wenn x_1 und y_1 die Coordinaten des Berührungspunktes sind. Da die Tangente durch P gehen soll, so muß $y = 1$ werden, wenn man $x = -2$ setzt. So bekommt man zur Bestimmung von x_1 und y_1 die Gleichung

$$(2.)\quad \frac{2}{y_1} + \frac{2}{x_1} = 1,$$

und nimmt man hinzu, daß aus der Gleichung der Parabel folgt:

$$(3.)\quad y_1^2 = 4x_1,$$

so kann man x_1 und y_1 entwickeln. Man erhält die Coordinaten des Berührungspunkts:

$$y_1 = 4 \quad \text{und} \quad x_1 = 4, \quad \text{oder} \quad y_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_1 = 1.$$

Setzt man diese Werthe in (1.) ein, so erhält man die Gleichungen beider Tangenten, wie sie in der ersten Auflösung gefunden wurden.

Aufgabe 18. Dieselbe Aufgabe für die Parabel $y^2 = 3x$, wenn der Punkt P die Abscisse — 1 und die Ordinate — 1 hat.

Aufl. Man erhält die beiden Tangenten:

$$\text{I.}\quad y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}x; \qquad \text{II.}\quad y = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x.$$

Der Berührungspunkt der ersten hat die Abscisse $\frac{1}{3}$ und die Ordinate 1, der Berührungspunkt der zweiten die Abscisse 3 und die Ordinate — 3.

Aufgabe 19. Wie heißen die Gleichungen der beiden Tangenten, die man von einem Punkte der über den Scheitel verlängerten Axe, welcher vom Scheitel den Abstand 8 hat, an die Parabel $y^2 = \frac{1}{2}x$ legen kann, und wo liegen die Berührungspunkte?

Antw. Die Gleichungen der beiden Tangenten sind: $y = 1 + \frac{1}{8}x$ und $y = -1 - \frac{1}{8}x$; die Berührungspunkte haben die Abscisse 8 und die Ordinate ± 2.

Aufgabe 20. Für dasselbe Coordinaten-System sind die beiden Parabeln gegeben:

$$y^2 = ax \quad \text{und} \quad y^2 = -ax.$$

Zwischen diesen Parabeln liegt eine gerade Linie PQ, welche in beiden Parabeln endet, mit der Axe parallel ist und von ihr den Abstand a hat. Wie groß ist der Inhalt der Ebene, welche von PQ und Theilen beider Parabeln völlig eingeschlossen ist?

Antw. $\frac{2}{3}a^2$.

Aufgabe 21. Wie groß ist der Inhalt des Körpers, den die in der vorhergehenden Aufgabe berechnete Ebene bei der Umdrehung um die Axe beschreibt?

Antw. $a^3\pi$.

Aufgabe 22. Eine Sehne einer Parabel, welche durch den Brennpunkt geht, ist durch die Coordinaten ihres einen Endpunktes gegeben, welche sich auf die Axe als Abscissenlinie und den Scheitel als Anfangspunkt der Abscissen beziehen; es ist die Abscisse $= \frac{4}{3}$ und die Ordinate $= 4$; man soll die Coordinaten des andern Endpunktes und den Inhalt des Segmentes finden, welches die Sehne von der Ebene der Parabel abschneidet.

Aufl. Die Coordinaten des andern Endpunktes sind $\frac{27}{4}$ und -9 (§. 476. VI.), der Inhalt des Segments ist $= 30\frac{37}{72}$ □-Einheiten.

Aufgabe 23. Es soll die gegenseitige Lage der Parabel $y^2 = \frac{8}{3}x$ und der geraden Linie $y = \frac{2}{3}x$ angegeben werden, wenn für beide Gleichungen dasselbe Coordinaten-System vorausgesetzt wird.

Aufl. Die gerade Linie geht durch den Scheitel der Parabel und schneidet sie noch in dem Punkte $(x = 6,\ y = 4)$.

Aufgabe 24. Dieselbe Aufgabe für die Parabel $y^2 = 2x$ und die Gerade $y = -4 + x$.

Aufl. Die Gerade schneidet die Parabel in den Punkten $(x = 2,\ y = -2)$. und $(x = 8,\ y = 4)$.

Aufgabe 25. Dieselbe Aufgabe für die Parabel $y^2 = \frac{2}{3}x$ und die Gerade $y = 1 + \frac{1}{6}x$.

Aufl. Die Gerade berührt die Parabel in dem Punkte $(x = 6,\ y = 2)$.

Aufgabe 26. Dieselbe Aufgabe für die Parabel $y^2 = \frac{5}{2}x$ und die Gerade $y = -\frac{5}{2} - \frac{1}{4}x$.

Aufl. Die Gerade berührt die Parabel in dem Punkte

$$(x = 10,\ \ y = -5).$$

Aufgabe 27. Welche Bedingung müssen a und b erfüllen, wenn die gerade Linie $y = a + bx$ durch den Brennpunkt der Parabel $y^2 = px$ gehen soll?

Antw. Es muß $4a + bp = 0$ sein.

Aufgabe 28. Für dasselbe Coordinaten-System sind eine Parabel und eine gerade Linie gegeben:

$$1)\quad y^2 + 2x - 12y + 16 = 0$$

$$2)\quad y + x - 12 = 0;$$

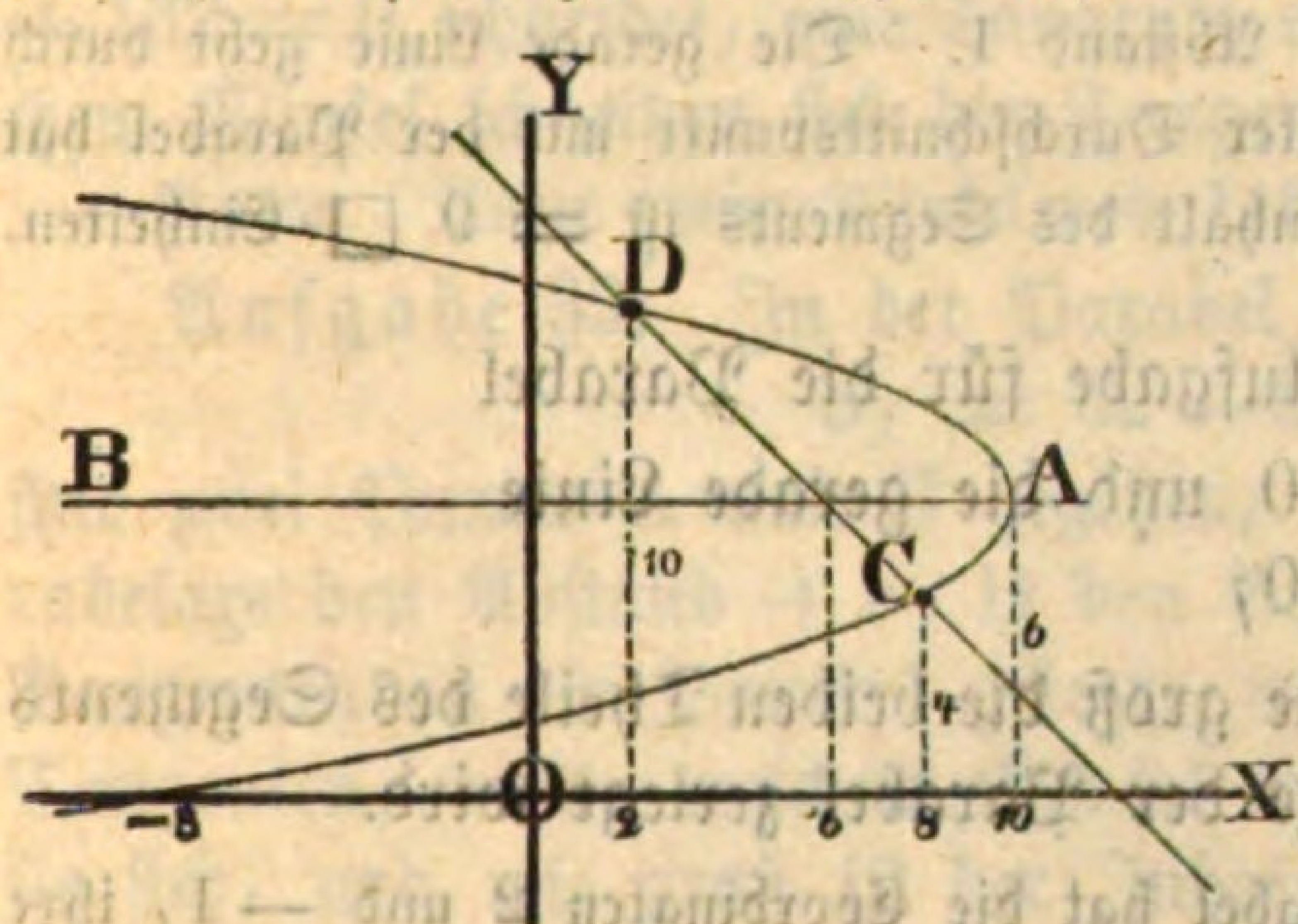
man soll die Lage beider Linien zu den Coordinatenaxen finden, namentlich die Lage des Scheitels, der Axe, des Brennpunkts der Parabel, die Durchschnittspunkte der Linien mit den Coordinatenaxen; ferner

die gegenseitige Lage der beiden Linien und den Inhalt des Segments, welches die gerade Linie von der Parabel abschneidet.

Aufl. Bringt man 1) auf die Form:

$$(y-6)^2 = -2(x-10),$$

so erkennt man, daß die Axe AB der Abscissenlinie parallel ist, der Scheitel A die Abscisse 10 und die Ordinate 6 hat, die Parabel nach links sich erstreckt, der Brennpunkt endlich vom Scheitel die Entfernung $\frac{1}{2}$, also die Abscisse $9\frac{1}{2}$ und die Ordinate 6 hat. Die Parabel schneidet die X-Axe nur einmal, und zwar in der Entfernung -8 vom Durchschnittspunkt O der Axen (man setzt in 1) $y = 0$), die Y-Axe aber zweimal, in den Entfernungen 1,528 und 10,472 von O (man setzt $x = 0$). Der Durchschnittspunkt der geraden Linie mit der X-Axe hat die Abscisse 12, mit der Y-Axe die Ordinate 12. Um die Durchschnittspunkte C und D beider Linien zu finden, hat man 1) und 2) als zusammengehörige algebraische Gleichungen zu betrachten und x und y zu entwickeln; man findet zwei Durchschnittspunkte: $(x = 8, y = 4)$ und $(x = 2, y = 10)$.



Den Punkt, in welchem die gerade Linie die Parabelaxe schneidet, erhält man am einfachsten, wenn man in 2) $y = 6$ setzt; der Durchschnittspunkt hat die Abscisse 6.

Den Inhalt des Segments ADC erhält man aus den Axen-Coordinaten der Punkte D und C. Für AB als Abscissenlinie und A als Anfangspunkt der Abscissen hat D die Coordinaten $x = 8$, $y = 4$ (wobei die Richtung nach links in Bezug auf die Abscissen als positive gilt), und C die Coordinaten $x = 2$, $y = -2$. Hieraus folgt nach §. 478. IV.:

$$\text{der Inhalt des Segments} = \frac{(4+2)^2}{4-2} \cdot \frac{8-2}{6} = 18 \;\square\text{-Einheiten.}$$

Aufgabe 29. Dieselbe Aufgabe für die Parabel

1) $y^2 - 8y - 4x + 24 = 0$ und die gerade Linie
2) $3y - 2x - 8 = 0$.

Aufl. Der Scheitel der Parabel hat die Coordinaten 2 und 4, die Axe ist der Abscissenlinie parallel, und die Parabel erstreckt sich nach rechts und schneidet die Abscissenlinie in der Entfernung 6 von O; der Brennpunkt hat die Coordinaten 3 und 4. Die gerade Linie geht durch den Scheitel der Parabel, ihr zweiter Durchschnittspunkt mit der Parabel hat die Coordinaten 11 und 10; der Inhalt des Segments ist $= 9 \;\square$-Einheiten.

Aufgabe 30. Dieselbe Aufgabe für die Parabel

1) $x^2 + 2y + 8x + 20 = 0$ und die gerade Linie
2) $y - x + 2 = 0$.

Aufl. Der Scheitel der Parabel hat die Coordinaten -4 und -2, die Axe steht auf der Abscissenlinie senkrecht, und die Parabel erstreckt sich nach unten; der Brennpunkt liegt in der Entfernung $\frac{1}{2}$ vom Scheitel. Der eine Durchschnittspunkt der geraden Linie mit der Parabel hat die Coordinaten -2 und -4, der andere -8 und -10; der Inhalt des Segments ist $= 18$ □-Einheiten.

Aufgabe 31. Dieselbe Aufgabe für die Parabel

1) $x^2 - 4y - 10x + 9 = 0$ und die gerade Linie
2) $2y + 3x - 7 = 0$.

Aufl. Der Scheitel der Parabel hat die Coordinaten 5 und -4, die Axe steht auf der Abscissenlinie senkrecht, die Parabel erstreckt sich nach oben und schneidet die Abscissenlinie in den Endpunkten der Abscissen 1 und 9; der Brennpunkt hat vom Scheitel den Abstand 1. Die gerade Linie geht durch den Scheitel der Parabel, ihr zweiter Durchschnittspunkt mit der Parabel hat die Coordinaten -1 und 5; der Inhalt des Segments ist $= 9$ □-Einheiten.

Aufgabe 32. Dieselbe Aufgabe für die Parabel

1) $x^2 - 4y - 4x = 0$ und die gerade Linie
2) $4y - 3x + 6 = 0$;

auch soll angegeben werden, wie groß die beiden Theile des Segments sind, in welche es durch die Axe der Parabel zerlegt wird.

Aufl. Der Scheitel der Parabel hat die Coordinaten 2 und -1, ihre Axe steht auf der Abscissenlinie senkrecht, die Parabel erstreckt sich nach oben und schneidet die Abscissenlinie in dem Endpunkte der Abscisse 4 und im Anfangspunkt der Abscissen; der Brennpunkt liegt in der Abscissenlinie. Die gerade Linie geht durch den Brennpunkt der Parabel, ihre Durchschnittspunkte mit der Parabel haben die Coordinaten $x = 1$, $y = -\frac{3}{4}$ und $x = 6$, $y = 3$. Der Inhalt des Segments ist $= 5\frac{5}{24}$ □-Einheiten, die beiden Theile haben die Inhalte $4\frac{2}{3}$ □-Einheiten und $\frac{13}{24}$ □-Einheiten.

Aufgabe 33. Wie groß ist der Inhalt des Segments, welches die Abscissenlinie von der Parabel $x^2 - 8y - 12x + 20 = 0$ abschneidet?

Antw. $10\frac{2}{3}$ □-Einheiten.

Aufgabe 34. Wie groß ist der Inhalt des Segments, welches die Gerade $y + x - 6 = 0$ von der Parabel $y^2 - 8y - 4x + 24 = 0$ abschneidet?

Antw. $2\frac{2}{3}$ □-Einheiten.

Aufgabe 35. Wie groß ist der Inhalt des Segments, welches die gerade Linie $y = -7 + 2x$ von der Parabel $x^2 - 2y - 8x + 18 = 0$ abschneidet, und wie groß ist der Körper, den dieses Segment bei der Umdrehung um die Parabelaxe beschreibt?

Antw. Das Segment $= 5\frac{1}{3}$ □-Einheiten; der Inhalt des Körpers $= 67{,}0206$ Kub.-Einheiten.

Aufgabe 36. Wie groß ist der Inhalt des Segments, welches die gerade Linie $3y + 4x = 16$ von der Parabel $y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$ abschneidet?

Antw. $5\frac{5}{24}$ □-Einheiten.

Aufgabe 37. Wie groß ist der Inhalt des Segments, welches die gerade Linie $y = 8 - x$ von der Parabel $y = 4x - \frac{1}{2}x^2$ abschneidet?

Antw. 18 □-Einheiten.

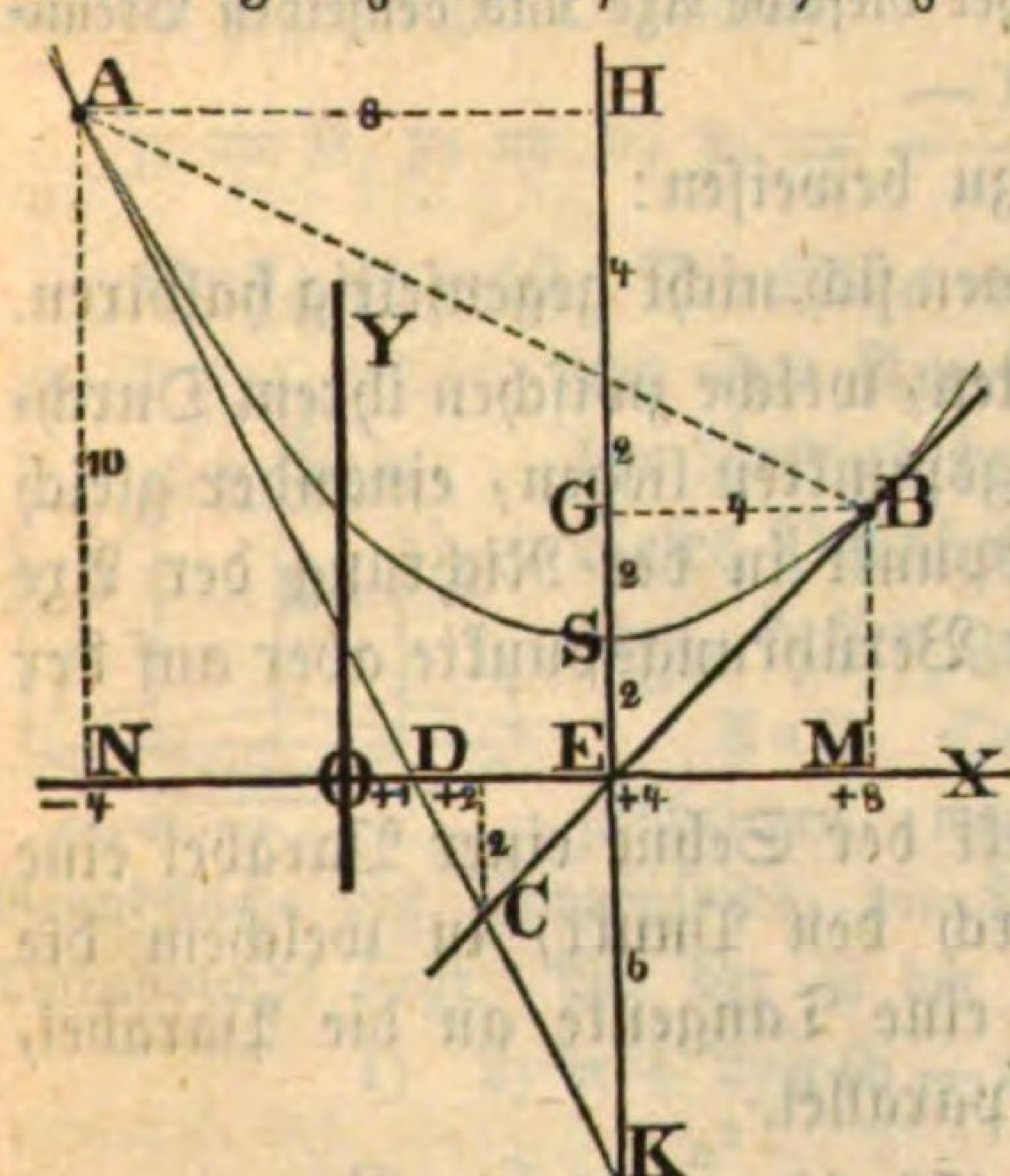
Aufgabe 38. Wenn man durch jeden der beiden Punkte, in welchen die gerade Linie $y + x - 14 = 0$ die Parabel $x^2 - 8y - 20x + 132 = 0$ schneidet, eine Tangente an die Parabel legt, unter welchem Winkel schneiden sich die Tangenten?

Antw. Unter einem Winkel von 116° 33′ 54″.

Aufgabe 39. In der Parabel

$$8y = 32 - 8x + x^2$$

sind zwei Punkte A und B gegeben; der Punkt A hat von der Parabelaxe den Abstand $+8$, B den Abstand -4. In A und B sind Tangenten an die Parabel gelegt; wie heißen die Gleichungen dieser Tangenten, unter welchem Winkel und in welchem Punkte schneiden sie sich, und wie groß ist der Inhalt der Ebene, welche von diesen Tangenten, dem Bogen AB der Parabel und dem Theile der Abscissenlinie begrenzt wird, welcher zwischen den Tangenten liegt?



Aufl. Die Figur zeigt die Lage der Parabel und der Tangenten zu dem gegebenen Coordinaten-System und ihre gegenseitige Lage. Giebt man der Gleichung der Parabel die Form

$$(x - 4)^2 = 8(y - 2),$$

so ist ihre Lage zum Coordinaten-System gefunden, und man kann jetzt die Punkte A und B eintragen, deren Axen-Abscissen (SH und SG) aus dem Parameter 8 sich resp. gleich 8 und 2 ergeben. Um die Tangenten in die Figur einzuzeichnen, macht man SK = SH und zieht AK; die Tangente, welche die Parabel in B berührt, muß durch den Punkt gehen, in

welchem die Parabelaxe die X-Axe schneidet, weil SE = 2 = SG ist. Die Gleichungen der Tangenten sind:

$$y = 2 - 2x \text{ und } y = -4 + x,$$

aus ihnen ergeben sich die Coordinaten des Durchschnittspunktes C gleich 2 und — 2 und der Winkel, den sie einschließen, gleich 71° 33′ 54″. (Man kann auch die Abscisse des Punktes C nach dem Gesetz §. 476. V. finden, nach welchem ihr Endpunkt der Mittelpunkt von NM sein muß; die Ordinate ergiebt sich dann aus ähnlichen Dreiecken.)

Um die Ebene ASBED zu berechnen, zieht man das zu AB gehörige Segment und die beiden Dreiecke AND und BME von dem Paralleltrapez ABMN ab. Man erhält den Inhalt der Ebene ASBED = 15 □-Einheiten.

Aufgabe 40. Die Curve zu bestimmen, welche alle Ordinaten der Parabel $y^2 = px$ halbirt.

Aufl. Nimmt man dasselbe Coordinaten-System, für welches die Gleichung der Parabel gilt, bezeichnet die Coordinaten mit x und y, so ist $(2y)^2 = px$ oder $y^2 = \frac{p}{4}x$; die gesuchte Curve ist also auch eine Parabel.

Aufgabe 41. Die Curve zu bestimmen, welche alle Brennstrahlen der Parabel $y^2 = px$ halbirt.

Aufl. Ist A der Scheitel und F der Brennpunkt der Parabel, so nehme man den Mittelpunkt M von AF zum Anfangspunkt der Abscissen und die Axe der Parabel zur Abscissenlinie. Zieht man nun einen beliebigen Brennstrahl FP und bezeichnet mit x und y die Coordinaten seines Mittelpunkts, so ist bei jeder Lage des Brennstrahls x gleich der Hälfte der Abscisse und y gleich der Hälfte der Ordinate des Punktes P. Daher ist $(2y)^2 = p.2x$ oder $y^2 = \frac{p}{2}x$. Die gesuchte Curve ist also auch eine Parabel, welche M zum Scheitel und mit der gegebenen Parabel dieselbe Axe und denselben Brennpunkt hat.

Aufgabe 42. Folgende Sätze zu beweisen:

1) Zwei Sehnen einer Parabel können sich nicht gegenseitig halbiren.

2) Wenn die Theile zweier Tangenten, welche zwischen ihrem Durchschnittspunkt und den Berührungspunkten liegen, einander gleich sind, so muß der Durchschnittspunkt in der Richtung der Axe liegen, die Verbindungslinie der Berührungspunkte aber auf der Axe senkrecht stehen.

3) Zieht man durch den Mittelpunkt der Sehne einer Parabel eine Parallele mit der Axe und durch den Punkt, in welchem die Parallele die Parabel schneidet eine Tangente an die Parabel, so ist die Tangente der Sehne parallel.

Beweise. Zu 1) Indirect aus §. 476. V.

Zu 2) Mit Hülfe von §. 476. V. aus congruenten Dreiecken.

Zu 3) Indirect mit Hülfe von 1) und §. 477. II.

Aufgabe 43. An eine Parabel eine Tangente zu legen, welche einer gegebenen Linie parallel ist.

Aufl. Mit Hülfe von Nr. 3. der vorhergehenden Aufgabe.

Aufgabe 44. Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks ist $= a$, die Höhe $= h$. Wie heißt die Scheitelgleichung der Parabel, welche durch die Endpunkte der Grundlinie geht und in diesen Punkten von den beiden andern Seiten des Dreiecks berührt wird, und wie verhalten sich die beiden Theile zu einander, in welche das Dreieck durch diese Parabel zerlegt wird?

Antw. Die Scheitelgleichung der Parabel: $y^2 = \frac{a^2}{2h} x$; das gesuchte Verhältniß: wie 2 zu 1.

Aufgabe 45. Die Schenkel des rechten Winkels ABC sind gegeben: $AB = a$, $BC = b$. Die Punkte A und C sind durch zwei Parabeln verbunden; die erste hat A zum Scheitel und AB zur Axe, die zweite hat C zum Scheitel und CB zur Axe; wie oft und an welchen Stellen schneiden sich diese Parabeln?

Aufl. Für AB als Abscissenlinie und A als Anfangspunkt der Abscissen erhält man die Abscissen der vier Durchschnittspunkte aus der Gleichung:

$$x^4 - 4ax^3 + 4a^2x^2 - a^3x = 0.$$

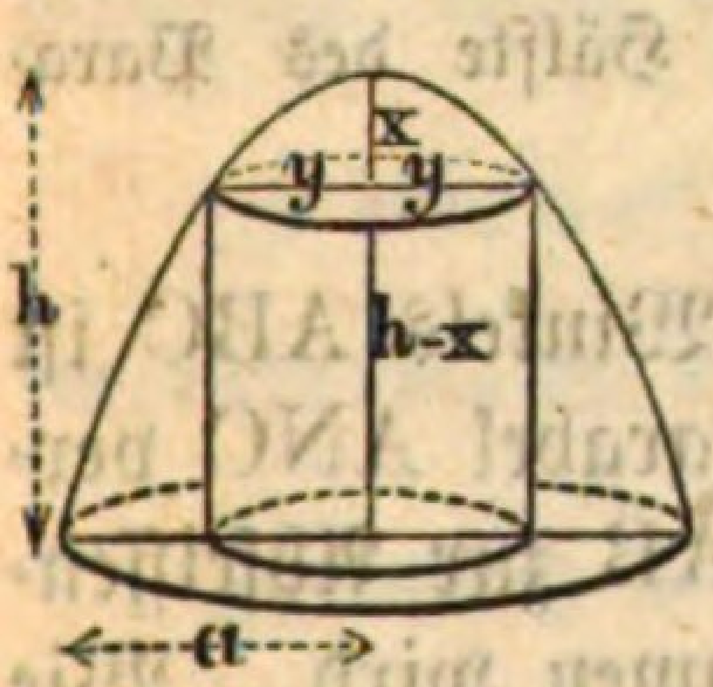
Da zwei Wurzeln dieser Gleichung bekannt sind, so findet man die beiden andern aus einer quadratischen Gleichung. Man erhält:

$$x_1 = 0,\ x_2 = a,\ x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} a,\ x_4 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} a$$

und die zugehörigen Ordinaten:

$$y_1 = 0,\ y_2 = b,\ y_3 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} b,\ y_4 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} b.$$

Aufgabe 46. Die Höhe eines (durch Umdrehung einer Parabel um ihre Axe entstandenen) Paraboloids sei $= h$, der Radius der Grundfläche $= a$; man soll den in dieses Paraboloid eingeschriebenen Cylinder bestimmen, dessen ganze Oberfläche ein Maximum ist.



Aufl. Der Cylinder heißt in das Paraboloid eingeschrieben, wenn die eine seiner Grundflächen in der Grundfläche des Paraboloids, die Peripherie der andern in dem Mantel des Paraboloids liegt. Bei der in der Figur angegebenen Bezeichnung hat man:

1) $2y^2\pi + 2y\pi(h - x) = \text{Max.}$

2) $y^2 = \frac{a^2}{h} x.$

Man erhält die Oberfläche als **rationale** Function von y, wenn man x aus 2) in 1) substituirt:

$$2\pi\left[y^2+hy-\frac{h}{a^2}y^3\right]=\text{Max.}$$

Da der Factor 2π constant ist, so wird die Oberfläche ein Max., wenn der Ausdruck in den Klammern ein Max. ist, und bezeichnen wir diesen Ausdruck mit φy, so ist

$$\varphi y = hy+y^2-\frac{h}{a^2}y^3, \text{ folglich:}$$

$$\varphi' y = h+2y-\frac{3h}{a^2}y^2,$$

$$\varphi'' y = 2-\frac{6h}{a^2}y.$$

Aus $\varphi' y = 0$ folgt

$$y=\frac{a}{3h}\left(a+\sqrt{a^2+3h^2}\right).$$

Für diesen Werth von y wird $\varphi'' y$ negativ, folglich φy ein **Maximum**; der zugehörige Werth von x ist:

$$x=\frac{1}{9h}\left(2a^2+3h^2+2a\sqrt{a^2+3h^2}\right).$$

Determination. Es muß $y<a$ werden; hieraus, oder aus $x<h$, ergiebt sich die Determination $h>a$.

Aufgabe 47. Der Radius der Grundfläche eines Paraboloids sei $=a$, die Höhe $=h$; wie groß ist der Inhalt des in das Paraboloid eingeschriebenen Cylinders, dessen **Mantel** ein **Maximum** ist?

Antw. $\frac{2}{9}a^2\pi h$.

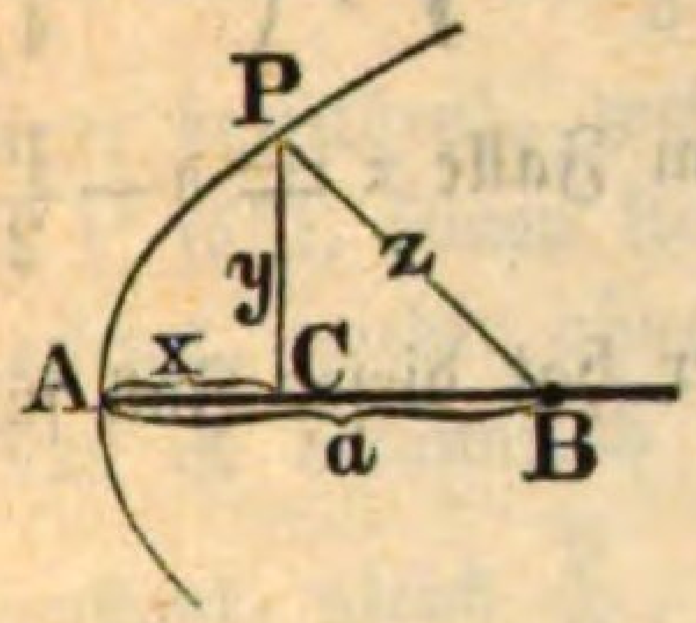
Aufgabe 48. Dieselbe Aufgabe, aber der **Inhalt** des Cylinders soll ein **Maximum** sein.

Aufl. $\frac{1}{4}a^2\pi h$; der größte Cylinder ist also der Hälfte des Paraboloids gleich.

Aufgabe 49. Der Schenkel AB des rechten Winkels ABC ist gleich 4′. Die Punkte A und C sind durch eine Parabel ANC verbunden, deren Gleichung $y=x+x^2$ ist, wenn AB zur Abscissenlinie und A zum Anfangspunkt der Abscissen genommen wird. Wie groß ist der Inhalt der Ebene ABCN, und wie groß ist der Inhalt des Körpers, den diese Ebene bei der Umdrehung um AB beschreibt?

Antw. Der Inhalt der Ebene $=29\frac{1}{3}$ □′ der Inhalt des Körpers $=1112{,}5427$ C′. (§. 315. und §. 310.)

Aufgabe 50. In der Axe einer Parabel ist ein Punkt B gegeben; man soll in der Parabel den Punkt P bestimmen, für welchen die Verbindungslinie BP ein **Maximum** oder **Minimum** ist.



Aufl. Die Entfernung des Punktes B vom Scheitel A sei $= a$, der Parameter der Parabel $= p$; die Coordinaten des Punktes P bezeichnen wir mit x und y, die Linie BP mit z; dann ist

$$(1.)\quad z^2 = y^2 + (a - x)^2,$$

$$(2.)\quad y^2 = px.$$

Setzen wir den Werth von x aus (2.) in (1.) ein, so entsteht:

$$z^2 = a^2 - \frac{2a - p}{p} y^2 + \frac{1}{p^2} y^4.$$

Da z absolut zu nehmen ist, so wird z ein Maximum oder Minimum, wenn z^2 ein solches ist, vorausgesetzt, daß der Werth von z^2 positiv ist. Bezeichnen wir z^2 durch φy, so ist

$$\varphi y = a^2 - \frac{2a - p}{p} y^2 + \frac{1}{p^2} y^4$$

$$\varphi' y = -2 \cdot \frac{2a - p}{p} y + \frac{4}{p^2} y^3$$

$$\varphi'' y = -2 \cdot \frac{2a - p}{p} + \frac{12}{p^2} y^2.$$

Die Gleichung $\varphi' y = 0$ hat die Wurzeln $y = 0$ und $y = \pm\sqrt{p\left(a - \frac{p}{2}\right)}$.

I. $y = 0$; in diesem Falle ist $\varphi'' y = -\frac{4}{p}\left(a - \frac{p}{2}\right)$.

Ist nun $a > \frac{p}{2}$, so ist $\varphi'' y$ negativ, folglich z^2 ein **Maximum**; und weil $z^2 = + a^2$ ist, so ist auch $z = a$ in diesem Falle ein **Maximum**; der zugehörige Werth von x ist: $x = 0$.

Ist aber $a < \frac{p}{2}$, so ist $\varphi'' y$ positiv; folglich ist dann z^2 und auch $z = a$ ein **Minimum**; x hat wieder den Werth 0.

Ist endlich $a = \frac{p}{2}$, so wird auch $\varphi'' y = 0$; daher muß die Untersuchung, ob jetzt ein Maximum oder Minimum Statt findet, auf einem anderen Wege geschehen (weiter unten).

II. $y = \pm\sqrt{p\left(a - \frac{p}{2}\right)}$; dann ist $\varphi'' y = \frac{8}{p}\left(a - \frac{p}{2}\right)$.

Ist nun $a > \frac{p}{2}$, so ist $\varphi'' y$ positiv, folglich z^2 ein Minimum, und weil dann $z^2 = p\left(a - \frac{p}{4}\right)$, also positiv ist, so ist auch $z = \sqrt{p\left(a - \frac{p}{4}\right)}$ ein Minimum; der zugehörige Werth von x ist in diesem Falle $x = a - \frac{p}{2}$.

Ist $a < \frac{p}{2}$, so ist y imaginär und x negativ; daher hat dieser Fall für die vorliegende Aufgabe keine Bedeutung.

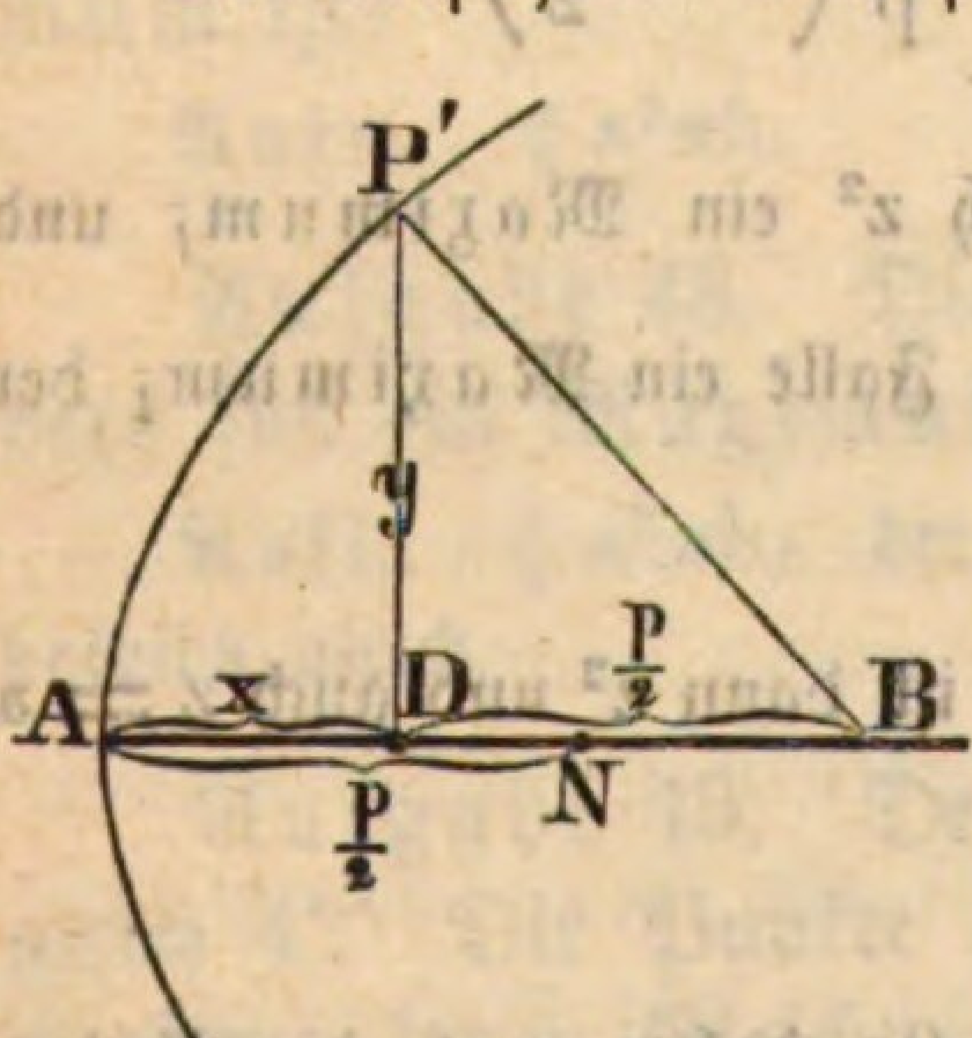
Ist endlich $a = \frac{p}{2}$, so ist $\varphi'' y = 0$, und dieser Fall ist wieder besonders zu untersuchen.

Es bleibt also noch der Fall zu betrachten, wenn $a = \frac{p}{2}$ ist, d. h. wenn die Entfernung des Punktes B vom Scheitel A dem halben Parameter gleich ist. In diesem Falle erhält man aus (1.) und (2.):

$$z^2 = \frac{p^2}{4} + \frac{y^4}{p^2}.$$

Dieser Ausdruck wird für $y = 0$ nicht nur am kleinsten, sondern auch ein Minimum (der Leser beachte, daß der kleinste Werth mit einem Minimum nicht gleichbedeutend ist), weil für ein unendlich kleines positives und negatives y dieser Ausdruck beide Mal größer als $\frac{p^2}{4}$ wird, für $y = 0$ aber gleich $\frac{p^2}{4}$ ist. Im letztern Falle ist $z = \frac{p}{2}$ und $x = 0$. Da z^2 für steigende positive und fallende negative Werthe von y im fortwährenden Steigen bleibt, so findet weiter ein Maximum oder Minimum nicht Statt.

Die vorstehende Untersuchung hat nun zu folgendem Resultat geführt:



Liegt der Punkt N in der Axe und in der Entfernung $\frac{p}{2}$ vom Scheitel A der Parabel, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Liegt der gegebene Punkt B zwischen A und N oder in N, so ist seine Entfernung NA vom Scheitel ein Minimum und die kürzeste Linie, durch welche überhaupt B mit einem Punkte der Parabel verbunden werden kann. Die Verbindungslinie des Punktes B mit einem Punkte P der Parabel wächst fortwährend, je mehr sich P auf beiden Seiten der Axen von A entfernt.

2) Liegt B rechts von N, also in einer Entfernung von A, die größer als $\frac{p}{2}$ ist, so wird BA ein Maximum, und die Verbindungslinie des

Punktes B mit einem Punkte P der Parabel wird zunächst um so kleiner, je mehr sich der Punkt P auf beiden Seiten der Axe von A entfernt. Macht man aber $BD = \frac{p}{2}$ und errichtet in D eine Senkrechte auf die Axe (auf jeder Seite derselben), welche die Parabel in P′ trifft, so erreicht BP, wenn P in P′ fällt, seinen kleinsten Werth und fängt, wenn P sich noch weiter von A entfernt, wieder ohne Aufhören an zu wachsen, d. h. BP′ wird ein Minimum. Nun ist bekanntlich (§. 475.) die Subnormale jedes Punktes der Parabel constant, gleich $\frac{p}{2}$, woraus folgt, daß BD die Subnormale, also BP′ die Normale des Punktes P′ ist. Die Linie BP wird sonach am kleinsten für den Punkt (P′), für welchen sie eine Normale der Parabel ist.

Anmerkung. Der Leser möge noch den Grund aufsuchen, aus welchem in der vorhergehenden Untersuchung BP als Funktion von y, und nicht von x, ausgedrückt worden ist. Betrachtet man BP als Funktion von x, so ist BA im Sinne der Analysis weder ein Maximum noch ein Minimum.

Drittes Kapitel.

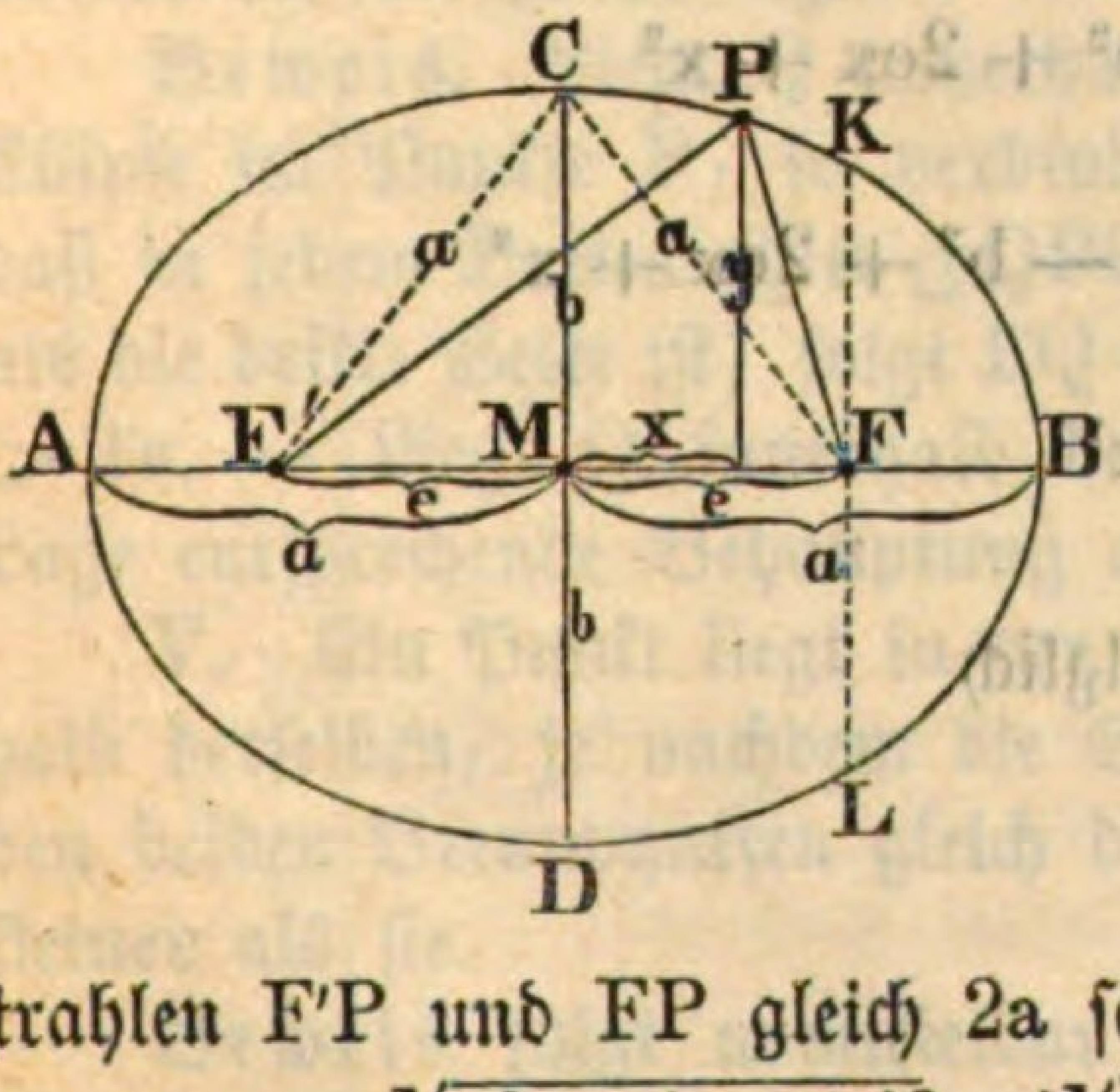
Die Ellipse.

§. 483.

Die Brennpunkte der Ellipse.

I. Von den beiden Brennpunkten der Ellipse ist bekannt, daß sie in der großen Axe liegen und vom Mittelpunkt der Ellipse gleich weit entfernt sind, so wie, daß die Summe conjugirter Brennstrahlen constant, gleich der großen Axe ist (§. 457. II. und §. 464.).

Es sei M der Mittelpunkt der Ellipse, ihre große Axe $AB = 2a$,



ihre kleine $CD = 2b$; F und F′ sind die Brennpunkte, und jede der gleichen Entfernungen MF und MF′ bezeichnen wir mit e. Ist P ein beliebiger Punkt der Ellipse und sind x und y seine Coordinaten für die große Axe als Abscissenlinie und M als Anfangspunkt der Abscissen, so folgt aus der Bedingung, daß die Summe der conjugirten Brennstrahlen F′P und FP gleich 2a sein muß:

$$\sqrt{y^2 + (e + x)^2} + \sqrt{y^2 + (e - x)^2} = 2a.$$

Aus dieser Gleichung kann man mit Hinzuziehung der Mittelpunktsgleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ oder } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

e entwickeln; weil aber die oben angegebene Bedingung für jeden Punkt der Ellipse richtig ist, also auch für den Punkt C, und weil für diesen Punkt die conjugirten Brennstrahlen einander gleich sind, also jeder $= a$ sein muß, so kann man e bequemer aus dem rechtwinkligen Dreieck CMF entnehmen und erhält:

$$(1.)\quad e^2 = a^2 - b^2.$$

Die Entfernung jedes Brennpunktes vom Mittelpunkt heißt die Excentricität der Ellipse; daher ist

$$(2.)\quad \text{die Excentricität} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Die Construction der Brennpunkte ergiebt sich aus dem gleichschenkligen Dreieck CF′F; schlägt man um C mit der halben großen Axe einen Kreis, so sind die Durchschnittspunkte desselben mit der großen Axe die Brennpunkte. — Je näher die Brennpunkte dem Mittelpunkte der Ellipse liegen, desto mehr nähert sich die Ellipse in ihrer Form dem Kreise.

II. Auch bei der Ellipse, wie bei der Parabel, ist jeder Brennstrahl nach einem beliebigen Punkte P der Ellipse eine rationale Function der Abscisse x des Punktes P. Es ist

$$F'P^2 = y^2 + (e + x)^2$$
$$FP^2 = y^2 + (e - x)^2.$$

Jeder dieser Brennstrahlen geht in den andern über, wenn man $-x$ statt x setzt; es genügt daher die Reduction des einen. Man erhält:

$$F'P^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + e^2 + 2ex + x^2$$
$$= b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + a^2 - b^2 + 2ex + x^2$$
$$= a^2 + 2ex + \frac{e^2}{a^2}x^2$$
$$= \left(a + \frac{e}{a}x\right)^2; \text{ folglich}$$

$$F'P = a + \frac{e}{a}x \text{ und}$$

$$FP = a - \frac{e}{a}x.$$

Auch hieraus erkennt man, daß $F'P + FP = 2a$ ist. — Daß FP nicht gleich $\frac{e}{a}x - a$ ist, folgt so: $x < a$, daher, weil $\frac{e}{a}$ ein ächter Bruch ist, um so mehr $\frac{e}{a}x < a$, also $\frac{e}{a}x - a$ negativ.

III. Aus der Gleichung $FP = a - \frac{e}{a}x$ (oder aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse) erhält man den Brennstrahl FK, welcher auf der großen Axe senkrecht steht, wenn man $x = e$ setzt. Seine absolute Länge ist also $FK = a - \frac{e^2}{a} = \frac{b^2}{a}$, und verlängert man FK über F, bis die Verlängerung in L die Ellipse trifft, so ist die ganze Länge

$$KL = \frac{2b^2}{a},$$

d. h. die Sehne der Ellipse, welche durch einen Brennpunkt geht und auf der großen Axe senkrecht steht, ist der Parameter der Ellipse. Ist also die Gleichung einer Ellipse in der Form $y^2 = px - qx^2$ gegeben oder auf diese Form gebracht, und ist q ein ächter Bruch (§. 459. Anmerk. 1.), so ist die Sehne, welche auf der großen Axe senkrecht steht und durch einen Brennpunkt geht, gleich p. Ist aber q größer als 1, in welchem Falle $y^2 = px - qx^2$ die Scheitelgleichung für die kleine Axe, also p nicht der Parameter ist, so ergiebt sich leicht aus §. 464. (5.), daß die Sehne $= \frac{p}{q\sqrt{q}}$ ist.

IV. Liegt ein Punkt Q außerhalb der Ellipse, so ist die Summe seiner Verbindungslinien mit den beiden Brennpunkten größer als die große Axe; liegt er aber innerhalb der Ellipse, so ist diese Summe kleiner als die große Axe.

Beweis. Liegt Q außerhalb der Ellipse, und schneidet FQ die Ellipse im Punkte P, so verbinde man P mit F'. Aus dem Satze, daß in jedem Dreieck (hier $\Delta QPF'$) die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite ist, folgt $FQ + F'Q > FP + F'P$ oder $FQ + F'Q > 2a$. — Liegt Q innerhalb der Ellipse, so ergiebt sich die solcher Lage entsprechende Behauptung aus demselben Satze.

V. Ein Punkt liegt in der Ellipse, oder außerhalb, oder innerhalb derselben, je nachdem die Summe seiner Verbindungslinien mit den beiden Brennpunkten gleich der großen Axe ist, oder größer, oder kleiner als sie.

Beweis folgt unmittelbar aus IV. und dem hervorgehobenen Satz in I.

§. 484.
Construction der Ellipse.

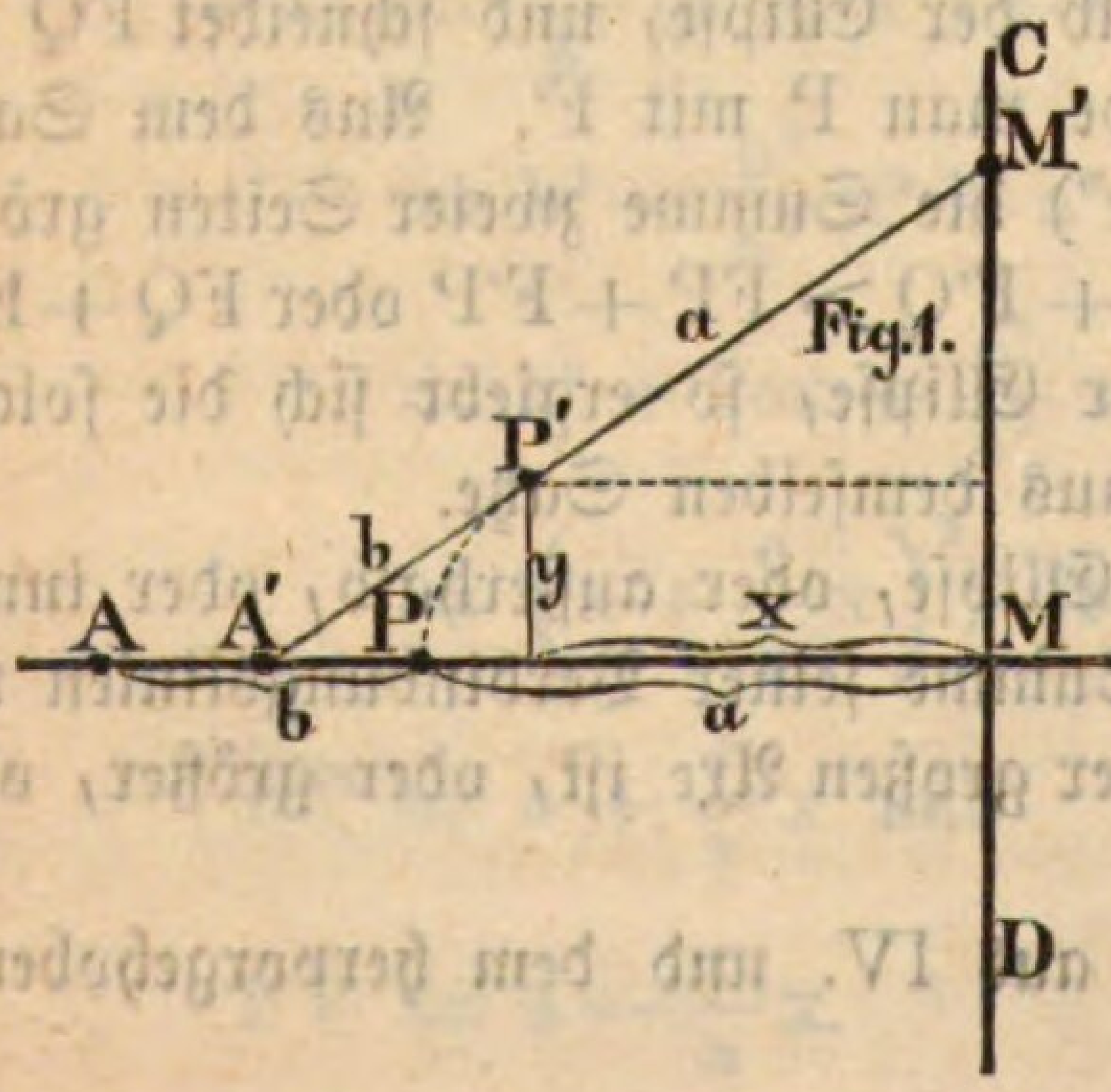
Um eine Ellipse durch stetige Bewegung zu erzeugen, kann man zunächst das Gesetz (Figur in §. 483.) $F'P + FP = 2a$ in Verbindung mit §. 483. V. benutzen.

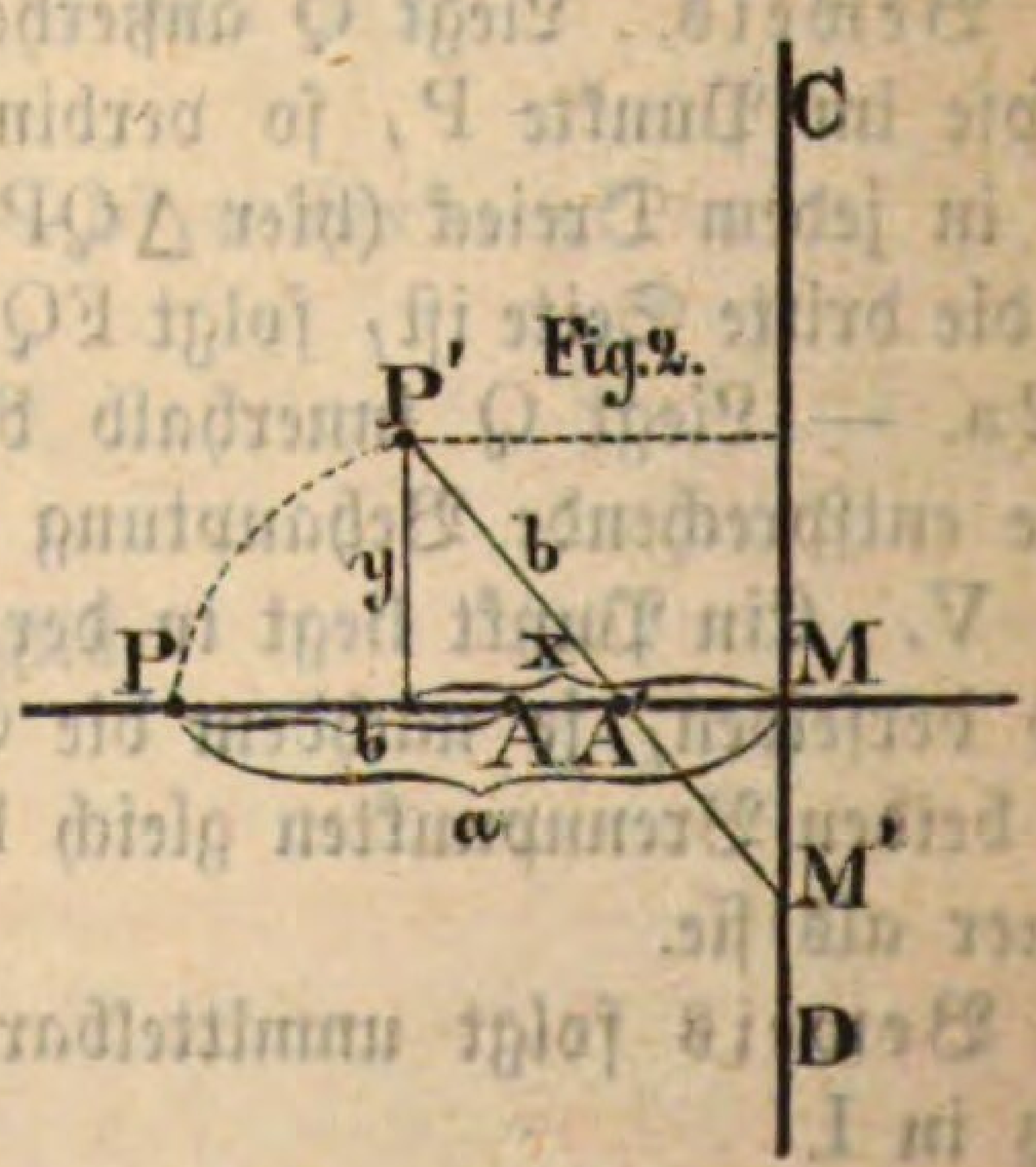
Man befestigt die Endpunkte eines Fadens von der Länge 2a in den beiden Brennpunkten und beschreibt nun die Ellipse, indem man mit einem Bleistift in den Faden eingreift und, ihn anspannend, die Spitze des Bleistiftes auf dem Papiere herumführt. Man kann aber auf diese Weise nur die halbe Ellipse in einem Zuge zeichnen; um die ganze Ellipse in einer Bewegung zu erzeugen, nehme man einen sogenannten Faden ohne Ende von der Länge $2a + 2e$ (d. h. $2a + FF'$) und schlinge ihn um zwei Stifte, die in den Brennpunkten befestigt sind, greife mit dem Bleistift in den Faden ein und bewege, ihn anspannend, die Spitze des Bleistiftes auf dem Papiere herum.

Eine andere Construction der Ellipse, die sehr bequem ist und im praktischen Zeichnen häufig angewandt wird, hat folgenden Satz zur Grundlage:

> **Wird eine gerade Linie MA so bewegt, daß der eine Endpunkt M immer in einer von zwei sich senkrecht schneidenden Linien bleibt, der andere Endpunkt A immer in der anderen, so beschreibt, mit Ausnahme der Endpunkte M und A, jeder Punkt der Linie MA (auch wenn er in ihrer Verlängerung liegt) eine Ellipse, deren Axen in jene zwei Linien fallen.**

Will man nun eine Ellipse mit den Axen 2a und 2b erzeugen, so theilt man MA entweder in zwei innere Abschnitte a und b (Fig. 1.), so daß die Linie MA die Länge $a + b$ erhalten muß, oder in zwei äußere a und b (Fig. 2.), so daß die Linie MA die Länge $a - b$





erhält ($a > b$ angenommen). Ist P der Theilpunkt, so beschreibt P beide Mal die verlangte Ellipse. — Bei der praktischen Anwendung wird die gerade Linie, durch deren Bewegung die Ellipse erzeugt werden soll, durch die Kante eines scharf gefalzten Papierstreifens vertreten, in welcher die Punkte M, A und P markirt sind.

Beweis. Man denke sich MA zuerst in der Lage, daß M in dem Durchschnittspunkt der beiden Linien liegt, in welcher sich die Endpunkte von MA bewegen sollen; die Figur zeigt diese Lage. Denkt man sich nun MA so bewegt, daß M immer in CD bleibt, A aber in der Linie, welche auf CD in M senkrecht steht, so nimmt MA während der Bewegung auch einmal die Lage M'A' an. Fällt dann P in P', so soll bewiesen werden, daß die Linie PP', welche der Punkt P beschrieben hat, ein Theil einer Ellipse ist. Nimmt man M zum Anfangspunkt der Abscissen und die Richtung MA zur Abscissenlinie, bezeichnet die Coordinaten von P' mit x und y, so folgt, wenn man durch P' eine mit AM parallele Linie legt, aus ähnlichen Dreiecken:

$$\sqrt{b^2 - y^2} : b = x : a, \text{ also}$$

$$b^2 - y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Diese Gleichung ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse; daher beschreibt P eine Ellipse mit den Axen a und b, M ist ihr Mittelpunkt und P der eine Endpunkt der großen Axe; die kleine Axe fällt in CD.

Anmerkung. In der vorstehenden Construction der Ellipse liegt auch die Auflösung folgender Aufgabe, welche für das praktische Zeichen von Wichtigkeit ist:

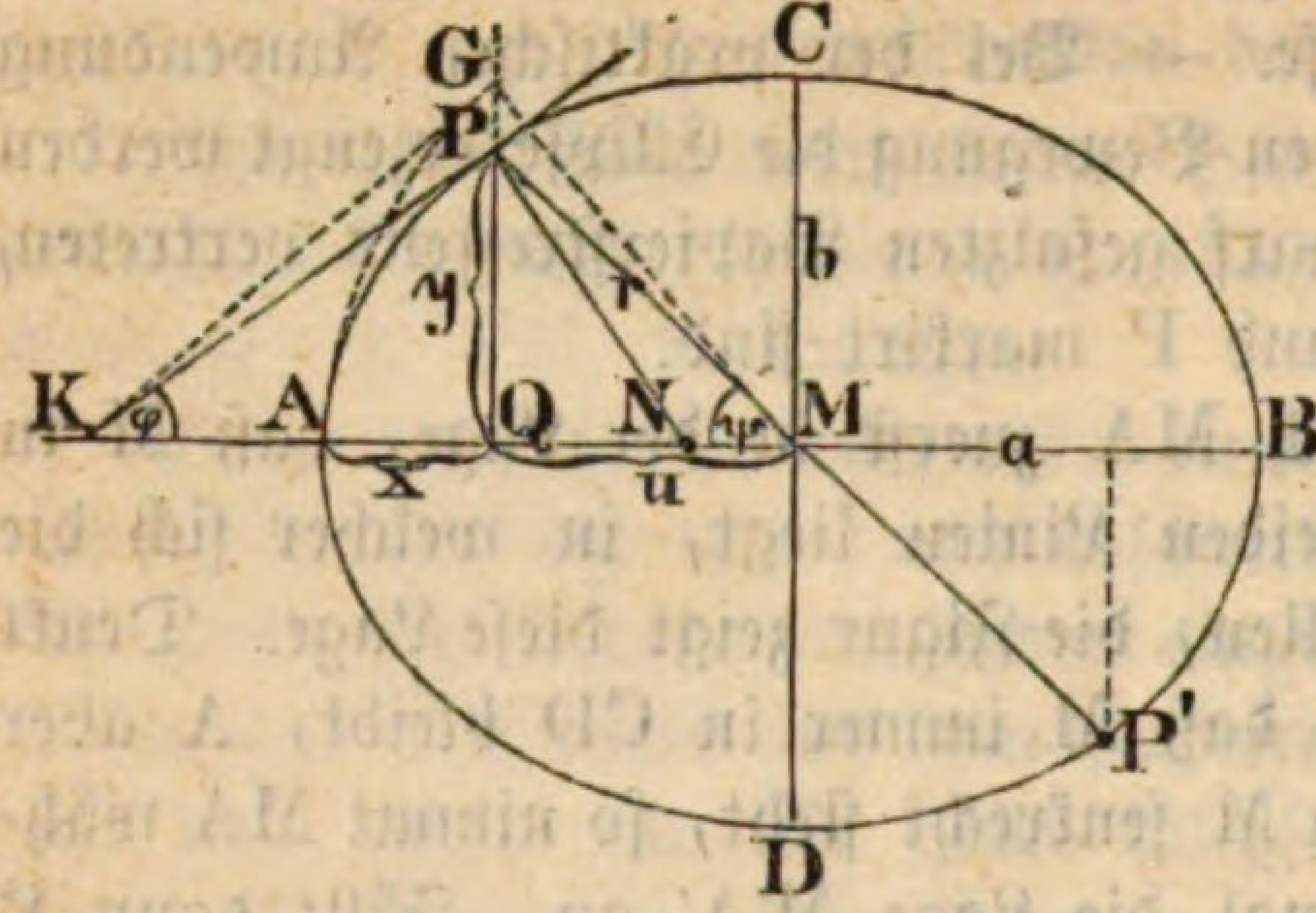
Es sind die Richtungen der beiden Axen einer Ellipse gegeben, die Länge der einen Axe und ein Punkt der Ellipse (aber nicht ein Endpunkt der gegebenen Axe); man soll die Länge der unbekannten Axe durch Construction finden.

Aufl. Ist P' der gegebene Punkt der Ellipse (die vorstehende Figur), und ist etwa die Axe 2a gegeben, so schlage man mit a um P' einen Kreis, welcher die Richtung der nicht gegebenen Axe 2b in M' schneiden mag. Zieht man dann P'M', und schneidet diese Linie (nöthigenfalls verlängert) die Richtung der gegebenen Axe in A', so ist P'A' die unbekannte halbe Axe b.

§. 485.

Lage der Tangente für einen beliebigen Punkt der Ellipse. Die Subtangente und Subnormale.

Es sei P ein beliebiger Punkt der Ellipse, x und y seine Coordinaten für die große Axe AB als Abscissenlinie und A als



Anfangspunkt der Abscissen, so daß $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ ist; ferner sei PK die Tangente, PN die Normale der Ellipse für den Punkt P. Nach §. 472. (2.) ist, wenn die Tangente mit der Axe den Winkel φ bildet:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p + 2qx}{2y}.$$

Bei der Ellipse ist $p = \frac{2b^2}{a}$ und $q = -\frac{b^2}{a^2}$, folglich

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2ab^2 - 2b^2x}{2a^2y}.$$

Hieraus folgt, wenn man noch $a - x$ mit u bezeichnet, so daß u die Mittelpunkts-Abscisse des Punktes P ist, für die Richtung nach links als die positive:

$$(1.) \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a-x}{y} = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{u}{y}.$$

Aus $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{u}{y}$ kann leicht beurtheilt werden, welche Tangenten der Ellipse parallel sind. Durch die beiden Axen wird die Ellipse in vier Bogen zerlegt. Zunächst sind die Tangenten durch A und B parallel, denn sie stehen auf AB senkrecht ($\operatorname{tg}\varphi = \infty$); dann sind die Tangenten durch C und D parallel, denn sie sind mit AB parallel ($\operatorname{tg}\varphi = 0$), stehen also auf CD senkrecht. Untersuchen wir nun die Tangenten der übrigen Punkte, so finden wir zunächst, daß alle Tangenten mit der großen Axe spitze Winkel bilden, wenn der Berührungspunkt P in AC oder BD liegt ($\operatorname{tg}\varphi$ posit.), hingegen stumpfe, wenn P in CB oder DA liegt ($\operatorname{tg}\varphi$ negat.). Hieraus folgt, daß eine Tangente des Bogens AC nur mit einer Tangente des Bogens BD, und eine Tangente des Bogens CB nur mit einer Tangente des Bogens DA parallel sein kann, und zwar nur mit einer; denn zwei Tangenten an demselben der vier Bogen können nie mit einander parallel sein, weil der Quotient $\frac{u}{y}$ für verschiedene Punkte desselben Bogens immer ein anderer ist. Der Grund liegt darin, daß die absoluten Werthe von u und y in demselben Quadranten nie gleichzeitig steigen oder fallen, daß vielmehr y wächst, wenn u fällt, und umgekehrt.

Um aber zu jeder Tangente die ihr parallele zu finden, mag P' ein zweiter Punkt der Ellipse sein, den Coordinaten u_1 und y_1 angehörig. Die Tangenten durch P und P' sind dann parallel, wenn

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{u}{y} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{u_1}{y_1} \text{ ist, oder:}$$

$$u^2 : y^2 = u_1^2 : y_1^2, \text{ also auch}$$

$$u^2 : \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^2) = u_1^2 : \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u_1^2), \text{ woraus}$$

$$u^2 = u_1^2$$

folgt. Diese Gleichung ist richtig, wenn etweder $u = u_1$ ist, oder $u = -u_1$. Im ersten Falle müssen auch y und y_1 einander gleich sein (also auch gleiche Vorzeichen haben), und P' fällt mit P zusammen; im zweiten Falle müssen y und y_1 dem absoluten Werthe nach gleich sein, aber ungleiche Vorzeichen haben (für beide Tangenten muß φ spitz, oder für beide stumpf sein), so daß z. B., wenn u und y positiv sind (wie in der Figur), dann u_1 und y_1 negativ sein müssen. In dem zweiten Falle liegen P und P' so einander gegenüber, daß **die Sehne PP' durch den Mittelpunkt M der Ellipse geht** (congruente Dreiecke). Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

Geht eine Sehne der Ellipse durch ihren Mittelpunkt, so sind die Tangenten, welche man durch die Endpunkte der Sehne an die Ellipse legen kann, einander parallel.

Sind zwei Tangenten einer Ellipse parallel, so geht die Sehne, welche die Berührungspunkte verbindet, durch den Mittelpunkt der Ellipse.

Die **Subtangente** KQ ist $= y \cdot \operatorname{cotg} \varphi = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{u}$, woraus folgt:

(2.) **Die Subtangente** $= \frac{a^2 - u^2}{u} = \frac{2ax - x^2}{a - x}$.

Die **Subnormale** QN ist $= y \cdot \operatorname{tg} \varphi$; folglich

(3.) **Die Subnormale** $= \frac{b^2}{a^2}(a - x) = \frac{b^2}{a^2} u$.

Die Länge AK ergiebt sich aus der Subtangente:

$$AK = \frac{a^2 - u^2}{u} - (a - u) = \frac{a^2 - au}{u}; \text{ daher:}$$

(4.) $AK = \frac{ax}{u}$.

Hieraus folgt zunächst, daß K und P immer auf derselben Seite der

kleinen Axe liegen; es ergiebt sich aber aus (4.) auch eine sehr einfache Construction des Punktes K. Es folgt aus (4.):

$$AK : a = x : u, \text{ folglich}$$
$$AK + a : a = x + u : u \text{ oder}$$
$$MK : a = a : u,$$

d. h. a ist mittlere geometrische Proportionale zwischen u und MK. Schlägt man daher um M mit MA einen Kreis, welcher die verlängerte Ordinate y in G schneidet, und errichtet in G eine Senkrechte auf MG, so ist K der Durchschnittspunkt dieser Senkrechten mit der Richtung der großen Axe. Zieht man KP, so hat man die Tangente für den Punkt P construirt.

Um noch den Punkt N zu finden, in welchem die Normale die große Axe schneidet, hat man MN = u — QN, folglich aus (3.)

$$(5.)\qquad MN = u - \frac{b^2}{a^2}u = \frac{e^2}{a^2}u,$$

wenn e die Excentricität der Ellipse ist. Der Ausdruck $\frac{e^2}{a^2}u$ ist positiv oder negativ, je nachdem u positiv oder negativ ist, sein absoluter Werth ist aber kleiner als e; denn es ist, alle Werthe absolut genommen:

$$e.u < a.a, \text{ folglich } \frac{eu}{a^2} < 1, \text{ folglich } \frac{e^2}{a^2}u < e.$$

Hieraus folgt, daß die Normale jedes Punktes P der Ellipse die große Axe immer zwischen dem Mittelpunkte der Ellipse und dem Brennpunkt schneidet, welcher mit P auf derselben Seite der kleinen Axe liegt. Der Mittelpunkt und der Brennpunkt sind für die Lage des Durchschnittspunktes die Grenzen; durch sie geht die Normale, wenn P in einem Scheitel resp. der kleinen oder großen Axe liegt.

Anmerkung. Die Gleichung der Tangente für irgend einen Punkt P der Ellipse läßt sich auf folgende Weise entwickeln. Nehmen wir den Mittelpunkt der Ellipse zum Anfangspunkt der Abscissen, die große Axe zur Abscissenlinie und die Richtung nach rechts als die positive, und hat P die gegebenen Coordinaten x_1 und y_1, so ist

$$(1.)\qquad \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2} = 1.$$

Da die Tangente durch P gehen soll, so hat ihre Gleichung die Form:

$$(2.)\qquad y - y_1 = p(x - x_1)$$

und p bedeutet in dieser Gleichung die Tangente des Winkels φ, welchen die gerade Linie mit der X-Axe bildet. Nun war aber $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{u}{y}$, und setzen wir y_1 statt y und $-x$ statt u, so folgt:

$$(3.)\quad p = -\frac{b^2}{a^2}.\frac{x_1}{y_1}.$$

Wird dieser Werth aber in (2.) substituirt, so folgt die Gleichung der Tangente:

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \text{ oder}$$

$$a^2y_1y - a^2y_1^2 = -b^2x_1x + b^2x_1^2 \text{ oder}$$

$$a^2y_1y + b^2x_1x = a^2y_1^2 + b^2x_1^2.$$

Dividirt man durch a^2b^2, so entsteht:

$$\frac{y_1 \cdot y}{b^2} + \frac{x_1 \cdot x}{a^2} = \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2};$$

daher folgt aus (1.) die Gleichung der Tangente für den Punkt P:

$$(4.)\quad \frac{y_1 \cdot y}{b^2} + \frac{x_1 \cdot x}{a^2} = 1.$$

Vergl. §. 436.

§. 486.

Zusatz.

Verbindet man P (Fig. im vor. §.) mit dem Mittelpunkte M der Ellipse und bezeichnet den Winkel, welchen MP mit MA bildet, durch ψ, so sind ψ und φ von einander abhängig, und zwar erhält man unmittelbar aus §. 485. (1.):

$$(1.)\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{cotg}\psi.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $a^2\sin\psi\,.\cos\varphi$, so entsteht:

$$(2.)\quad a^2\sin\varphi\,.\sin\psi = b^2\,.\cos\varphi\,.\cos\psi.$$

Auch die Länge der Linie MP ist von ψ (also auch von φ) abhängig. Bezeichnet man MP mit r, so kann man r durch ψ mit Hülfe der Mittelpunktsgleichung der Ellipse ausdrücken. Es ist

$$(r\sin\psi)^2 = \frac{b^2}{a^2}[a^2 - (r\cos\psi)^2], \text{ daher}$$

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2.\sin\psi^2 + b^2.\cos\psi^2}.$$

Hieraus folgt aber:

$$(3.)\quad r = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin\psi^2 + b^2\cos\psi^2}}$$

und auch:

$$(4.)\quad a^2\sin\psi^2 + b^2\cos\psi^2 = \frac{a^2b^2}{r^2}.$$

Giebt man dem Ausdrucke für r in (3.) die Form:

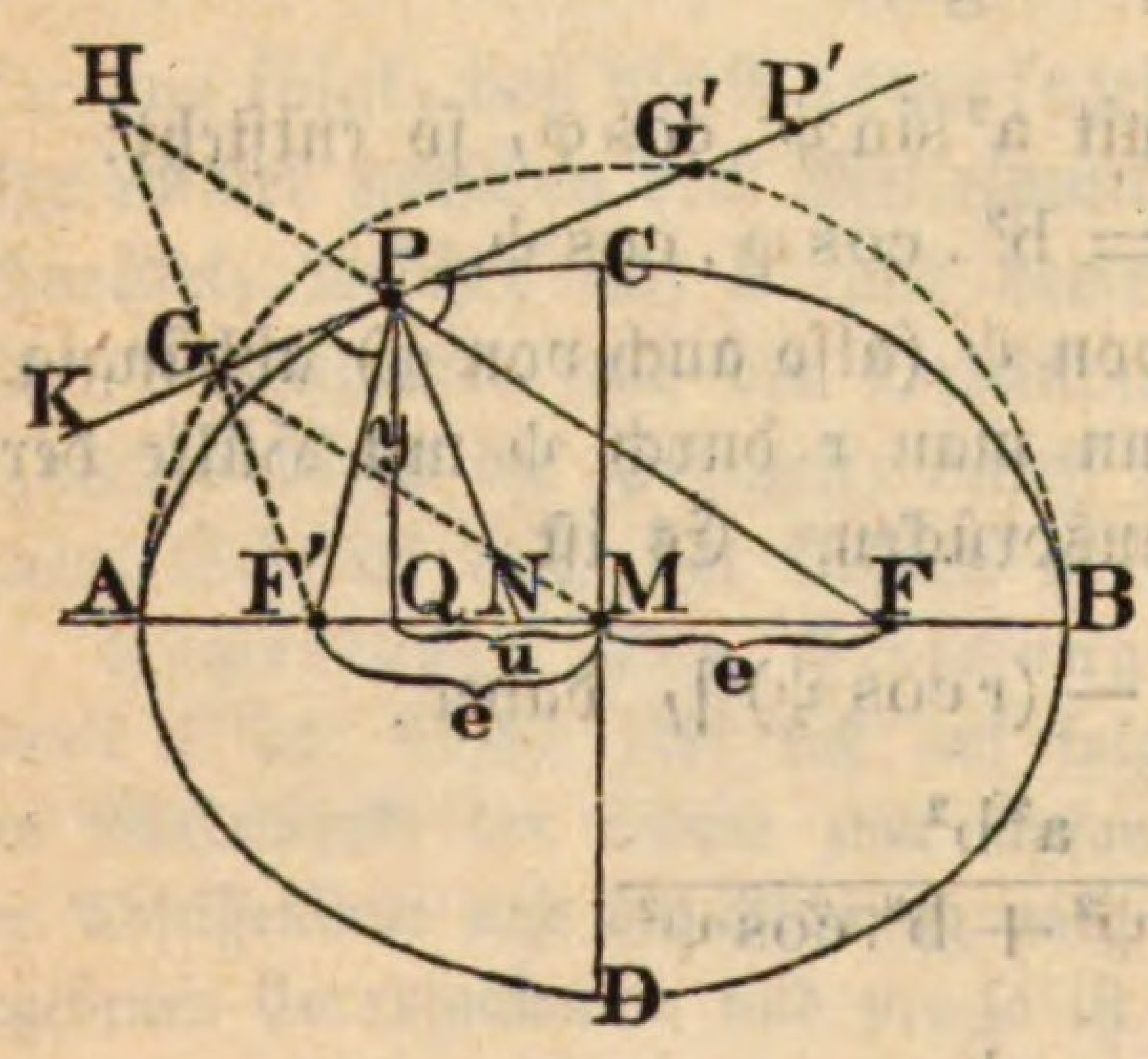
$$r = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 - b^2)\,.\sin\psi^2 + b^2}},$$

so erkennt man, daß der Nenner am kleinsten ist, also r am größten, für $\psi = 0$ oder 180° (der zugehörige Werth von r ist a), und daß der Nenner am größten ist, also r am kleinsten, für $\psi = 90^\circ$ oder 270° (der zugehörige Werth von r ist b). Hiernach ist also von allen Linien, welche den Mittelpunkt mit einem Punkte der Ellipse verbinden, die halbe große Axe die größte, die halbe kleine Axe die kleinste. Beschreibt man also mit a einen Kreis um M, so umschließt seine Peripherie die Ellipse; schlägt man aber den Kreis mit dem Radius b, so umschließt die Ellipse den Kreis. Da ferner jede durch den Mittelpunkt gelegte Sehne der Ellipse im Mittelpunkt halbirt wird (es folgt dies auch aus (3.) oder aus Congruenz der elliptischen Quadranten), so ist von allen Sehnen, welche durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen, die große Axe die größte, die kleine Axe die kleinste. Die große Axe ist überhaupt größer als jede andere Sehne; man erkennt dies leicht, wenn man die Endpunkte der Sehne mit dem Mittelpunkt der Ellipse verbindet.

§. 487.

Gesetze. Construction der Tangenten.

I. Conjugirte Brennstrahlen, nach einem beliebigen Punkt P der Ellipse, bilden mit der Tangente des Punktes P, daher auch mit der Normale, gleiche Winkel.



Beweis. KP' sei die Tangente, welche die Ellipse in P berührt, PN sei die Normale, so daß PN ⊥ KP' steht. Bilden nun die Brennstrahlen FP und F'P mit der Normale PN gleiche Winkel, so bilden sie auch gleiche Winkel mit der Tangente. Sind u und y die Coordinaten des Punktes P für MA als Abscissenlinie und M als Anfangspunkt der Abscissen, so ist QN die Subnormale, und zwar ist nach §. 485. (3.) $QN = \frac{b^2}{a^2}u$; folglich verhält sich:

$$F'N : FN = e - u + \frac{b^2}{a^2}u : e + u - \frac{b^2}{a^2}u$$

$$= e - \frac{a^2 - b^2}{a^2}u : e + \frac{a^2 - b^2}{a^2}u$$

$$= e - \frac{e^2}{a^2} u : e + \frac{e^2}{a^2} u$$

$$= a - \frac{e}{a} u : a + \frac{e}{a} u.$$

Nun ist aber nach §. 483. II. (wenn man dort $-u$ statt x setzt) $F'P = a - \frac{e}{a} u$ und $FP = a + \frac{e}{a} u$; folglich verhält sich:

$$F'N : FN = F'P : FP.$$

Es halbirt also PN den Winkel F'PF nach §. 72. 3), d. h. die Brennstrahlen bilden mit der Normale gleiche Winkel, also auch mit der Tangente, oder es ist

$$\measuredangle F'PK = \measuredangle FPP'.$$

Betrachtet man die Ellipse als eine physische, Lichtstrahlen zurückwerfende Linie, so werden alle Strahlen, welche von dem einen Brennpunkt ausgehend die Ellipse treffen, von ihr so zurückgeworfen, daß sie sich in dem andern Brennpunkte sammeln; daher die Bezeichnung **Brennpunkte**.

II. Fällt man von einem Brennpunkt der Ellipse Perpendikel auf beliebig viele Tangenten der Ellipse, so liegen die Fußpunkte aller dieser Perpendikel in der Peripherie des Kreises, den man mit der halben großen Axe um den Mittelpunkt M der Ellipse schlagen kann.

Beweis. Verlängert man den Brennstrahl FP über P, macht die Verlängerung $PH = PF'$ und zieht F'H, so ist $\Delta PF'H$ gleichschenklig und die Tangente PK halbirt den Winkel an der Spitze ($\measuredangle F'PK = \measuredangle FPP' = \measuredangle HPK$). Hieraus folgt, daß F'G auf der Tangente PK senkrecht steht, und es bleibt sonach zu beweisen, daß der Fußpunkt G der Senkrechten von M den Abstand a hat. Weil aber die Linie MG im $\Delta F'FH$ die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Seiten ist, so ist sie der halben dritten Seite gleich; diese dritte Seite FH ist aber als Summe conjugirter Brennstrahlen $= 2a$, folglich ist $MG = a$. (Die von F auf die Tangente gefällte Senkrechte trifft den Punkt G'.)

III. **Construction der Tangenten.** Um durch einen gegebenen Punkt P eine Tangente an die Ellipse zu legen, unterscheiden wir zwei Fälle:

1) **P liegt in der Ellipse.** Man ziehe die conjugirten Brennstrahlen nach P, verlängere den einen (z. B. FP) über P hinaus und halbire den Winkel HPF', welchen die Verlängerung mit dem andern Brennstrahl PF' bildet; die Halbirungslinie ist die gesuchte Tangente.

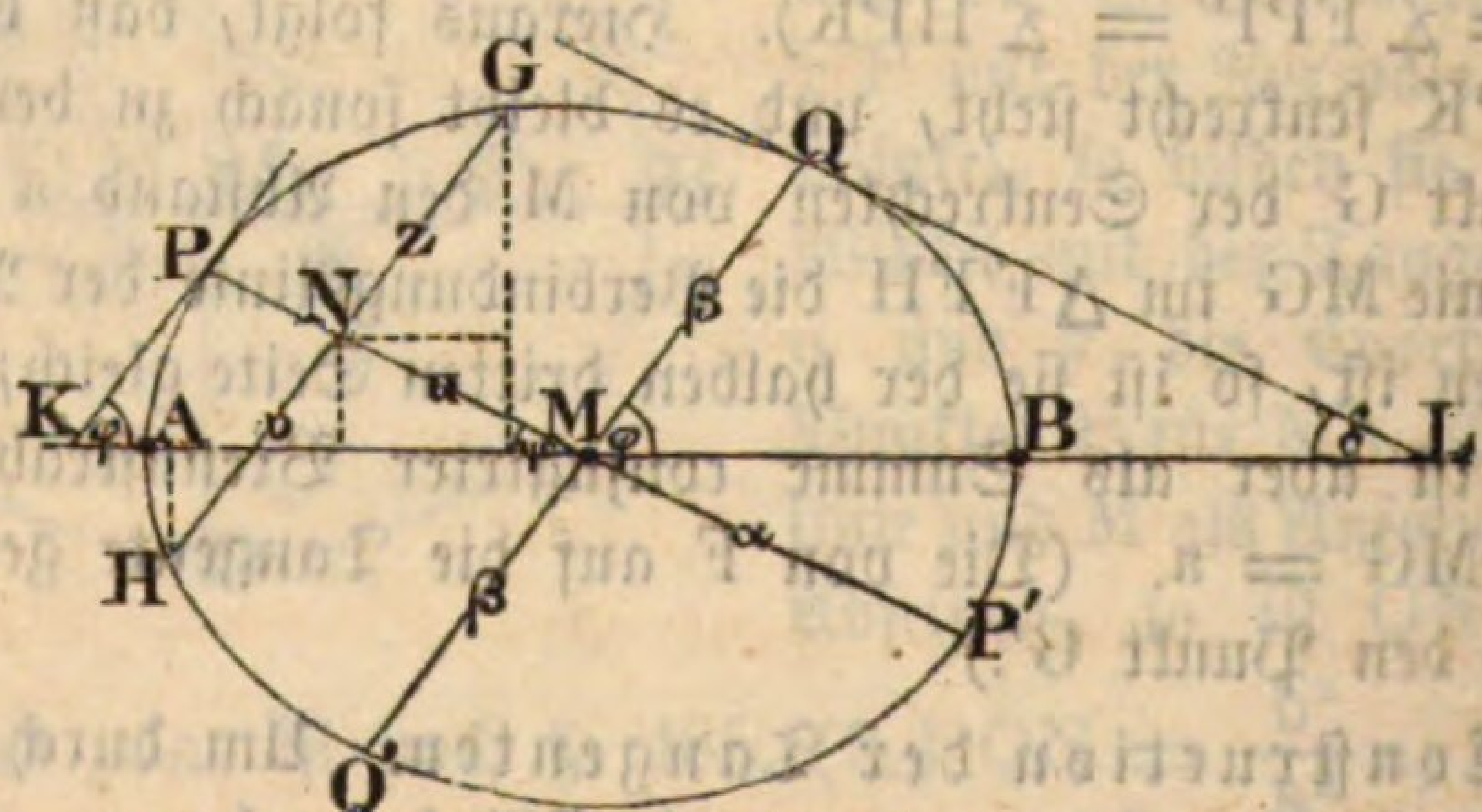
2) P liegt außerhalb der Ellipse (in der Figur P'). Es kommt darauf an, einen zweiten Punkt der Tangente zu finden; ein solcher ist aber der Fußpunkt G, in welchem die vom Brennpunkt F' auf die Tangente gefällte Senkrechte sie trifft. Für G hat man zwei geometrische Oerter: die Peripherie des Kreises um M mit dem Radius a und die Peripherie des Kreises, der P'F' zum Durchmesser hat. Da diese Kreise sich zweimal schneiden, so erhält man zwei Punkte für G, also auch zwei Tangenten. (Statt G und F' kann man auch G' und F zur Analysis und Construction benutzen.) — Will man den Berührungspunkt P unmittelbar construiren, so beachte man, daß H und F' von P' gleich weit entfernt sind, und daß H von F den Abstand 2a hat. Schlägt man also um P' mit P'F' und um F mit 2a einen Kreis, und schneiden sich beide Kreise in H, so verbinde man H mit F; diese Linie schneidet die Ellipse in dem gesuchten Berührungspunkte P. Da es zwei Durchschnittspunkte (H) giebt, so ergeben sich auch wieder zwei Tangenten.

§. 488.

Die Durchmesser der Ellipse.

I. Jede Sehne PP' der Ellipse, welche durch den Mittelpunkt geht, ist ein Durchmesser der Ellipse (§. 477. I.); denn sie halbirt alle Sehnen der Ellipse, welche mit den Tangenten parallel sind, die man durch ihre Endpunkte P und P' legen kann.

Beweis. AB sei die große Axe der Ellipse, PP' eine Sehne, die durch den Mittelpunkt M geht; PK sei die Tangente für den



Punkt P und bilde mit der großen Axe den Winkel φ. Zieht man nun durch einen beliebigen Punkt N der Sehne PP' eine mit PK parallele Sehne GH, bezeichnet NG mit z, NH mit v, so wird behauptet, daß $z = v$ ist. N habe von M den Abstand u, den Winkel PMK bezeichnen wir mit ψ.

Der Mittelpunktsgleichung der Ellipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ kann man die Form geben:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

und bildet man diese Gleichung für die Punkte G und H, so entsteht:

1) $a^2(z \sin\varphi + u \sin\psi)^2 + b^2(u\cos\psi - z\cos\varphi)^2 = a^2b^2$

2) $a^2(v \sin\varphi - u \sin\psi)^2 + b^2(u\cos\psi + v\cos\varphi)^2 = a^2b^2$.

Zieht man diese Gleichungen von einander ab, so folgt:

$$a^2[(z^2 - v^2)\sin\varphi^2 + 2u(z+v)\sin\varphi\sin\psi] + b^2[(z^2 - v^2)\cos\varphi^2 - 2u(z+v)\cos\varphi\cos\psi] = 0.$$

Hebt man durch $z + v$, so entsteht:

$$(z - v).(a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2) + 2u(a^2\sin\varphi\sin\psi - b^2\cos\varphi\cos\psi) = 0.$$

Nach §. 486. (2.) ist aber $a^2\sin\varphi\sin\psi = b^2\cos\varphi\cos\psi$, folglich

$$(z - v).(a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2) = 0, \text{ woraus folgt:}$$

$$z = v.$$

II. Zieht man den Durchmesser QQ' parallel mit den Tangenten, welche durch die Endpunkte des Durchmessers PP' gehen, so ist auch umgekehrt PP' mit den Tangenten parallel, welche durch die Endpunkte des Durchmessers QQ' gelegt werden können. Denn ist QL die Tangente für den Punkt Q, und bezeichnet δ den Winkel QLM, so ist nach §. 486. (1.)

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{cotg}\varphi \text{ und}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{cotg}\psi.$$

Weil man aber der ersten Gleichung auch die Form

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{cotg}\delta$$

geben kann, so folgt $\psi = \delta$, also PP' ∦ QL.

Man nennt zwei Durchmesser, von denen jeder mit den Tangenten parallel ist, die man durch die Endpunkte des andern legen kann, **conjugirte Durchmesser**; daher sind PP' und QQ' conjugirte Durchmesser.

III. Nimmt man die conjugirten Durchmesser PP' und QQ' als schiefwinklige Coordinatenaxen, so kann man die Gleichung der Ellipse für dieses Coordinaten-System (also für M als Anfangspunkt der Abscissen) aus der Gleichung I. 1) unmittelbar finden. Löst man in dieser Gleichung

$$a^2(z\sin\varphi + u\sin\psi)^2 + b^2(u\cos\psi - z\cos\varphi)^2 = a^2b^2$$

die Klammern auf und ordnet die Glieder links nach den fallenden Potenzen von z und u, so entsteht:

$$z^2(a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2) + 2uz(a^2\sin\varphi\sin\psi - b^2\cos\varphi\cos\psi) + u^2(a^2\sin\psi^2 + b^2\cos\psi^2) = a^2b^2.$$

Nun ist aber nach §. 486. (2.) $a^2\sin\varphi\sin\psi - b^2\cos\varphi\cos\psi = 0$, und bezeichnet man den Durchmesser PP' mit 2α und den Durchmesser QQ' mit 2β, so folgt nach §. 486. (4.) aus der vorstehenden Gleichung:

$$z^2 \cdot \frac{a^2b^2}{\beta^2} + u^2 \cdot \frac{a^2b^2}{\alpha^2} = a^2b^2 \text{ oder}$$

$$\frac{z^2}{\beta^2} + \frac{u^2}{\alpha^2} = 1.$$

Diese Gleichung stimmt mit der Mittelpunktsgleichung der Ellipse in der Form vollkommen überein.

IV. Aus dem Vorhergehenden folgt nicht nur, wie man zu jedem Durchmesser den conjugirten construiren kann, sondern es ergiebt sich auch eine sehr einfache Construction der Tangente für einen beliebigen Punkt der Ellipse.

Soll zu dem Durchmesser PP' der conjugirte QQ' construirt werden, so hat man zunächst seine Eigenschaft, daß er mit der Tangente PK parallel ist; weil er aber jede mit PP' parallele Sehne halbirt, und weil jede Linie nur einen Mittelpunkt hat, also die Mittelpunkte aller parallelen Sehnen in demselben Durchmesser liegen, so findet man ihn ohne Construction der Tangente, wenn man mit PP' eine beliebige parallele Sehne zieht und ihren Mittelpunkt mit M verbindet. Hieraus folgt also: zu einem Durchmesser PP' ist derjenige Durchmesser der conjugirte, welcher eine mit PP' parallele Sehne halbirt.

Um durch P eine Tangente an die Ellipse zu legen, ziehe man den Durchmesser PP', construire seinen conjugirten Durchmesser QQ' und ziehe durch P eine mit QQ' parallele Linie; diese Linie ist die Tangente.

Anmerkung. Dem Leser sei überlassen, aus dem Vorhergehenden den Satz zu folgern, daß zwei Sehnen einer Ellipse, die keine Durchmesser sind, sich gegenseitig nicht halbiren können.

§. 489.

Lehrsätze.

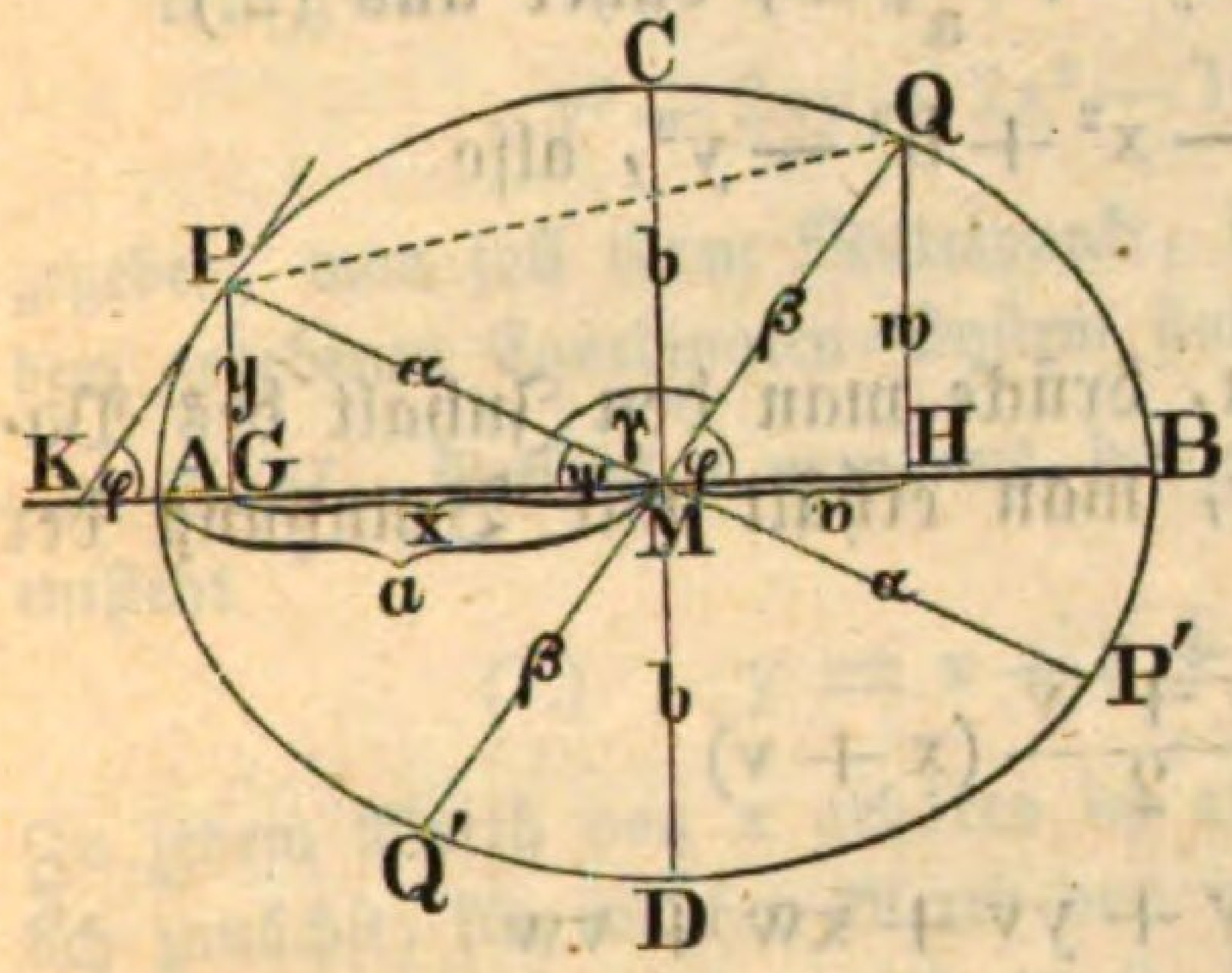
1) Die Summe der Quadrate conjugirter Durchmesser einer Ellipse ist constant, gleich der Summe der Quadrate der beiden Axen.

2) Das Product conjugirter Durchmesser, multiplicirt mit dem sin. des Winkels, den sie mit einander bilden, ist constant, gleich dem Product der beiden Axen.

Bezeichnen 2α und 2β die beiden Durchmesser, schneiden sich beide unter dem Winkel γ, und läßt man in beiden Sätzen auf beiden Seiten den Factor 4 fort, so heißt die Behauptung:

I. $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$.

II. $\alpha\beta \sin\gamma = ab$.



Beweis. PP′ und QQ′ mögen zwei conjugirte Durchmesser sein, also QQ′ parallel der Tangente PK; es sei $PP' = 2\alpha$ und $QQ' = 2\beta$, $\measuredangle PKM = \measuredangle QMB = \varphi$ und $\measuredangle PMA = \psi$. Die Coordinaten der Punkte P und Q sind x, y und v, w, wie die Figur sie zeigt; alle vier Linien können wir im absoluten Sinne nehmen. Zum Beweise werden wir die Mittelpunktsgleichung der Ellipse in der Form

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

anwenden, und die Formel §. 485. (1.):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

Zwischen x, y, v und w finden folgende Gleichungen Statt:

(1.) $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$.

(2.) $a^2w^2 + b^2v^2 = a^2b^2$.

(3.) $\dfrac{w}{v} = \dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x}{y}$.

Substituirt man w aus 3) in 2), so folgt:

$$\frac{b^4}{a^2}\cdot\frac{x^2}{y^2}\cdot v^2 + b^2v^2 = a^2b^2 \text{ oder}$$

$$v^2.(b^2x^2 + a^2y^2) = a^4y^2, \text{ folglich aus 1)}$$

$$v^2.a^2b^2 = a^4y^2 \text{ oder}$$

(4.) $v = \dfrac{a}{b}y$; daher aus (3.):

(5.) $w = \dfrac{b}{a}x$.

Durch Multiplication folgt aus (4.) und (5.):

$$(6.)\quad vw = xy,$$

d. h. die Dreiecke MHQ und MGP haben gleichen Inhalt.

Aus dem Pythagoreischen Lehrsatz ergiebt sich nun, wenn man die Gleichungen (4.) und (5.) benutzt:

$$\alpha^2 + \beta^2 = x^2 + y^2 + v^2 + w^2$$

$$= x^2 + y^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2, \text{ daher aus (2.):}$$

$$= x^2 + y^2 + a^2 - x^2 + b^2 - y^2, \text{ also}$$

$$\text{I.}\quad \alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2.$$

Um das Gesetz II. zu beweisen, drücke man den Inhalt des Paralleltrapezes PQHG doppelt aus; man erhält mit Benutzung der Gleichung (6.):

$$\tfrac{1}{2}\alpha\beta.\sin\gamma + xy = \frac{y+w}{2}(x+v)$$

$$\alpha\beta.\sin\gamma + 2xy = xy + yv + xw + vw$$

$$\alpha\beta\sin\gamma = yv + xw, \text{ daher aus (4.) und (5.):}$$

$$= \frac{a}{b} y^2 + \frac{b}{a} x^2$$

$$= \frac{a^2y^2 + b^2x^2}{ab}; \text{ folglich aus (1.):}$$

$$\text{II.}\quad \alpha\beta\sin\gamma = ab.$$

Anmerkung. Um die conjugirten Durchmesser von gleicher Länge zu finden, setzen wir $\alpha = \beta$ und erhalten:

1) $2\alpha^2 = a^2 + b^2$,

2) $\alpha^2 \sin\gamma = ab$.

Hieraus folgt aber:

$$\alpha = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \text{ und } \sin\gamma = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

Um aber die Lage dieser Durchmesser zur großen Axe zu finden, folgt aus §. 486. (3.):

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin\psi^2 + b^2\cos\psi^2}},$$

welche Gleichung auch für den Winkel φ, statt ψ, gilt, so daß $\varphi = \psi$ sein muß; aus ihr erhält man aber (§. 233. Beisp. 25.):

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a}.$$

Die gleich langen conjugirten Durchmesser sind daher den Sehnen (AC und CB) der elliptischen Quadranten parallel, also unmittelbar zu construiren.

Anmerkung 2. Es soll an einem Beispiele gezeigt werden, wie man die vorhergehenden Gesetze über die Tangenten und Durchmesser einer Ellipse benutzen kann, um die Lage und die Axen einer für ein beliebiges Coordinaten-System durch ihre Gleichung gegebenen Ellipse zu finden. Der Leser möge die Auflösung der folgenden Aufgabe durch Zeichnung der entsprechenden Figur begleiten.

Aufgabe. Eine Ellipse ist durch die Gleichung

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 16y - 2x + 120 = 0$$

gegeben; man soll ihren Mittelpunkt, ihre Axen und die Lage dieser Axen zu dem gegebenen Coordinaten-System finden.

Aufl. Entwickelt man aus der gegebenen Gleichung die Ordinate y, so entsteht

$$(1.) \quad y = x + 8 \pm \sqrt{-x^2 + 18x - 56}.$$

Zu jedem Werth von x gehören im allgemeinen zwei Werthe von y; es fragt sich zunächst, für welchen Werth von x diese beiden Werthe einander gleich sind. Setzt man aber den Radicand = 0, so entsteht

$$x_1 = 14 \quad \text{und} \quad x_2 = 4.$$

Die zugehörigen Werthe von y sind

$$y_1 = 22 \quad \text{und} \quad y_2 = 12.$$

Die gefundenen Coordinaten bestimmen zwei parallele Tangenten der Ellipse; zwischen ihnen muß die Ellipse liegen. (Für $x < 4$ und $x > 14$ wird y imaginär.) Bezeichnen wir den Punkt, dessen Coordinaten x_1 und y_1 sind, mit P, und den, dessen Coordinaten x_2 und y_2 sind, mit P′, so ist PP′ ein Durchmesser der Ellipse und hat die Länge

$$(2.) \quad PP' = 10\sqrt{2}.$$

Der Mittelpunkt von PP′ ist der Mittelpunkt M der Ellipse; er hat die Coordinaten:

$$(3.) \quad x = 9 \quad \text{und} \quad y = 17.$$

Da der Durchmesser, welcher PP′ conjugirt ist, mit den durch P und P′ gehenden Tangenten parallel ist und durch M geht, so müssen seine Endpunkte auch die Abscisse 9 haben, und setzt man in (1.) $x = 9$, so erhält man $y = 22$ und $y = 12$. Bezeichnen wir den Punkt der Ellipse, welcher die Abscisse 9 und die Ordinate 22 hat mit Q, und den, welcher die Abscisse 9 und die Ordinate 12 hat, mit Q′, so ist:

$$(4.) \quad QQ' = 10,$$

und QQ′ und PP′ sind conjugirte Durchmesser; sie schneiden sich unter einem

Winkel von 45°, wie dies sich aus der Figur unmittelbar ergiebt. Bezeichnen nun 2a und 2b die beiden Axen der Ellipse, so ist ferner

$$a^2 + b^2 = 5^2 + (5\sqrt{2})^2$$
$$ab = 25 . \sqrt{2} . \sin 45^\circ.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber

$$(5.) \quad a = \frac{5 + 5\sqrt{5}}{2} = 8{,}09 \text{ und } b = \frac{-5 + 5\sqrt{5}}{2} = 3{,}09.$$

Die Lage der großen Axe zur Abscissenlinie findet man am einfachsten aus §. 467. (5.); man erhält diesen Winkel $= 58^\circ\ 16'\ 57''$. Hieraus ergiebt sich der Winkel, welchen der Durchmesser PP′ mit der großen Axe bildet, $= 13^\circ\ 16'\ 57''$.

§. 490.

Aufgabe.

Zwei conjugirte Durchmesser PP′ und QQ′ einer Ellipse sind ihrer Lage und Größe nach gegeben, man soll die Größe und Lage der Axen der Ellipse durch Construction finden. — Legt man durch die Endpunkte jedes Durchmessers Parallelen mit dem conjugirten Durchmesser, so sind diese Parallelen Tangenten der Ellipse; daher kann die vorliegende Aufgabe auch so ausgesprochen werden: In ein gegebenes Parallelogramm eine Ellipse zu legen, welche die Seiten des Parallelogramms berührt.

Auflösung. Setzen wir $PP' = 2\alpha$ und $QQ' = 2\beta$, und bezeichnen wir den spitzen Winkel, welchen PP′ und QQ′ einschließen, mit γ, die gesuchten Axen aber mit 2a und 2b; so ist

$$1) \quad a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$
$$2) \quad ab = \alpha\beta \sin\gamma.$$

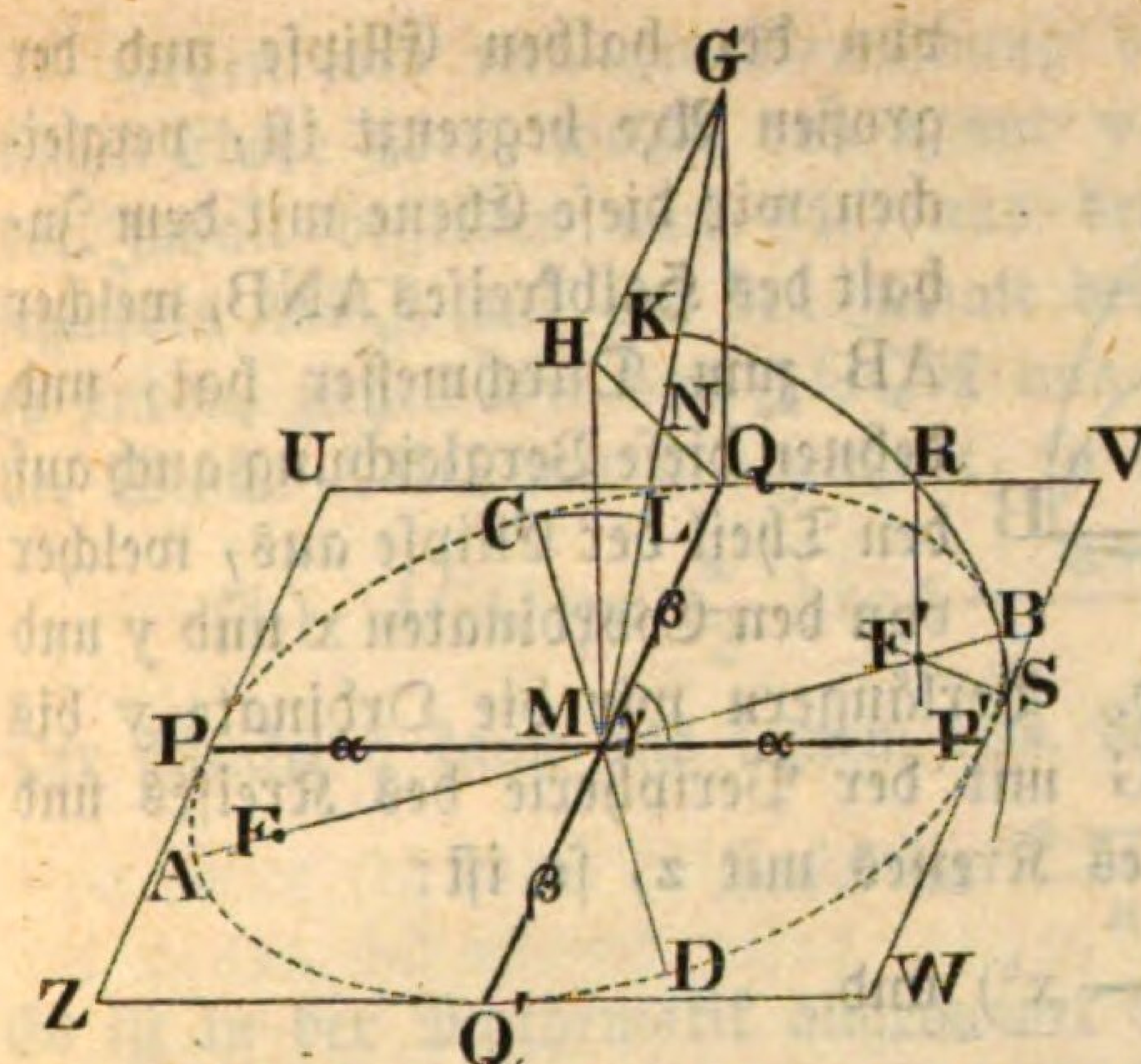
Aus diesen Gleichungen folgt

$$a^2 + b^2 \pm 2ab = \alpha^2 + \beta^2 \pm 2\alpha\beta \sin\gamma;$$

daher ist, wenn man nach $\cos(90^\circ - \gamma)$ statt $\sin\gamma$ setzt:

$$a + b = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos(90^\circ - \gamma)}$$
$$a - b = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos(90^\circ - \gamma)}.$$

Diese Wurzeln sind leicht zu construiren; jede ist eine Seite eines Dreiecks, dessen beide anderen Seiten α und β sind, nur ist in dem einen Dreieck der von α und β eingeschlossene Winkel das Supplement des Winkels $90^\circ - \gamma$, im anderen Dreieck dieser Winkel selbst.



Errichtet man MH ⊥ PP', so ist der Winkel

$$HMQ = 90° - \gamma,$$

und macht man $MH = \alpha$, zieht QG ∦ MH und HG ∦ MQ: so ist in dem Parallelogramm MQGH die eine Diagonale $MG = a + b$, die andere $HQ = a - b$, folglich $NM = \frac{a+b}{2}$ und $NQ = \frac{a-b}{2}$. Macht man nun $NK = NL = NQ$, so ist:

$$MK = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$$

$$ML = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b.$$

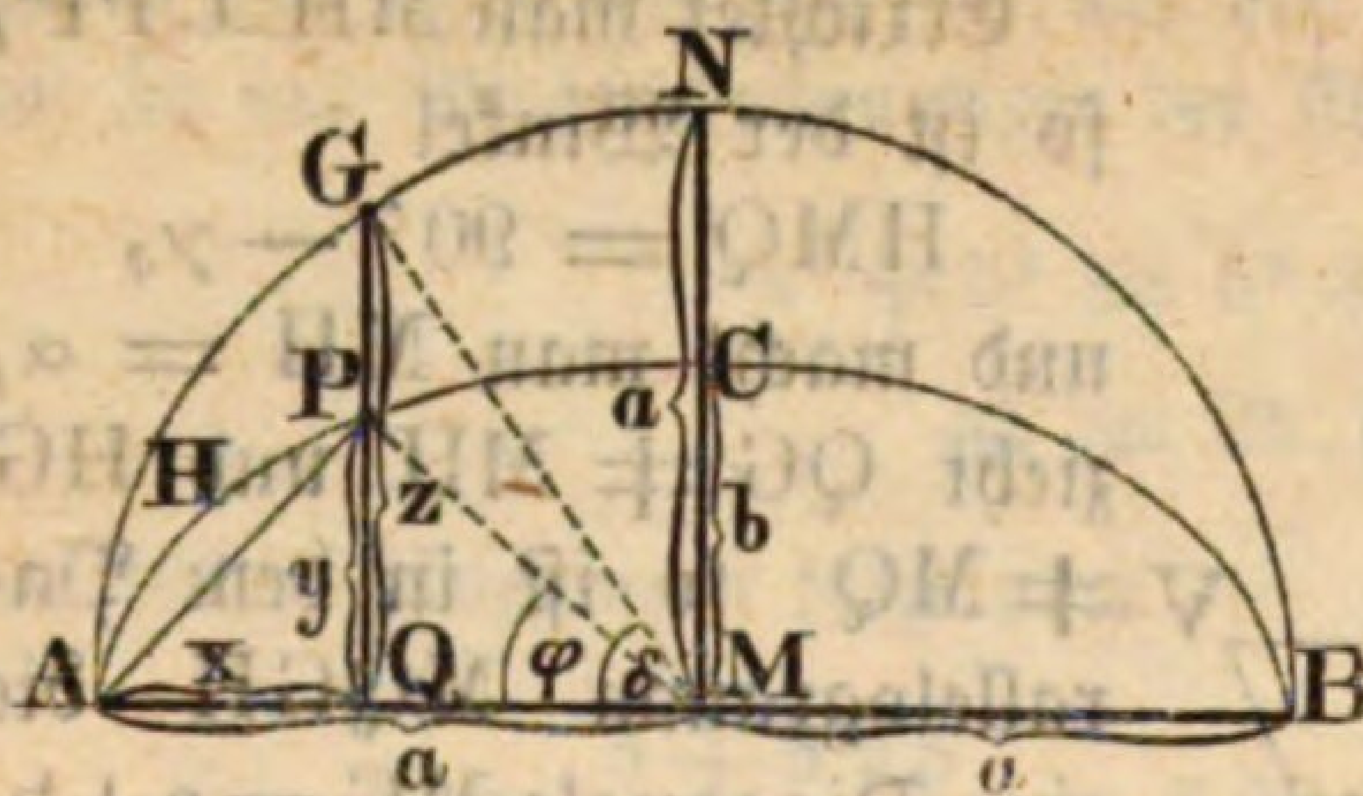
Die Axen der Ellipse sind also ihrer Größe nach gefunden, es fehlt nur noch ihre Lage; diese bestimmt sich durch einen Brennpunkt; die Brennpunkte aber sind nach dem Satze zu construiren, daß der Fußpunkt der Senkrechten, welche von einem Brennpunkt auf eine Tangente gefällt wird, vom Mittelpunkt der Ellipse den Abstand a hat (§. 487. II.). Schlägt man also mit MK um M einen Kreis, welcher die Tangente UV in R und die Tangente VW in S schneidet, errichtet RF' ⊥ UV und SF' ⊥ VW, so ist der Durchschnittspunkt F' beider Perpendikel ein Brennpunkt der Ellipse. Zieht man also MF' und verlängert diese Linie, bis sie in B die Peripherie des Kreises um M schneidet, verlängert man endlich noch MB über M und macht die Verlängerung MA = MB: so ist AB die große Axe der Ellipse in richtiger Größe und Lage. Zieht man CD ⊥ AB und macht MD = MC = ML, so ist CD die kleine Axe; den zweiten Brennpunkt F findet man, wenn man AF = BF' macht.

§. 491.

Aufgabe.

Die Ellipse zu quadriren.

Auflösung. AB ist die große Axe 2a einer Ellipse, MC die halbe kleine Axe b. Um den Inhalt der Ebene ACB zu finden, welche



von der halben Ellipse und der großen Axe begrenzt ist, vergleichen wir diese Ebene mit dem Inhalt des Halbkreises ANB, welcher AB zum Durchmesser hat, und dehnen diese Vergleichung auch auf den Theil der Ellipse aus, welcher von den Coordinaten x und y und dem Bogen AP begrenzt wird. Verlängern wir die Ordinate y bis zu ihrem Durchschnittspunkt G mit der Peripherie des Kreises und bezeichnen die Ordinate QG des Kreises mit z, so ist:

$$(1.) \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) \text{ und}$$

$$(2.) \quad z^2 = 2ax - x^2.$$

Hieraus folgt $y^2 : z^2 = b^2 : a^2$, oder

$$(3.) \quad y : z = b : a.$$

(Aus dieser Proportion folgt, daß sich die Geraden NG, CP und MQ in einem Punkt schneiden müssen (§. 80. V.), wodurch sich zu jedem Punkte G der Kreisperipherie der zugehörige Punkt P der Ellipse durch eine sehr einfache Construction ergiebt.)

Die Gleichung (3.) sagt, daß für jeden Werth von x die Ordinate der Ellipse zur Ordinate des Kreises das constante Verhältniß b:a hat, oder, daß immer $y = \frac{b}{a} z$ ist. Nach dem Gesetze in §. 314. Nr. 3., dessen Anwendbarkeit auf ebene Figuren in §. 315. nachgewiesen wurde, ist daher auch

$$(4.) \quad \text{die Ebene AHPQ} = \frac{b}{a} \cdot \text{AGQ},$$

und weil dieses Gesetz für jeden Werth von x gilt, so wird auch die ganze Ebene ACB gefunden, wenn man den Inhalt des Halbkreises ANB mit $\frac{b}{a}$ multiplicirt, d. h. es ist

$$\text{ACB} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2\pi}{2} = \frac{ab\pi}{2}.$$

Hieraus folgt aber, weil die Axe AB die Ebene der Ellipse halbirt:

I. Der Inhalt der ganzen Ebene, welche die Ellipse umschließt $= ab\pi$.

Da $ab\pi = \sqrt{a^2\pi \times b^2\pi}$ ist, so ist der Inhalt der elliptischen Ebene die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Kreisen, welche die beiden Axen der Ellipse zu Durchmessern haben.

Gehen wir nun zur Berechnung des Theiles AHPQ der elliptischen Ebene über, welche von x und y begrenzt wird, so ergiebt sich der Inhalt desselben nach (4.) aus dem Inhalte des halben Kreissegments AGQ, und um den Inhalt des halben Kreissegmentes AGQ zu finden, ziehen wir das ΔGQM von dem Sector AMG ab. Wird der Winkel AMG mit δ bezeichnet, so ist

$$(5.)\quad AGQ = \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \delta - \frac{a-x}{2} \cdot z.$$

Der Winkel δ kann aus seinem cos. bestimmt werden; es ist

$$\cos \delta = \frac{a-x}{a}.$$

Es ist in der Mathematik allgemeiner Gebrauch, den Arcus des Winkels, dessen cos. etwa gleich v ist, durch arc cos v oder arc (cos = v) zu bezeichnen $\Big($analog kann statt des cos. auch jede andere trigonometrische Function gebraucht werden, z. B. $\operatorname{arc} \sin \frac{1}{2} = \operatorname{arc} 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 = \operatorname{arc} 45^\circ = \frac{\pi}{4}\Big)$, und führen wir diese Bezeichnung ein, so folgt aus (5.):

$$(6.)\quad AGQ = \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \cos \frac{a-x}{a} - \frac{a-x}{2} \cdot z.$$

Man kann aber auch den Winkel δ aus der Gleichung $\operatorname{tg} \delta = \frac{z}{a-x}$ entnehmen, oder, weil aus (3.) $z = \frac{a}{b} y$ folgt, aus der Gleichung $\operatorname{tg} \delta = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{a-x}$, d. h. es ist auch $\operatorname{arc} \delta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{y}{a-x}\right)$; folglich

$$(7.)\quad AGQ = \frac{a^2}{2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{y}{a-x}\right) - \frac{a-x}{2} z.$$

Aus (4.) folgt daher, wenn man den Werth von AGQ aus (6.) oder (7.) substituirt und $\frac{b}{a} z = y$ setzt:

II. Der Inhalt der Ebene AHPQ

$$= \frac{ab}{2} \operatorname{arc} \cos \frac{a-x}{a} - \frac{a-x}{2} y = \frac{ab}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{y}{a-x}\right) - \frac{a-x}{2} y.$$

Der Leser sei darauf aufmerksam gemacht, daß die vorstehende Formel, wie überhaupt alle Formeln dieses §., auch dann richtig ist, wenn 2a die kleine und 2b die große Axe der Ellipse ist, wenn also

$a < b$ ist. Der Halbkreis ANB liegt dann innerhalb der Ellipse, sonst bleibt die Entwicklung unverändert. Natürlich gilt die Formel auch, wenn $a = b$ ist, d. h. wenn die Ellipse in den Kreis übergeht.

Den Inhalt des Segments, welches die Sehne AP von der Ellipse abschneidet, findet man durch Subtraction des Dreiecks APQ von der Ebene AHPQ; daher ist

III. Inhalt des Segments APH

$$= \frac{ab}{2} \operatorname{arc} \cos \frac{a - x}{a} - \frac{a}{2} y.$$

Der Inhalt des elliptischen Sectors AMP entsteht, wenn man Δ PQM zu der Ebene AHPQ addirt; daher ergiebt sich aus I. der Inhalt des Sectors $= \frac{ab}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{y}{a - x}\right)$. Um aber den Sector unmittelbar durch den Winkel AMP auszudrücken, der durch φ bezeichnet werden mag, braucht man nur $\operatorname{tg} \varphi$ statt $\frac{y}{a - x}$ zu setzen; so entsteht:

IV. Inhalt des Sectors AMP

$$= \frac{ab}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi\right).$$

Anmerkung. Auch aus der Formel IV. ist der Inhalt der ganzen elliptischen Ebene zu finden, wenn man $\varphi = 360°$ setzt; bezeichnet F diesen Inhalt, so ist $F = \frac{ab}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0$. Was bedeutet hier arc tg 0, d. h. der arcus des Winkels, dessen tg. Null ist? Es ist bekanntlich $\operatorname{tg} 0° = 0$, $\operatorname{tg} 180° = 0$ und $\operatorname{tg} 360° = 0$; ist nun arc tg 0 gleich arc 0° oder arc 180° oder arc 360°? Um den richtigen Werth hier zu finden, muß der Leser auf die Entwicklung der Formel zurück gehen. Aus der Formel (5.) ergiebt sich, daß $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi\right)$ nichts weiter, als arc δ bedeutet, nur ist δ durch φ ausgedrückt: es ist δ der Winkel, dessen tg. gleich $\frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi$ ist

$$\left(\operatorname{tg} \delta = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{a - x} = \frac{z}{a - x}\right).$$

Die Winkel φ und δ stehen aber in einem solchen Zusammenhange mit einander, daß sie gleichzeitig, wiewohl ungleichmäßig, wachsen; aber wenn φ die Werthe 0°, 180°, 360° annimmt, wird auch δ resp. 0°, 180° und 360°. Sonach ist im vorliegenden Falle, in welchen $\varphi = 360°$ gesetzt wurde, auch $\delta = 360°$, daher $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 0 = \operatorname{arc} 360° = 2\pi$; folglich $F = \frac{ab}{2} 2\pi = ab\pi$.

Uebungs-Beispiele.

Beisp. 1. Der Inhalt einer Ellipse ist $= f^2$, ihre Axen haben zu einander das Verhältniß $n:m$; wie groß sind die Axen?

Antw. $2f.\sqrt{\frac{n}{m\pi}}$ und $2f.\sqrt{\frac{m}{n\pi}}$.

Beisp. 2. Wie groß ist der Inhalt der Ebene einer Ellipse, deren Axen 8′ und 10′ sind?

Antw. 62,83185 □′.

Beisp. 3. Wie groß ist der Inhalt eines elliptischen Segments, welches durch die Sehne des Quadranten abgeschnitten wird, wenn 2a und 2b die Axen sind.

Antw. $\frac{ab}{4}(\pi - 2)$.

Aufgabe 4. Wie groß ist die Ebene, welche die Ellipse $y^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x^2$ umschließt?

Antw. 3,33216 □-Einheiten.

Aufgabe 5. Wie groß ist die Ebene, welche die Ellipse $y^2 = 4x - 9x^2$ umschließt?

Antw. 0,465421 □-Einheiten.

Beisp. 6. Wie groß ist die Ebene, welche die Ellipse $y^2 = 16x - 16x^2$ umschließt?

Antw. 3,14159 □-Einheiten.

Beisp. 7. Die Axen einer Ellipse sind 10′ und 8′; ein Quadrant dieser Ellipse ist durch eine Linie in zwei Theile getheilt, welche vom Mittelpunkt der Ellipse ausgeht und mit den begrenzenden halben Axen gleiche Winkel bildet; wie groß sind die beiden Theile der Ellipse?

Aufl. Bezeichnet F den Theil, welcher der halben großen Axe anliegt, so ist nach Formel IV., weil $tg\ 45^\circ = 1$ ist, $F = 10 . arc\ tg\ \frac{5}{4}$. Ferner ist der Winkel, dessen tg. gleich $\frac{5}{4}$ ist, gleich 51° 20′ 24,7″; folglich $F = 10 . arc\ 51^\circ\ 20'\ 24{,}7''$. Die beiden gesuchten Theile haben die Inhalte 8,960555 □′ und 6,747408 □′.

Aufgabe 8. M ist der Mittelpunkt einer Ellipse und MA die halbe große Axe; P ist ein Punkt der Ellipse und die Linie MP bildet mit MA einen Winkel von 30°. Wie groß ist der Inhalt des elliptischen Sectors AMP, wenn die beiden Axen 12′ und 8′ lang sind?

Antw. 8,56468 □′.

Aufgabe 9. Eine Ellipse ist durch ihre Scheitelgleichung gegeben: $y^2 = 4x - \frac{1}{2}x^2$; man soll den Inhalt der Ebene berechnen, welche von der Abscisse $x = \frac{8}{3}$, der zugehörigen positiven Ordinate und dem zugehörigen Bogen der Ellipse begrenzt wird.

Aufl. Hat man aus der gegebenen Gleichung die beiden Axen der Ellipse und die Ordinate, welche zu $x = \frac{8}{3}$ gehört, gefunden, so wird der Inhalt F der gesuchten Ebene

$$F = 4\sqrt{2} . arc\cos\frac{1}{3} - \frac{16}{9}.$$

Den Winkel, dessen cos. gleich $\frac{1}{3}$ ist, findet man $= 70^\circ\ 31'\ 43{,}6''$; folglich ist

$$F = 4\sqrt{2}.\mathrm{arc}\ 70^\circ\ 31'\ 43{,}6'' - \tfrac{16}{9} = 5{,}18558\ \square\text{-Einheiten.}$$

Aufgabe 10. Die beiden Axen einer Ellipse sind 40′ und 20′; eine Sehne ist mit der großen Axe parallel und halbirt die halbe kleine Axe; wie groß ist das Segment, welches die Sehne von der Ebene der Ellipse abschneidet?

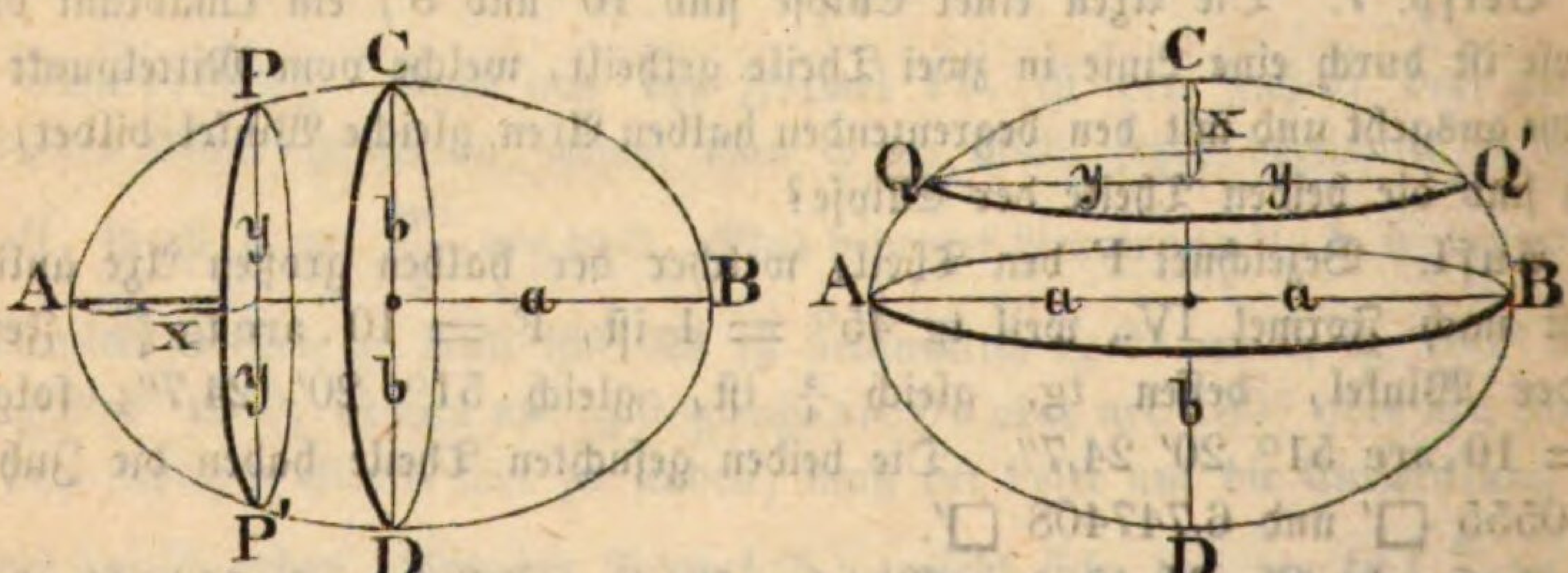
Antw. 122,837 □′.

§. 492.

Aufgabe.

Die Ellipse zu kubiren.

Auflösung. Wenn die Ellipse um eine ihrer Axen eine Umdrehung macht, so beschreibt jede der beiden Hälften, in welche sie durch diese Axe zerlegt wird, einen Körper, den man ein Ellipsoid nennt. Die beiden Ellipsoide, von denen das eine durch Umdrehung um die Axe 2a, das andere durch Umdrehung um die Axe 2b entsteht, sind in Form und Inhalt von einander verschieden, beide gehen aber in dieselbe Kugel über, wenn a = b ist. Beide Körper sind Simpson'sche; denn bei dem einen ist die auf der Umdrehungsaxe senkrechte Durchschnittsfläche, wenn sie von dem einen Endpunkt dieser Axe den Abstand x hat, gleich $y^2\pi = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)\pi$, bei dem



andern gleich $y^2\pi = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2)\pi$, wenn y die zu x gehörige Ordinate ist. Beide Durchschnittsflächen sind also Functionen des zweiten Grades, beide wachsen bis zur Mitte des Körpers, dann nehmen sie wieder ab; jede Hälfte aber, in der die Durchschnittsflächen nur wachsen oder nur fallen, hat die Eigenschaft, daß ein beliebiger Theil derselben, der zwischen parallelen Durchschnittsflächen liegt, auch resp. kleiner und größer als einer der beiden prismatischen Körper ist, welche diese Durchschnittsflächen zu Grundflächen und ihre Entfernung von einander zur Höhe haben. Man überzeugt sich hiervon leicht durch paralleles Fortschieben einer Durchschnittsfläche.

Nach der Simpson'schen Regel ist daher das eine Ellipsoid $= \frac{0 + 4b^2\pi + 0}{6} 2a$, das andere $= \frac{0 + 4a^2\pi + 0}{6} 2b$, daher:

I. Der Inhalt des Ellipsoids, welches durch Umdrehung um die Axe 2a entsteht $= \frac{4}{3}ab^2\pi$.

II. Der Inhalt des Ellipsoids, welches durch Umdrehung um die Axe 2b entsteht $= \frac{4}{3}a^2b\pi$.

Der zweite Körper ist also der größere; er verhält sich zum ersten, wie a : b.

Um nun den Theil des Ellipsoids von der Höhe x und der Grundfläche $y^2\pi$ zu berechnen, kann man auch nach der Simpson'schen Regel verfahren; bequemer aber ist es, den Inhalt unmittelbar aus der Durchschnittsfläche nach §. 312. zu entnehmen. Bei dem ersten Körper ist die Durchschnittsfläche:

$\frac{2b^2\pi}{a} x - \frac{b^2\pi}{a^2} x^2$, folglich der Körper $= \frac{2b^2\pi}{a} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{b^2\pi}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3}$,

bei dem andern ist die Durchschnittsfläche:

$\frac{2a^2\pi}{b} x - \frac{a^2\pi}{b^2} x^2$, folglich der Körper $= \frac{2a^2\pi}{b} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{a^2\pi}{b^2} \cdot \frac{x^3}{3}$.

Reducirt man diese Ausdrücke, so folgt:

III. Der Abschnitt APP' des Ellipsoids von der Höhe x, welches durch Umdrehung um die Axe 2a entsteht

$$= \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2\pi}{3} (3a - x).$$

IV. Der Abschnitt CQQ' des Ellipsoids von der Höhe x, welches durch Umdrehung um die Axe 2b entsteht

$$= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{x^2\pi}{3} (3b - x).$$

Jeder beider Ausdrücke geht in den anderen über, wenn man a und b mit einander vertauscht; für a = b erhält man den Inhalt des Kugelabschnitts.

Um den Inhalt des Körpers zu berechnen, welchen das zur Sehne AP oder zur Sehne CQ gehörige Segment bei der Umdrehung resp. um die Axe 2a oder 2b beschreibt, hat man einen Kegel von dem Abschnitt des Ellipsoids zu subtrahiren. Es entsteht:

V. Der Inhalt des Körpers, den das zu AP gehörige Segment bei der Umdrehung um 2a erzeugt $= \frac{b^2\pi}{3a} \cdot x^2$.

VI. Der Inhalt des Körpers, den das zu CQ gehörige Segment bei der Umdrehung um 2b erzeugt $= \frac{a^2\pi}{3b} \cdot x^2$.

Fallen die beiden Sehnen in einander, d. h. ist jede die Sehne des elliptischen Quadranten, so ist jeder beider Körper der vierte Theil des zugehörigen Ellipsoids.

Durchschneidet man ein Ellipsoid durch zwei auf der Umdrehungsaxe senkrechte Ebenen, so ist der zwischen ihnen liegende Theil des Ellipsoids eine elliptische körperliche Zone. Haben ihre Grundflächen (die beiden Durchschnittsflächen) die Radien r und ϱ und ist ihre Höhe gleich h, so findet man den Inhalt K am bequemsten nach der Simpson'schen Regel. Hat die Mittelfläche den Radius m, so ist

$$K = \frac{r^2 + 4m^2 + \varrho^2}{6} \pi h.$$

Nehmen wir nun an, die Umdrehungsaxe sei die große Axe 2a, r habe die Abscisse x, vom Scheitel aus gerechnet, und ϱ die Abscisse x_1, so daß $h = x - x_1$ ist, so hat m die Abscisse $x_1 + \frac{x - x_1}{2} = \frac{x + x_1}{2}$; daher ist:

$$1) \quad m^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[2a \cdot \frac{x + x_1}{2} - \left(\frac{x + x_1}{2}\right)^2\right]$$

$$2) \quad r^2 = \frac{b^2}{a^2}[2ax - x^2]$$

$$3) \quad \varrho^2 = \frac{b^2}{a^2}[2ax_1 - x_1^2].$$

Multiplicirt man die Gleichung 1) mit 2 und zieht dann die Summe der beiden anderen Gleichungen von ihr ab, so entsteht:

$$2m^2 - r^2 - \varrho^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[x^2 + x_1^2 - \frac{(x + x_1)^2}{2}\right]$$

$$= \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(x - x_1)^2}{2}, \text{ folglich}$$

$$4m^2 - 2r^2 - 2\varrho^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot h^2.$$

Entwickelt man hieraus $4m^2$ und substituirt den Werth oben in den Ausdruck für K, so folgt:

VII. Der Inhalt der elliptischen körperlichen Zone bei der Umdrehungsaxe 2a ist $= \frac{h\pi}{6} \cdot \left(3r^2 + 3\varrho^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot h^2\right)$.

Ist aber 2b die Umdrehungsaxe, so entsteht ganz auf demselben Wege (man braucht nur b und a mit einander zu vertauschen):

VIII. Der Inhalt der elliptischen körperlichen Zone bei der Umdrehungsaxe 2b ist $= \frac{h\pi}{6} \cdot \left(3r^2 + 3\varrho^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot h^2\right)$.

Uebungs-Beispiele.

Beisp. 1. Eine Ellipse hat die Axen 10′ und 4′; man soll die Inhalte der Ellipsoide, welche durch Umdrehung um die beiden Axen entstehen, berechnen.

Aufl. Bei Umdrehung um die große Axe hat der Körper den Inhalt 83,7758 C′ und bei Umdrehung um die kleine Axe: 209,4395 C′.

Beisp. 2. Die Axen einer Ellipse verhalten sich zu einander wie n : m, und der Inhalt des Ellipsoids, welches diese Ellipse bei der Umdrehung um die der Verhältnißzahl n entsprechende Axe erzeugt ist $= f^3$; wie groß sind die Axen?

Antw. Die Umdrehungsaxe $= f . \sqrt[3]{\frac{6n^2}{m^2\pi}}$, die andere $= f . \sqrt[3]{\frac{6m}{n\pi}}$.

Beisp. 3. Die Axen einer Ellipse sind 6′ und 2′; wie groß ist der Körper, den das elliptische Segment, dessen Sehne die Sehne des Quadranten ist, bei der Umdrehung um die große Axe erzeugt?

Antw. 3,14159 C′.

Beisp. 4. In einen senkrechten Cylinder von dem Radius r und der Höhe h ist ein Ellipsoid eingeschrieben, welches die beiden Grundflächen und den Mantel des Cylinders berührt; wie verhalten sich die Inhalte dieser Körper zu einander, und wie groß ist der Inhalt des Raumes, der zwischen ihren Oberflächen liegt?

Antw. Die Inhalte der Körper verhalten sich zu einander, wie 2 zu 3; der Inhalt des Raumes zwischen ihren Oberflächen ist $= \frac{1}{3}\, r^2\pi h$.

Beisp. 5. Wie groß ist der Inhalt des Ellipsoids, welches die Ellipse $y^2 = 7{,}2x - 0{,}36x^2$ bei der Umdrehung um ihre große Axe beschreibt?

Antw. 1507,964 Kub.-Einheiten.

Beisp. 6. Wie groß ist der Inhalt des Ellipsoids, welches die Ellipse $y^2 = x - \frac{3}{2}x^2$ bei der Umdrehung um ihre kleine Axe beschreibt?

Antw. 0,23271 Kub.-Einheiten.

Beisp. 7. Wenn man das Ellipsoid, welches durch Umdrehung der Ellipse mit den Axen 2a und 2b um ihre große Axe 2a entstanden ist, durch zwei auf dieser Axe senkrechte Ebenen schneidet, welche durch die beiden Brennpunkte gehen, wie groß ist der Inhalt der erzeugten elliptischen körperlichen Zone?

Antw. $\frac{2b^2\pi}{3a^2}(2a^2 + b^2)\sqrt{a^2 - b^2}$.

Beisp. 8. In der Ellipse mit den Axen 2a und 2b ist eine Sehne mit der großen Axe 2a parallel und halbirt die halbe kleine Axe; wie groß ist der

Inhalt des Körpers, den das zu der Sehne gehörige Segment bei der Umdrehung um die große Axe beschreibt?

Antw. $\frac{1}{2}ab^2\pi\sqrt{3}$. — Die Berechnung geschieht am einfachsten unmittelbar nach der Simpsonschen Regel.

Beisp. 9. Eine Ellipse ist durch die Gleichung $9y^2 = 24x - x^2$ gegeben; der eine Endpunkt A einer Sehne dieser Ellipse ist der Scheitel, auf welchen sich die gegebene Gleichung bezieht, der andere B hat die Ordinate 3, seine Abscisse aber ist größer, als die halbe große Axe. Wie groß ist der Inhalt des Körpers, den das zu AB gehörige Segment bei der Umdrehung um die große Axe beschreibt?

Antw. $4\pi(23 + 8\sqrt{7}) = 555{,}006$ Kub.-Einheiten.

Beisp. 10. Eine Ellipse ist durch ihre Gleichung $16y^2 = 144x - 9x^2$ gegeben; die Endpunkte einer Sehne PQ dieser Ellipse haben die Ordinaten $+6$ und $+3$, wie groß ist der Inhalt des Körpers, den das zur Sehne PQ gehörige Segment bei der Umdrehung um die kleine Axe beschreibt?

Antw. $32\pi = 100{,}53096$ Kub.-Einheiten.

Beisp. 11. Die Axen einer Ellipse sind 12′ und 10′; von dem Ellipsoid, welches durch Umdrehung um die große Axe entstand, ist durch eine auf der Umdrehungsaxe senkrechte Ebene ein Körper von der Höhe 4′ abgeschnitten; wie groß ist sein Inhalt?

Antw. 162,897 C′.

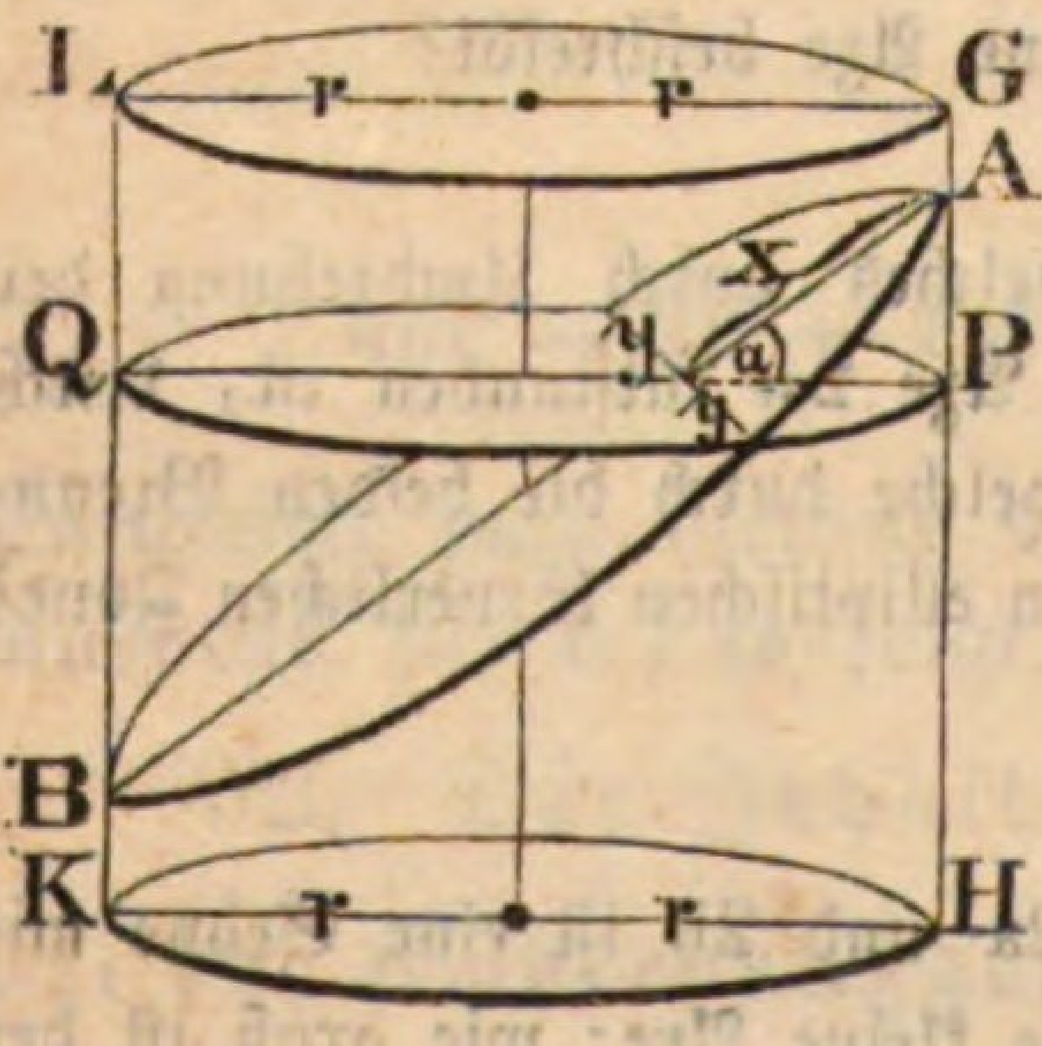
Beisp. 12. Dieselbe Aufgabe, nur ist die kleine Axe die Umdrehungsaxe.

Aufl. 265,4018 C′.

§. 493.

Die Ellipse als Cylinderschnitt und als Projection des Kreises.

I. Durchschneidet man einen senkrechten Cylinder durch eine Ebene, welche mit der Axe desselben nicht parallel ist, so schneidet die Ebene den Cylindermantel in einer Ellipse. Die kleine Axe dieser Ellipse ist der Durchmesser des Cylinders, die große Axe erhält man, wenn man den Durchmesser des Cylinders durch den cos. des spitzen Winkels α dividirt, welchen die schneidende Ebene mit der Grundfläche des Cylinders bildet (oder durch den sin. des Winkels, den sie mit der Axe bildet).



Beweis. Die den Cylinder schneidende Ebene sei AB. Wenn man durch die Axe des Cylinders eine Ebene legt, welche auf der Ebene AB senkrecht steht, so liegt nach §. 348. I. in dieser Ebene der höchste und auch der tiefste Punkt der krummen Linie, in welcher die Ebene AB den Cylindermantel schneidet. In der Figur ist GHKL die durch die Axe gehende Ebene (der Leser möge sie als die Ebene des Papiers an-

sehen), welche auf der Ebene AB senkrecht steht; schneidet sie in den Punkten A und B die krumme Linie, von der bewiesen werden soll, daß sie eine Ellipse ist, so ist A der höchste und B der tiefste Punkt derselben. Um die Gleichung der krummen Linie herzuleiten, machen wir AB zur Abscissenlinie, A zum Anfangspunkt der Abscissen und legen durch den Endpunkt der beliebigen Abscisse x eine zur Axe des Cylinders senkrechte Ebene, den Kreis PQ. Da die Ebenen AB und PQ auf der Ebene des Papiers senkrecht stehen, so gilt dies auch von ihrer Durchschnittslinie, die in der Figur mit 2y bezeichnet ist; folglich steht 2y auf der Linie AB senkrecht und auch auf dem Kreisdurchmesser PQ, wird also durch ihn halbirt. Es ist sonach y die zu x gehörige Ordinate der krummen Linie AB. Weil aber y auch Kreisordinate ist, und weil sie den Durchmesser PQ in die beiden Abschnitte $x\cos\alpha$ und $2r - x\cos\alpha$ zerlegt (denn der spitze Winkel, unter welchem die Linien AB und PQ sich schneiden, ist der Neigungswinkel der Ebene AB zu dem Kreise PQ, also auch zur Grundfläche des Cylinders), so ist

$$y^2 = x\cos\alpha.(2r - x\cos\alpha) \text{ oder}$$
$$y^2 = 2r\cos\alpha\,.\,x - \cos\alpha^2.x^2.$$

Diese Gleichung ist die Scheitelgleichung der Ellipse für die große Axe, weil der Factor von x^2 ein ächter Bruch ist, und bringen wir sie auf die Form

$$y^2 = \cos\alpha^2\cdot\left(2\frac{r}{\cos\alpha}\cdot x - x^2\right)$$

und bezeichnen die beiden Axen mit 2a und 2b, so geht aus dieser Gleichung hervor:

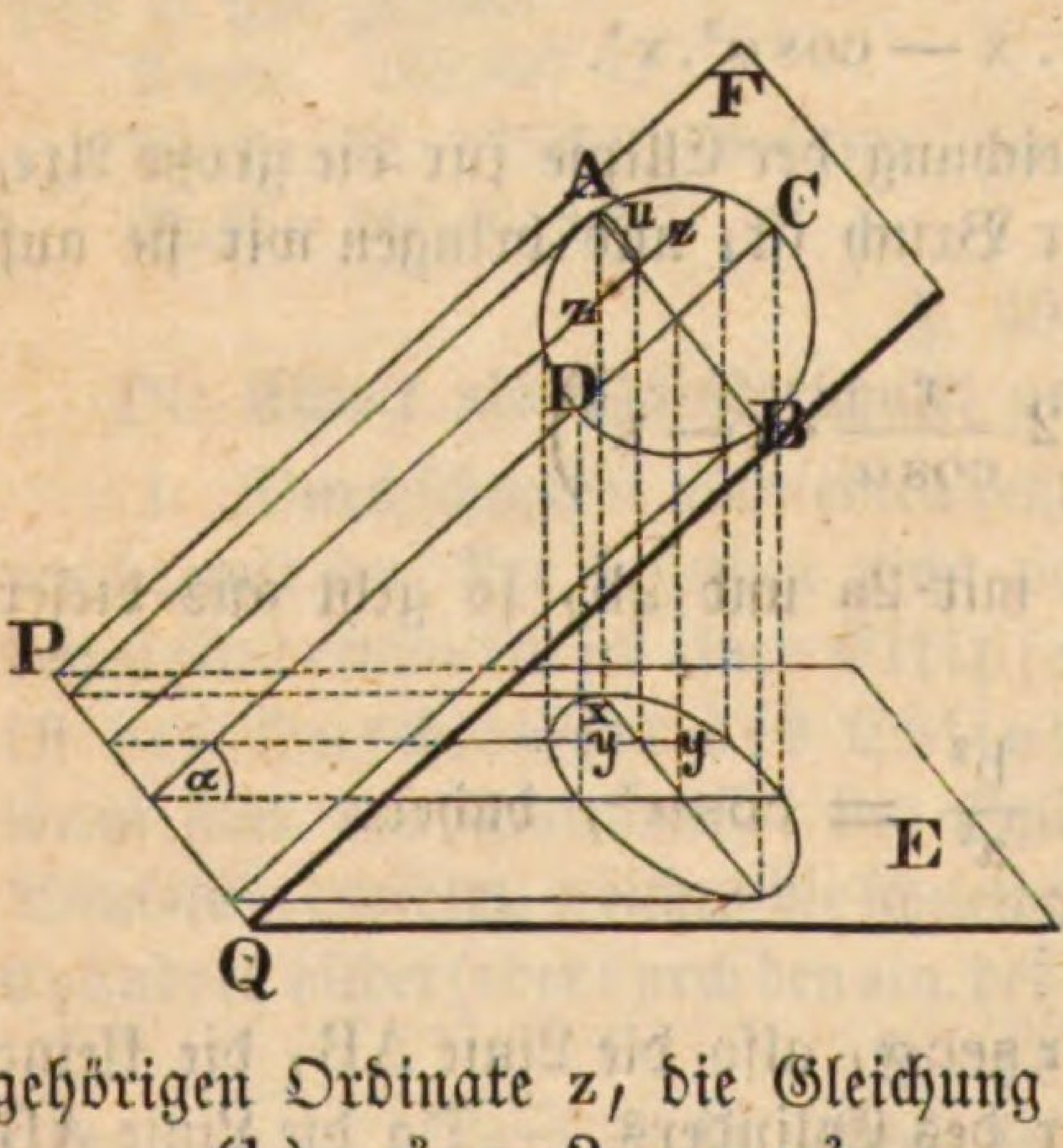
$$a = \frac{r}{\cos\alpha} \text{ und } \frac{b^2}{a^2} = \cos\alpha^2, \text{ daher:}$$
$$b = a.\cos\alpha = r.$$

Die große Axe ist sonach gleich $2r\sec\alpha$, also die Linie AB, die kleine ist gleich 2r, also der Durchmesser des Cylinders. — Da die Linie AB durch die Cylinderaxe halbirt wird, so ist der Durchschnittspunkt beider Linien der Mittelpunkt der Ellipse.

II. Aus I. folgt, daß man jede Ellipse in einen Cylindermantel legen kann, aber auch nur in einen, nämlich in den, dessen Radius der halben kleinen Axe b der Ellipse gleich ist. Man muß dann den Cylindermantel so schneiden, daß die Durchschnittsebene mit der Grundfläche des Cylinders einen Winkel α bildet, für welchen $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ ist.

Da ferner in der Figur zu I. der Kreis HK als *Projection* der Ellipse AB erscheint, so folgt hieraus, wie man im Raume eine Ellipse legen muß, wenn ihre Projection auf eine beliebige Ebene ein Kreis sein soll. Man legt zunächst die kleine Axe mit der Projectionsebene parallel und dreht die Ellipse um diese Axe so, bis ihre Ebene, gehörig verbreitet, die Projectionsebene unter dem Winkel α schneidet, für welchen $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ ist.

III. Die Projection eines Kreises auf eine beliebige Ebene ist eine *Ellipse*; die *große Axe* dieser Ellipse *ist der Durchmesser des Kreises*, die kleine Axe erhält man, wenn man diesen Durchmesser mit dem cos. des Winkels multiplicirt, den die Ebene des Kreises mit der Projectionsebene bildet. — Als Ausnahme ist der Fall zu betrachten, wenn $\alpha = 90^\circ$ ist; dann steht die Ebene des Kreises auf der Projection senkrecht und die Projection wird eine begrenzte gerade Linie, der Durchmesser des Kreises. Ist $\alpha = 0$, d. h. ist die Ebene des Kreises mit der Projectionsebene parallel, so ist die Projection ein dem Kreise im Raume congruenter Kreis.



Beweis. Der Kreis — sein Radius sei r — liege in der Ebene F, die Projectionsebene sei E und beide Ebenen schneiden sich in PQ unter dem spitzen Winkel α. Zieht man im Kreise den Durchmesser AB ⫲ PQ, so ist auch AB ⫲ E, und nimmt man AB zur Abscissenaxe und A zum Anfangspunkt der Abscissen, so findet zwischen den rechtwinkligen Coordinaten, nämlich zwischen der Abscisse u und der zugehörigen Ordinate z, die Gleichung Statt:

$$(1.)\quad z^2 = 2ru - u^2.$$

In Beziehung auf die Projection des Kreises wollen wir die Projection von AB zur Abscissenaxe und die Projection des Punktes A zum Anfangspunkt der Abscissen nehmen. Da die Kreissehne 2z durch AB halbirt wird, so wird auch die Projection von 2z durch die Projection von AB halbirt. Bezeichnen wir daher die Projection von z auf E mit y, so können wir y als Ordinate der Projection des Kreises betrachten, und bezeichnen wir die zugehörige Abscisse mit x, so ist x die Projection von u und ist parallel und gleich u. Wir haben daher:

(2.) $u = x$,

(3.) $z.\cos\alpha = y$.

Setzen wir die Werthe von u und z aus (2.) und (3.) in (1.) ein, so entsteht:

$$\frac{y^2}{\cos\alpha^2} = 2rx - x^2 \text{ oder}$$

(4.) $$y^2 = \cos\alpha^2.(2rx - x^2).$$

Diese Gleichung ist aber die Scheitelgleichung einer Ellipse für die große Axe, weil der Factor von x^2, wenn man die Klammern auflöst, ein ächter Bruch ist, und bezeichnen 2a und 2b resp. ihre große und kleine Axe, so ergiebt sich aus der Form von (4.):

$$a = r \text{ und } \frac{b^2}{a^2} = \cos\alpha^2, \text{ folglich}$$

$$b = r\cos\alpha.$$

IV. Aus III. folgt, daß man jede Ellipse als Projection eines Kreises ansehen kann, dessen Durchmesser der großen Axe 2a der Ellipse gleich ist. Ein Durchmesser des Kreises liegt senkrecht über der großen Axe und ist mit ihr parallel, und der Winkel α, den die Ebene des Kreises mit der Ebene der Ellipse bildet, ist aus der Gleichung $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ zu entnehmen.

Anmerkung. Aus dem Satze in IV. ist nicht nur der Zusammenhang zu erklären, welcher zwischen vielen Sätzen über die Ellipse und über den Kreis Statt findet, sondern es lassen sich solche Sätze für die Ellipse auch unmittelbar aus dem Kreise ableiten, z. B.: die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Ellipse liegen in einer geraden Linie, die durch ihren Mittelpunkt geht; zwei Sehnen einer Ellipse können sich nicht gegenseitig halbiren; legt man durch die Endpunkte einer Sehne PQ einer Ellipse Tangenten an dieselbe und verbindet ihren Durchschnittspunkt mit dem Mittelpunkt der Ellipse, so halbirt die Verbindungslinie die Sehne PQ; die Verbindungslinie paralleler Tangenten der Ellipse geht durch ihren Mittelpunkt, u. s. w. Auch der Inhalt der elliptischen Ebene läßt sich durch den Kreis bestimmen; er ist $= a^2\pi.\cos\alpha = a^2\pi \cdot \frac{b}{a} = ab\pi$.

§. 494.

Uebungs-Aufgaben über die Ellipse.

Aufgabe 1. Für welchen Punkt der Ellipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ sind die Abscisse und die Ordinate einander gleich?

Antw. Für den Punkt, dessen Abscisse $= \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ist. Berücksichtigt man die Vorzeichen nicht, so giebt es in jeder Ellipse vier solche Punkte, mit Rücksicht auf die Vorzeichen nur zwei.

Aufgabe 2. Wie groß ist die Excentricität der Ellipse

$$y^2 = 3{,}6x - 0{,}36x^2?$$

Antw. 4 Längen-Einheiten.

Aufgabe 3. Wie groß ist die Excentricität der Ellipse

$$y^2 = 2x - 8x^2?$$

Antw. 0,3307189 Längen-Einheiten.

Aufgabe 4. Im Raume liegt ein Kreis mit dem Radius r; seine Ebene schneidet, gehörig verbreitet, eine Projectionsebene E unter dem Winkel α. Man soll in dem Kreise die beiden Punkte bestimmen, deren Projectionen auf E die Brennpunkte der Ellipse sind, welche die Projection des Kreises auf E ist.

Aufl. Die gesuchten Punkte liegen in dem Durchmesser, welcher mit E parallel ist, und zwar auf verschiedenen Seiten des Mittelpunktes in der Entfernung $r \sin\alpha$ von demselben.

Aufgabe 5. Ein Punkt der Ellipse $y^2 = 6{,}4x - 0{,}64x^2$ hat die Abscisse 2; wie groß sind die Brennstrahlen nach diesem Punkte?

Antw. 3,2 und 6,8.

Aufgabe 6. Ein Punkt der Ellipse $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{25} = 1$ hat die Abscisse 1,4; wie groß sind die beiden Brennstrahlen nach diesem Punkt?

Aufl. 6,12 und 3,88.

Aufgabe 7. Zwei Ellipsen sind für dasselbe Coordinatensystem durch ihre Gleichungen gegeben:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ und } \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1;$$

wie groß ist der Inhalt des Vierecks, dessen Ecken die Durchschnittspunkte dieser Ellipsen sind?

Antw. $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$. — Die Aufgabe läßt sich unmittelbar auf die Aufg. 1. zurückführen.

Aufgabe 8. Wie groß ist die Sehne der Ellipse $y^2 = 3x - \frac{1}{2}x^2$, welche durch einen Brennpunkt geht und auf der großen Axe senkrecht steht?

Antw. 3 Längen-Einheiten.

Aufgabe 9. Dieselbe Aufgabe für die Ellipse $y^2 = \frac{1}{2}x - 3x^2$.

Aufl. $\frac{1}{18}\sqrt{3} = 0{,}096225$ Längen-Einheiten.

Aufgabe 10. Ein Punkt P der Ellipse $y^2 = 0{,}36.(20x - x^2)$ hat die Abscisse 4 und eine positive Ordinate; wie groß ist die Subtangente, die Tangente, die Subnormale und die Normale für den

Punkt P, und unter welchem Winkel φ schneidet die Tangente die große Axe der Ellipse?

Antw. Die Subtangente $10\frac{2}{3}$; die Tangente $= 11{,}6969$; die Subnormale $= 2{,}16$; die Normale $= 5{,}26361$; $\varphi = 24^\circ\ 13'\ 40''$.

Aufgabe 11. Wie heißt, in Bezug auf die vorhergehende Aufgabe, die Gleichung der Tangente und die Gleichung der Normale für den Punkt P?

Antw. Die Gleichung der Tangente: $y = 3 + \frac{9}{20}x$; die Gleichung der Normale: $y = \frac{616}{45} - \frac{20}{9}x$.

Aufgabe 12. In welchen Ellipsen stehen die conjugirten Brennstrahlen nach einem Scheitel der kleinen Axe auf einander senkrecht?

Antw. In jeder Ellipse, in welcher die große Axe zur kleinen das Verhältniß $\sqrt{2} : 1$ hat; die Excentricität ist dann der halben kleinen Axe gleich.

Aufgabe 13. In welchen Ellipsen sind die Brennpunkte die Mittelpunkte der beiden Hälften der großen Axe?

Antw. In jeder Ellipse, in welcher die große Axe zur kleinen das Verhältniß $2 : \sqrt{3}$ hat.

Aufgabe 14. Den Punkt einer Ellipse durch Construction zu finden, dessen Tangente die Axen unter einem Winkel von 45° schneidet.

Aufl. Bezeichnet u die Entfernung der Ordinate des Punktes von der kleinen Axe, so findet man $u = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, woraus die sehr einfache Construction folgt. — Es ist u der Projection der halben großen Axe auf die Sehne des elliptischen Quadranten gleich.

Aufgabe 15. Im Δ ABC ist $AB = 16'$, $AC = 20'$ und $BC = 14'$. Eine Ellipse geht durch den Punkt C und hat A und B zu ihren Brennpunkten; wie groß ist der Inhalt der elliptischen Ebene?

Antw. 801,1061 □'.

Aufgabe 16. Eine Ellipse ist durch die Gleichung

$$9y^2 + 16x^2 - 72y + 128x + 256 = 0$$

gegeben, man soll ihre Excentricität und den Inhalt der Ebene finden, welche sie umschließt.

Aufl. Die Excentricität $= 2{,}64575$ und der Inhalt der Ebene $= 37{,}6991$ □-Einh.

Aufgabe 17. Dieselbe Aufgabe für die Ellipse:

$$16y^2 + 25x^2 - 160y - 100x + 100 = 0.$$

Aufl. Die Excentricität $= 3$, die Ebene $= 62{,}83185$ □-Einh.

Aufgabe 18. Dieselbe Aufgabe für die Ellipse:

$$25y^2 + 9x^2 - 200y - 36x + 211 = 0.$$

Aufl. Die Excentricität $= 4$, die Ebene $= 47{,}123889$ □-Einh.

Aufgabe 19. Wie groß ist der Inhalt des Körpers, der durch Umdrehung der Ellipse

$$y^2 + 9x^2 - 14y - 54x + 94 = 0$$

um ihre große Axe entsteht?

Antw. 100,5309 Kub.-Einh.

Aufgabe 20. Wie groß ist der Inhalt des Körpers, der durch Umdrehung der Ellipse

$$25y^2 + 4x^2 - 100y - 24x + 36 = 0$$

um ihre kleine Axe entsteht?

Antw. 209,4395 Kub.-Einh.

Aufgabe 21. Es ist die Ellipse

$$y^2 + 9x^2 - 12y - 72x + 144 = 0$$

gegeben; man soll ihre Lage zu den Coordinatenaxen, die Länge ihrer beiden Axen, ihre Brennpunkte, den Inhalt ihrer Ebene und den Inhalt des Körpers finden, der durch ihre Umdrehung um die große Axe entsteht.

Aufl. Der Mittelpunkt hat die Coordinaten 4 und 6, die große Axe ist $= 12$ und steht auf der Abscissenlinie senkrecht, die kleine Axe ist $= 4$, die Excentricität $= 4\sqrt{2}$, der Inhalt der Ebene $= 37{,}6991$ □-Einh., der Inhalt des Körpers $= 100{,}5309$ Kub.-Einh. — Die Ellipse berührt die Abscissenlinien.

Aufgabe 22. Dieselbe Aufgabe für die Ellipse:

$$9y^2 + x^2 - 36y - 14x + 49 = 0.$$

Aufl. Die Coordinaten des Mittelpunktes sind 7 und 2, die große Axe ist $= 12$ und ist der Abscissenlinie parallel, die kleine Axe $= 4$ u. s. w., wie in der vorigen Aufgabe. Die Ellipse ist der Ellipse in der vorigen Aufgabe congruent; sie hat nur eine andre Lage zur Abscissenlinie, die sie aber auch berührt.

Aufgabe 23. Zwei conjugirte Durchmesser einer Ellipse sind 16′ und 10′ und schneiden sich unter einem Winkel von 52° 12′ 40″; wie groß ist der Inhalt der elliptischen Ebene?

Antw. 99,3087 Kub.-Einh.

Aufgabe 24. Die große Axe einer Ellipse ist $= 2a$, die kleine $= a$. Zwei Sehnen dieser Ellipse haben auch die Länge a und sind

der großen Axe parallel; wie groß sind die drei Theile der elliptischen Ebene, in welche sie durch die beiden Sehnen zerlegt wird?

Antw. Der mittlere Theil ist $= \frac{a^2}{12}(2\pi + 3\sqrt{3})$,

jeder der beiden andern Theile $= \frac{a^2}{24}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

Aufgabe 25. Die Schenkel des rechten Winkels AMC sind gegeben: MA = 9′ und MC = 6′. Die Punkte A und C sind

1) durch eine Ellipse verbunden, deren halbe große Axe MA und deren halbe kleine Axe MC ist, und

2) durch eine Parabel, deren Scheitel A und deren Axe AM ist; welcher von den beiden, A mit C verbindenden Bogen umschließt den andern, wie groß ist die Ebene, die zwischen diesen Bogen liegt und welchen Winkel δ bilden die Tangenten mit einander, welche in C an die beiden Bogen gelegt sind?

Aufl. Nimmt man A zum Anfangspunkt der Abscissen und AM zur Abscissenlinie, so ist die Gleichung

der Ellipse: $y^2 = \frac{4}{9}(18x - x^2)$,
der Parabel: $y^2 = 4x$.

Nun ist für jeden Werth von x, welcher zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 9$ liegt, $\frac{4}{9}(18x - x^2) > 4x$ oder $(18 - x).x > 9.x$; daher umschließt der elliptische Bogen den parabolischen. Die Ebene zwischen beiden ist = 6,4115 □′ und der Winkel $\delta = 18° \; 26' \; 5{,}8''$.

Aufgabe 26. Ein senkrechter Cylinder vom Radius 10′ ist so durch eine Ebene durchschnitten, daß die entstandene elliptische Ebene einen Inhalt von 400 □′ hat; wie groß sind die Axen der Ellipse und welchen Winkel α bildet ihre Ebene mit der Grundfläche des Cylinders?

Antw. Die große Axe = 25,4648′ und die kleine = 20′;
$\alpha = 38° \; 14' \; 33''$.

Aufgabe 27. Zwei Ebenen E und F schneiden sich in der Linie PQ. In der Ebene F liegt eine Ellipse, deren kleine Axe = 12′ und parallel PQ ist; die große Axe ist 20′. Welchen Winkel α müssen die beiden Ebenen mit einander bilden, wenn die Projection der Ellipse auf die Ebene E ein Kreis sein soll, und um wie viel übertrifft der Inhalt der Ellipse den Inhalt des Kreises?

Antw. $\alpha = 53° \; 7' \; 48{,}4''$; die Ellipse ist um 75,39822 □′ größer als der Kreis.

Aufgabe 28. Zwei Seiten eines Parallelogramms sind 16′ und 15′ und schneiden sich unter einem Winkel von 150°; wie groß

ist der Inhalt der Ebene der Ellipse, welche die vier Seiten dieses Parallelogramms berührt?

Antw. 94,24778 □′.

Aufgabe 29. Wie groß ist der Inhalt des Segments, welches die gerade Linie $y = 2 + \frac{1}{2}x$ von der Ebene der Ellipse $4y^2 + x^2 - 16y - 4x + 16 = 0$ abschneidet?

Antw. 0,570796 □-Einheiten.

Aufgabe 30. Für dasselbe Coordinaten-System sind die beiden Ellipsen gegeben:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) \quad \text{und} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1;$$

wie groß ist der gemeinschaftliche Theil ihrer Ebenen?

Antw. $\frac{ab}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

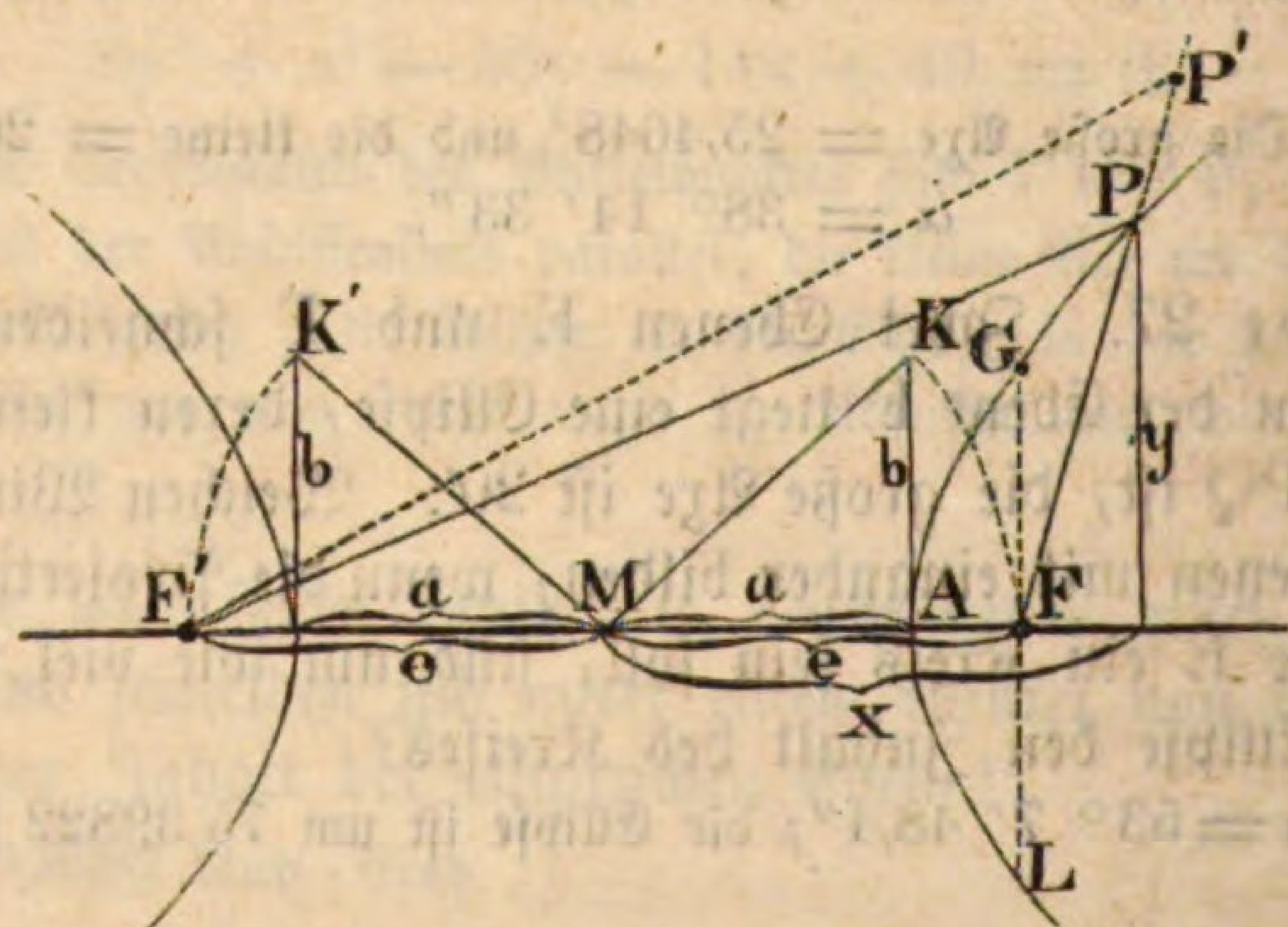
Viertes Kapitel.

Die Hyperbel.

§. 495.

Die Brennpunkte der Hyperbel.

I. Von den Brennpunkten der Hyperbel wissen wir (§. 457. III.), daß sie innerhalb der beiden conjugirten Theile, in der Axe und in gleichen Abständen vom Mittelpunkt M der Hyperbel liegen, endlich, daß die Differenz conjugirter Brennstrahlen constant,



gleich der Hauptaxe der Hyperbel ist. Sind also F und F′ die beiden Brennpunkte der Hyperbel, ist P ein beliebiger Punkt des

Theiles derselben, welchem der Brennpunkt F angehört, und bezeichnet 2a die Hauptaxe, 2b aber die Nebenaxe der Hyperbel, so ist

$$(1.)\quad F'P - FP = 2a.$$

Bezeichnen wir ferner den Abstand jedes Brennpunktes vom Mittelpunkt M der Hyperbel mit e und die Coordinaten des Punktes P für die Richtung der Hauptaxe als Abscissenlinie und M als Anfangspunkt der Abscissen mit x und y, so daß (§. 465. II.)

$$(2.)\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1$$

ist, so ergiebt sich aus (1.) zur Entwicklung von e die Gleichung:

$$(3.)\quad \sqrt{y^2 + (x+e)^2} - \sqrt{y^2 + (x-e)^2} = 2a.$$

Da diese Gleichung für jede Abscisse x richtig ist, so kann man sich die Entwicklung dadurch erleichtern, daß man $x = e$ setzt; dann entsteht:

$$y^2 + 4e^2 = (2a + y)^2 \quad \text{oder}$$

$$4e^2 = 4a^2 + 4ay, \quad \text{also}$$

$$(e^2 - a^2)^2 = a^2y^2; \quad \text{folglich aus (2):}$$

$$(e^2 - a^2)^2 = b^2(e^2 - a^2) \quad \text{oder, weil } e > a,$$

$$e^2 - a^2 = b^2, \quad \text{woraus folgt:}$$

$$(4.)\quad e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Man nennt e die Excentricität der Hyperbel und construirt e, indem man in einem Scheitel A der Hyperbel auf die Axe das Loth AK errichtet, ihm die Länge b giebt und seinen Endpunkt mit M verbindet; es ist dann $MK = e$. Nach §. 471. III. fallen MK und die auf dieselbe Weise construirte Linie MK' in die Richtungen der Asymptoten. Schlägt man mit MK oder MK' als Radius um M einen Kreis, welcher die Axe in F und F' schneidet, so sind F und F' die Brennpunkte.

II. Auch bei der Hyperbel, wie bei der Parabel und Ellipse, ist jeder Brennstrahl nach einem beliebigen Punkt P der Hyperbel eine rationale Function der Abscisse x des Punktes P. Es ist

$$F'P^2 = y^2 + (x+e)^2$$

$$FP^2 = y^2 + (x-e)^2;$$

daher folgt weiter:

$$F'P^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 + x^2 + 2ex + e^2$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2}x^2 + 2ex + a^2$$

$$F'P^2 = \frac{e^2}{a^2}x^2 + 2ex + a^2, \text{ daher}$$

$$F'P = \frac{e}{a}x + a.$$

Ganz eben so ergiebt sich:

$$FP^2 = \frac{e^2}{a^2}x^2 - 2ex + a^2, \text{ also}$$

$$FP = \frac{e}{a}x - a.$$

Daß man nicht $a - \frac{e}{a}x$ für FP setzen kann, folgt aus $\frac{e}{a}x > a$; denn e und x sind größer als a, folglich $ex > a^2$, daher $\frac{e}{a}x > a$. Aus den Gleichungen

$$F'P = \frac{e}{a}x + a$$

$$FP = \frac{e}{a}x - a$$

folgt wieder, daß $F'P - FP = 2a$ ist.

III. Aus der Gleichung $FP = \frac{e}{a}x - a$ (oder aus der *Mittelpunktsgleichung* der Hyperbel) erhält man den Brennstrahl FG, welcher auf der Axe senkrecht steht, wenn man $x = e$ setzt. Seine absolute Länge ist also $FG = \frac{e^2}{a} - a = \frac{b^2}{a}$. Verlängert man FG über F, bis die Verlängerung die Hyperbel in L trifft, so ist die ganze Länge

$$GL = \frac{2b^2}{a},$$

d. h. die Sehne der Hyperbel, welche durch den Brennpunkt geht und auf der Axe senkrecht steht, ist der Parameter der Hyperbel. Hat man also die Gleichung einer Hyperbel auf die Form $y^2 = px + qx^2$ gebracht, so ist p diese Sehne. (Vergl. Nr. (6.) in §. 465.)

IV. Liegt ein Punkt P' außerhalb der Hyperbel, so ist die Differenz seiner Entfernungen von den Brennpunkten kleiner als die Hauptaxe 2a der Hyperbel, liegt er innerhalb, so ist sie größer als 2a. (Vergl. die Anmerk. unten.)

Beweis. Liegt P' außerhalb der Hyperbel und schneidet P'F die Hyperbel in P, so ist

$F'P' - FP' = F'P' - P'P - FP$, folglich

$F'P' - FP' < F'P - FP$ oder

$F'P' - FP' < 2a$.

Analog ist der Beweis zu führen, wenn P′ innerhalb der Hyperbel liegt.

V. Ein Punkt liegt in der Hyperbel, oder außerhalb, oder innerhalb derselben, je nachdem die Differenz seiner Entfernungen von den Brennpunkten der Hauptaxe 2a gleich ist, oder kleiner als sie, oder größer.

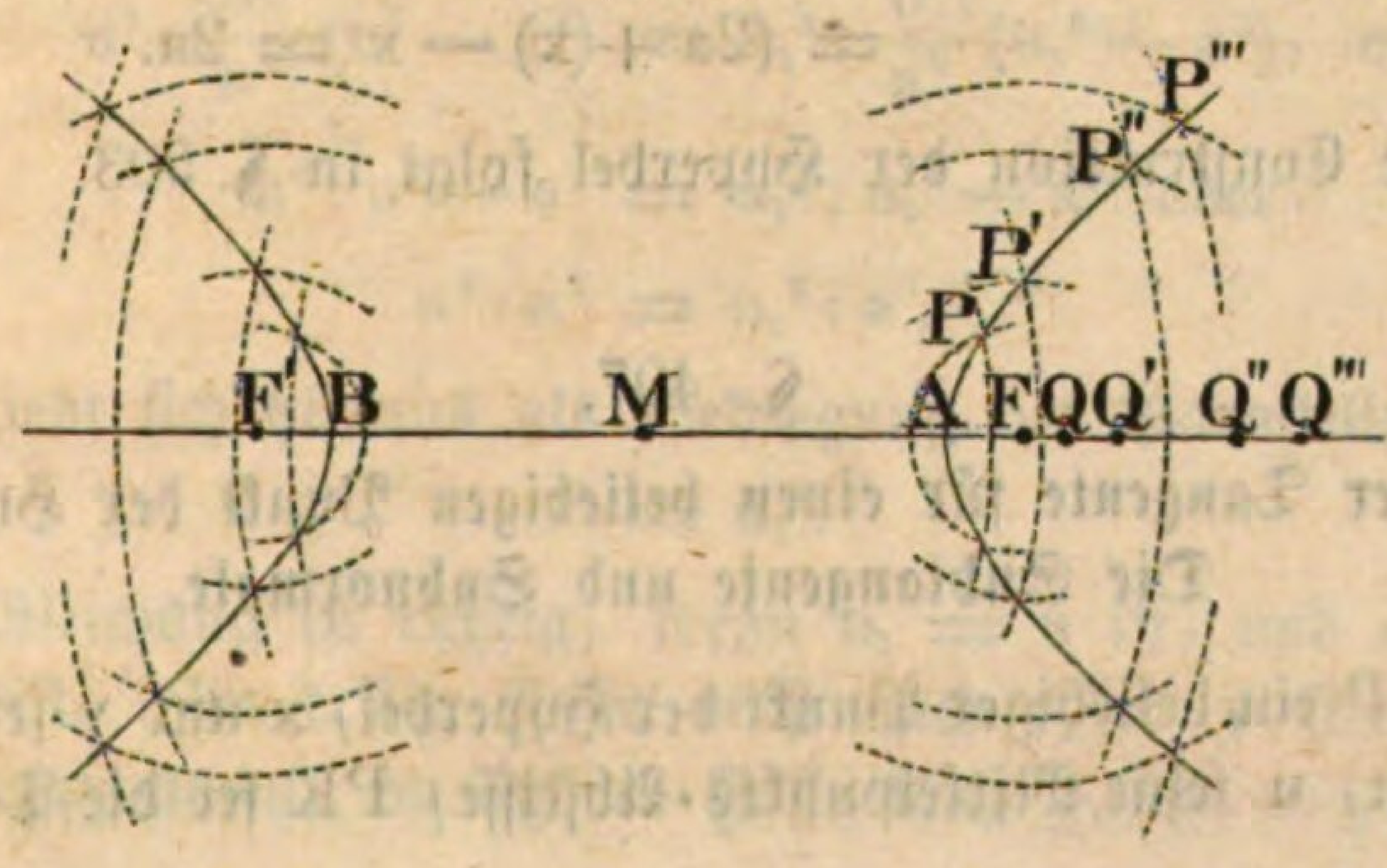
Der Satz folgt unmittelbar aus IV. und dem hervorgehobenen Gesetze in I.

Anmerkung. Liegt ein Punkt in der Richtung der Nebenaxe einer Hyperbel, so ist er von den beiden Brennpunkten gleich weit entfernt; befindet er sich nicht in der Richtung der Nebenaxe, so liegt er dem Brennpunkte näher, welcher mit ihm auf derselben Seite der Nebenaxe liegt. (Beweis einfach.) Hierauf ist zu achten, wenn von der Differenz conjugirter Brennstrahlen oder von der Differenz der Entfernungen eines beliebigen Punktes von den Brennpunkten die Rede ist; die Differenz ist natürlich immer so zu verstehen, daß die kleinere Linie von der größeren abgezogen werden soll.

§. 496.

Construction der Hyperbel.

Um beliebig viele Punkte der Hyperbel zu construiren, kann man das in §. 495. I. hervorgehobene Gesetz anwenden, nach welchem für jeden Punkt P der Hyperbel $F'P - FP = 2a$ ist. Soll die Hyperbel die beiden Axen 2a und 2b erhalten, so wähle man in einer Geraden den Punkt M zum Mittelpunkt, mache $MA = MB = a$ und $MF = MF' = e = \sqrt{a^2 + b^2}$; dann werden A und B die Scheitel, F und F′ die Brennpunkte der zu construirenden Hyperbel. Wählt man nun in der Richtung der Linie AB rechts von F beliebig viele Punkte Q, Q′, Q″, Q‴ u. s. w. und schlägt um F′ Kreise mit den Radien

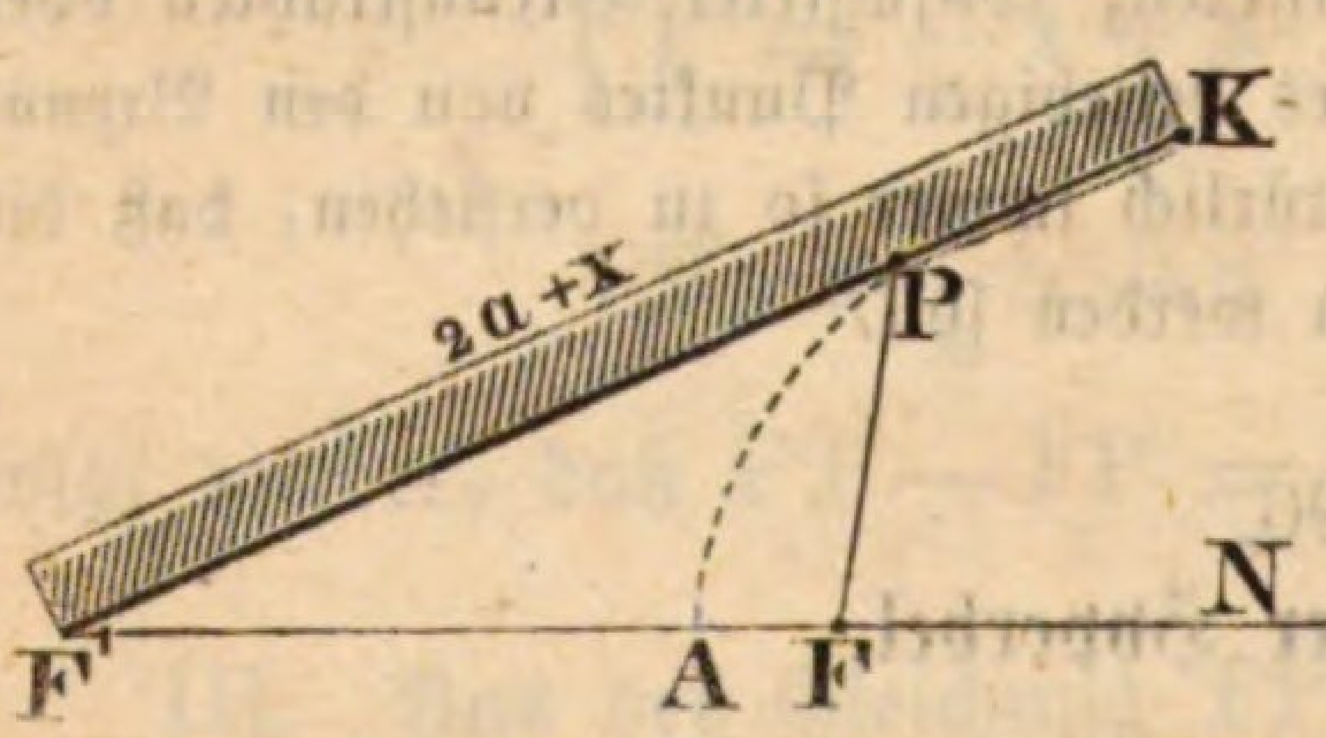


BQ, BQ', BQ'', BQ''' u. s. w., um F aber Kreise mit den Radien AQ, AQ', AQ'', AQ''' u. s. w., und schneiden sich die entsprechenden Kreise in P, P', P'', P''' u. s. w., so sind alle diese Durchschnittspunkte Punkte der verlangten Hyperbel, weil für jeden solchen Punkt P

$$F'P - FP = BQ - AQ = BA = 2a$$

ist. Auf die angegebene Weise ergeben sich nur Punkte der einen beider conjugirten Hyperbeln; will man auch Punkte der andern construiren, so muß man die Kreise mit den Radien BQ, BQ' u. s. w. um F, und die Kreise mit den Radien AQ, AQ' u. s. w. um F' schlagen. — Daß die Punkte Q, Q' u. s. w. rechts von F (oder links von F') liegen müssen, hat darin seinen Grund, daß $F'P + FP > F'F$ sein muß, also auch $BQ + AQ > F'F$ oder $F'Q + FQ > F'F$.

Auch durch stetige Bewegung kann man eine Hyperbel beschreiben. Man gebe einem Lineal F'K die Länge $2a + x$, wo x beliebig ist, und denke sich die eine Ecke F' so in dem einen Brennpunkt F' der zu erzeugenden Hyperbel befestigt, daß das Lineal nur um diesen Punkt F' drehbar ist. Den einen Endpunkt eines Fadens von der Länge x befestige man in K, den andern in dem zweiten Brennpunkt F. Wenn man dann mit dem Bleistift in den Faden eingreift, und ihn anspannend, während das Lineal drehend um F' bewegt wird, an dasselbe andrückt, so beschreibt die Spitze des Bleistiftes die Hyperbel. Der Scheitel A wird erzeugt, wenn F'K in der Richtung F'N liegt.



Der Beweis ist sehr einfach. Für jeden erzeugten Punkt P der Curve ist

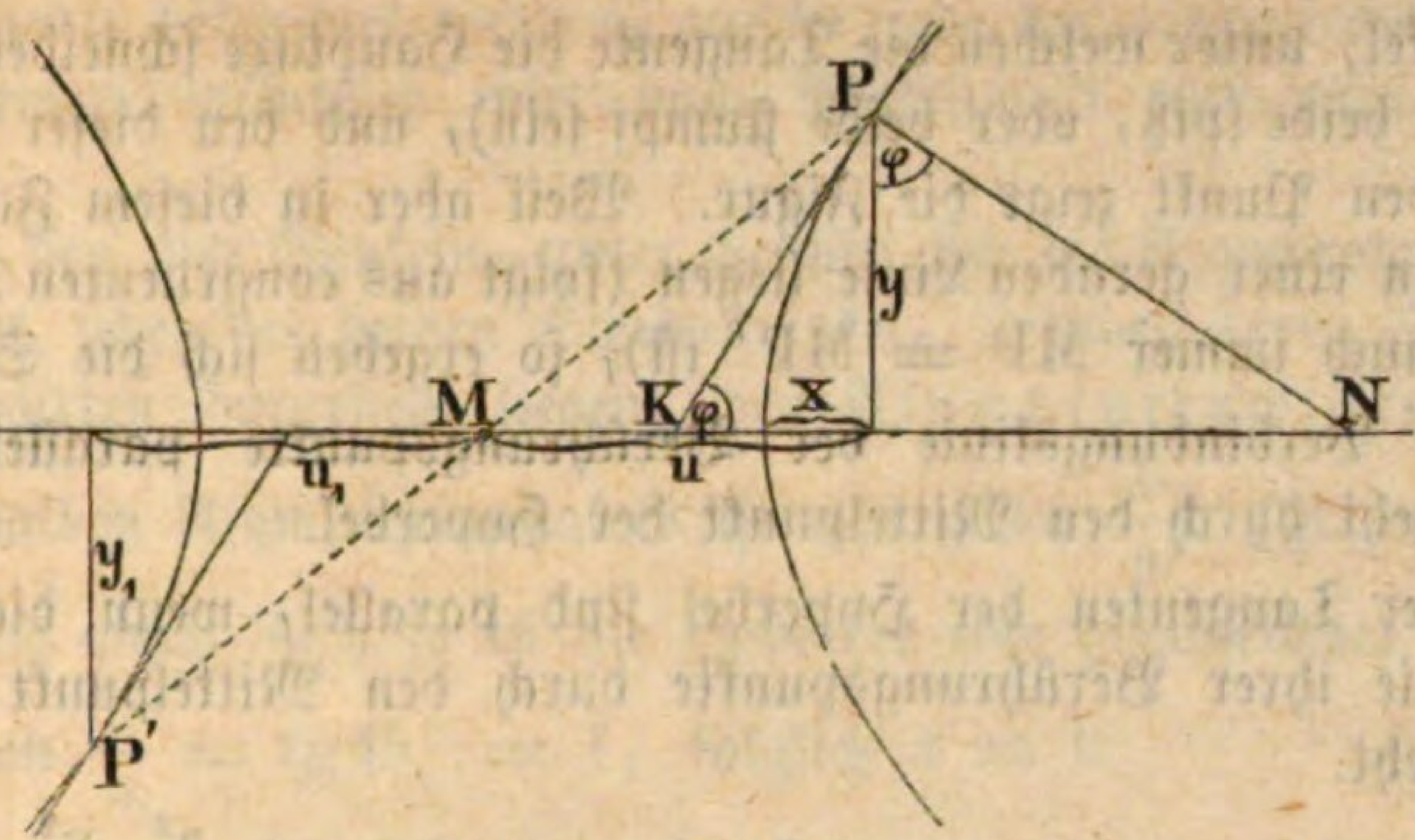
$$F'P - FP = F'K - (FP + PK)$$
$$= (2a + x) - x = 2a.$$

Eine andere Construction der Hyperbel folgt in §. 503.

§. 497.

Lage der Tangente für einen beliebigen Punkt der Hyperbel. Die Subtangente und Subnormale.

Es sei P ein beliebiger Punkt der Hyperbel, x und y seine Scheitel-Coordinaten, u seine Mittelpunkts-Abscisse; PK sei die Tangente für



den Punkt P und schneide die Hauptaxe in K unter dem Winkel φ, PN sei die Normale. Nach §. 472. (2.) ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p + 2qx}{2y}$$

und weil $p = \frac{2b^2}{a}$ und $q = \frac{b^2}{a^2}$ ist, so folgt

$$(1.) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a + x}{y} = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{u}{y}.$$

Aus $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{u}{y}$ kann beurtheilt werden, welche Tangenten der Hyperbel mit einander parallel sind. Ist P' ein anderer Punkt der Hyperbel und sind u_1 und y_1 seine Coordinaten, so sind die durch P und P' gelegten Tangenten mit einander parallel, wenn

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{u}{y} = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{u_1}{y_1}$$

ist, woraus folgt:

$$u^2 : y^2 = u_1^2 : y_1^2 \text{ oder}$$

$$u^2 : \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2) = u_1^2 : \frac{b^2}{a^2}(u_1^2 - a^2), \text{ also}$$

$$u^2 : u^2 - a^2 = u_1^2 : u_1^2 - a^2 \text{ oder}$$

$$u^2 : a^2 = u_1^2 : a^2.$$

Es ergiebt sich hieraus als Bedingung der Parallelität:

$$u^2 = u_1^2.$$

Diese Gleichung ist richtig, wenn $u_1 = u$ ist, und auch, wenn $u_1 = -u$ ist. Im ersten Falle muß auch $y_1 = y$ sein, d. h. P' fällt mit P zusammen; im andern Falle muß $y_1 = -y$ sein (denn

die Winkel, unter welchen die Tangente die Hauptaxe schneiden, müssen entweder beide spitz, oder beide stumpf sein), und den dieser Lage entsprechenden Punkt zeigt die Figur. Weil aber in diesem Falle P, M und P′ in einer geraden Linie liegen (folgt aus congruenten Dreiecken, so daß auch immer $MP = MP'$ ist), so ergeben sich die Sätze:

Die Verbindungslinie der Berührungspunkte paralleler Tangenten geht durch den Mittelpunkt der Hyperbel.

Zwei Tangenten der Hyperbel sind parallel, wenn die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte durch den Mittelpunkt der Hyperbel geht.

Die Subtangente ist gleich $y \cot g \varphi = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{u}$, woraus folgt:

(2.) Die Subtangente $= \frac{u^2 - a^2}{u} = \frac{2ax + x^2}{a + x}$.

Die Subnormale QN ist gleich $y \operatorname{tg} \varphi$, folglich:

(3.) Die Subnormale $= \frac{b^2}{a^2}(a + x) = \frac{b^2}{a^2} u$.

Die Länge MK ergiebt sich aus der Subtangente; es ist

$$MK = u - \frac{u^2 - a^2}{u}, \text{ folglich}$$

(4.) $MK = \frac{a^2}{u}$.

Aus (4.) folgt eine einfache Construction des Punktes K, also der Tangente PK. Schlägt man über u einen Halbkreis und trägt a von M aus als Sehne in denselben ein, so ist MK die Projection dieser Sehne auf u. — Setzt man ferner $MK = \frac{a}{u} \cdot a$, so ergiebt sich, weil $\frac{a}{u}$ ein ächter Bruch ist, $MK < a$. Ist u negativ, so wird auch MK negativ, woraus folgt: K liegt immer zwischen dem Mittelpunkt der Hyperbel und dem Scheitel, welcher mit P auf derselben Seite der Nebenaxe liegt.

Für $u = \pm \infty$ wird $MK = 0$, und weil

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{u}{y} = \frac{b}{a} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{u}\right)^2}} \text{ ist,}$$

so wird, wenn $u = \infty$ ist, $\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{b}{a}$, d. h. die Tangente geht in die Asymptote über. Jede Asymptote kann daher als

eine Tangente betrachtet werden, welche jede der conjugirten Hyperbeln in einem unendlich weit vom Mittelpunkt entfernten Punkte berührt.

Von den vier Winkeln, unter welchen sich die Asymptoten schneiden, heißt jeder der beiden Scheitelwinkel, zwischen deren Schenkeln die conjugirten Hyperbeln liegen, der Asymptotenwinkel. Die tg. des halben Asymptotenwinkels ist also gleich $\frac{b}{a}$. Ist der Asymptotenwinkel gleich $90°$, so ist die Hyperbel eine gleichseitige; denn es ist alsdann $\frac{b}{a} = tg\,45° = 1$, folglich $a = b$.

Anmerkung. Die Gleichung der Tangente für irgend einen Punkt P der Hyperbel läßt sich auf folgende Weise entwickeln. Nehmen wir den Mittelpunkt der Hyperbel zum Anfangspunkt der Abscissen, die Hauptaxe zur Abscissenlinie, und bezeichnen wir die gegebenen Coordinaten des Punktes P mit x_1 und y_1, so ist

$$(1.) \quad \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2} = -1.$$

Da die Tangente durch P gehen soll, so hat ihre Gleichung die Form:

$$(2.) \quad y - y_1 = p(x - x_1),$$

und p bedeutet in dieser Gleichung die tg. des Winkels φ, welchen die berührende Linie mit der X-Axe bildet. Nun war aber $tg\,\varphi = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{u}{y}$, und setzen wir x_1 statt u, und y_1 statt y, so folgt:

$$(3.) \quad p = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}.$$

Wird dieser Werth aber in (2.) substituirt, so folgt die Gleichung der Tangente:

$$y - y_1 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \quad \text{oder}$$

$$a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = b^2 x_1 x - b^2 x_1^2 \quad \text{oder}$$

$$a^2 y_1 y - b^2 x_1 x = a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2.$$

Dividirt man durch $a^2 b^2$, so entsteht:

$$\frac{y_1 \cdot y}{b^2} - \frac{x_1 \cdot x}{a^2} = \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2};$$

daher folgt aus (1.) die Gleichung der Tangente für den Punkt P:

$$(4.) \quad \frac{y_1 \cdot y}{b^2} - \frac{x_1 \cdot x}{a^2} = -1.$$

§. 498.

Folgerungen. Die Tangenten zwischen den Asymptoten.

I. Verbindet man den Mittelpunkt M der Hyperbel mit dem Berührungspunkt P einer Tangente, und bildet die Verbindungslinie

MP mit der Axe den Winkel ψ, die Tangente aber den Winkel φ, so müssen ψ und φ in einem bestimmten Zusammenhange mit einander stehen. Derselbe ergiebt sich unmittelbar aus §. 497. (1.), wenn man $\cot g\,\psi$ statt $\frac{u}{y}$ setzt; man erhält

$$(1.)\quad tg\,\varphi = \frac{b^2}{a^2}\cdot \cot g\,\psi \quad \text{oder} \quad tg\,\varphi\,.\,tg\,\psi = \frac{b^2}{a^2},$$

woraus noch folgt:

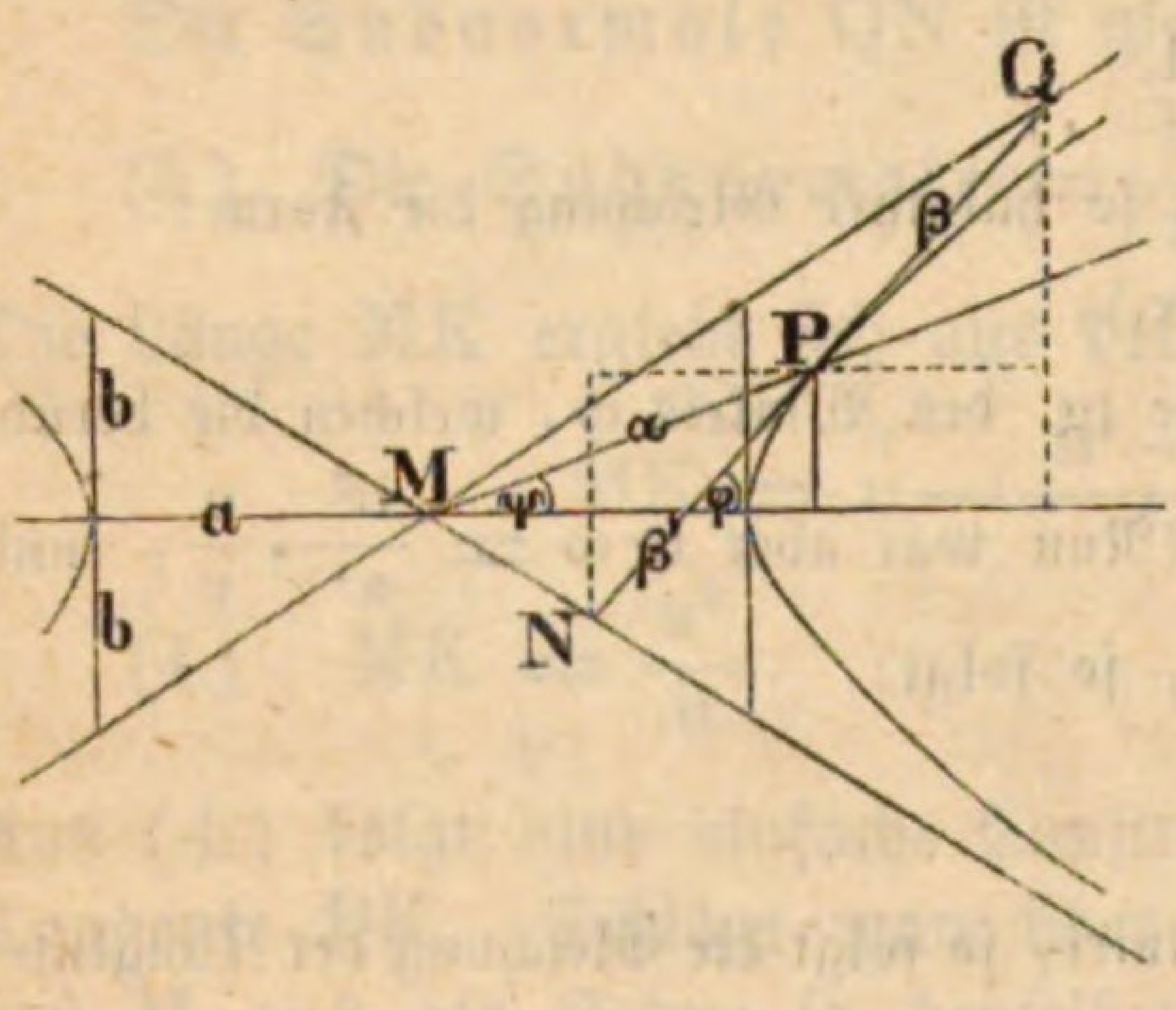
$$(2.)\quad a^2 \sin\varphi\,.\,\sin\psi = b^2\cos\varphi\,.\,\cos\psi.$$

Ferner folgt aus dieser Gleichung:

$$\frac{b\cos\psi}{a\sin\varphi} = \frac{a\sin\psi}{b\cos\varphi},$$

und hieraus ergiebt sich noch:

$$(3.)\quad \frac{b\cos\psi + a\sin\psi}{a\sin\varphi + b\cos\varphi} = \frac{b\cos\psi - a\sin\psi}{a\sin\varphi - b\cos\varphi}.$$



II. Die Gerade, welche durch den Mittelpunkt M der Hyperbel und den Berührungspunkt P einer Tangente geht, halbirt den Theil dieser Tangente, welcher zwischen den Asymptoten liegt; sie *halbirt* daher auch jede Linie, *welche* mit dieser Tangente parallel ist und ihre Endpunkte in den Asymptoten hat. — Den ersten Theil des Satzes kann man auch so aussprechen: der Theil jeder Tangente der Hyperbel, welcher zwischen den Asymptoten liegt, wird im Berührungspunkt halbirt.

Beweis. Ist der Satz für die Tangente QN wahr, so gilt er auch für jede mit QN parallele Linie (§. 80. III.). Bezeichnen wir MP mit α und PQ und PN resp. mit β und β', so wird behauptet:

$$\beta = \beta'.$$

Nun ergiebt sich aber mit Hülfe der durch punktirte Linien angedeuteten Hülfsconstruction aus ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{\beta\sin\varphi + \alpha\sin\psi}{\beta\cos\varphi + \alpha\cos\psi} = \frac{b}{a} \quad \text{und}$$

$$\frac{\beta'\sin\varphi - \alpha\sin\psi}{\alpha\cos\psi - \beta'\cos\varphi} = \frac{b}{a}.$$

Entwickelt man aus diesen Gleichungen β und β', so folgt:

$$\beta = \frac{b\cos\psi - a\sin\psi}{a\sin\varphi - b\cos\varphi}\cdot\alpha$$

$$\beta' = \frac{b\cos\psi + a\sin\psi}{a\sin\varphi + b\cos\varphi}\cdot\alpha.$$

Aus (3.) ergiebt sich hieraus $\beta = \beta'$.

Durch Multiplication der beiden vorstehenden Gleichungen erhält man noch, wenn man $\beta' = \beta$ setzt:

$$(4.)\quad \beta^2 = \frac{b^2\cos\psi^2 - a^2\sin\psi^2}{a^2\sin\varphi^2 - b^2\cos\varphi^2}\cdot\alpha^2.$$

III. Für die weiteren Untersuchungen ist es noch wichtig, die Linien α und β (MP und PQ) resp. durch die Winkel ψ und φ auszudrücken. Man erhält zunächst α aus der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel. Es ist die Abscisse des Punktes P gleich $\alpha.\cos\psi$, die Ordinate gleich $\alpha.\sin\psi$; folglich findet die Gleichung Statt:

$$\frac{(\alpha.\sin\psi)^2}{b^2} - \frac{(\alpha.\cos\psi)^2}{a^2} = -1.$$

Hieraus ergiebt sich aber:

$$(5.)\quad \alpha^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos\psi^2 - a^2\sin\psi^2},$$

und wenn man dieser Gleichung die Form giebt:

$$\alpha = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - (a^2+b^2)\sin\psi^2}},$$

so erkennt man, daß α am kleinsten wird, wenn $\psi = 0$ ist ($\alpha = \pm a$); mit steigenden Werthen von ψ wächst auch der absolute Werth von α, bis $\sin\psi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oder $tg\,\psi = \frac{b}{a}$ wird, in welchem Falle α unendlich groß ist (Asymptote). Ist $(a^2+b^2)\sin\psi^2 > b^2$, so wird α imaginär.

Um β zu finden, braucht man nur den Werth von α^2 aus (5.) in (4.) zu substituiren; man erhält

$$(6.)\quad \beta^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin\varphi^2 - b^2\cos\varphi^2}.$$

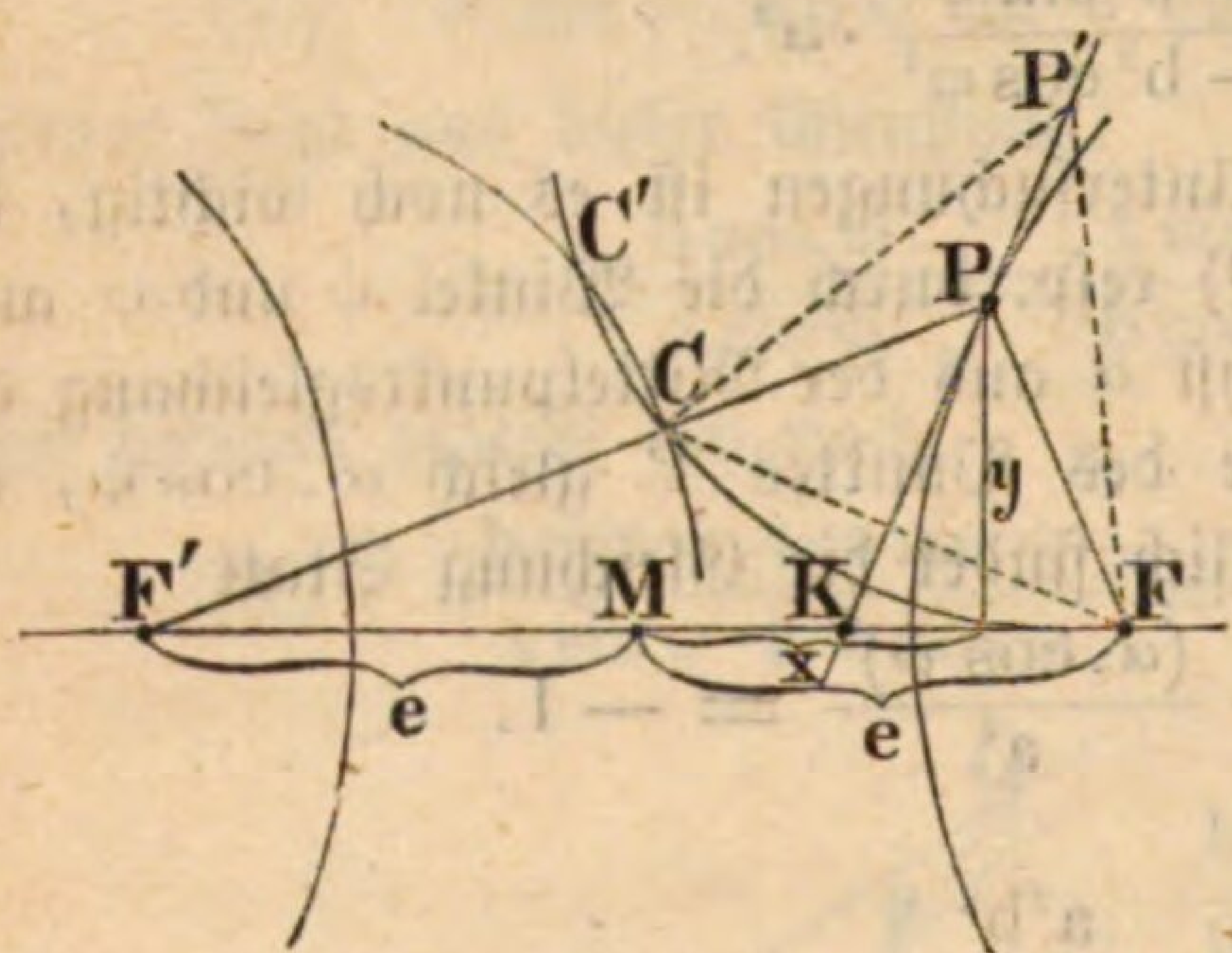
Wie oben ergiebt sich, daß β am kleinsten ist für $\varphi = 90°$ ($\beta = \pm b$), und daß β mit fallenden Werthen von φ wächst und für $tg\,\varphi = \frac{b}{a}$ in die Asymptoten übergeht. — Aus (6.) und (5.) ergiebt sich noch:

$$(7.)\quad \begin{cases} a^2\sin\varphi^2 - b^2\cos\varphi^2 = \frac{a^2b^2}{\beta^2} \text{ und} \\ b^2\cos\psi^2 - a^2\sin\psi^2 = \frac{a^2b^2}{\alpha^2}. \end{cases}$$

§. 499.

Lehrsatz. Construction der Tangenten.

I. Conjugirte Brennstrahlen, die nach einem beliebigen Punkt P der Hyperbel gezogen sind, bilden mit der Tangente des Punktes P gleiche Winkel. (Die Tangente halbirt den Winkel, welchen die Brennstrahlen einschließen; daher halbirt die Normale den Nebenwinkel desselben.)



Beweis. Die Tangente der Hyperbel für den Punkt P, dessen Mittelpunkts-Coordinaten x und y sind, sei PK, so wird behauptet:

$$\angle F'PK = \angle FPK.$$

Ist K der Durchschnittspunkt der Tangente mit der Axe, so verhält sich:

$$F'K : FK = e + x - \text{Subtg.} : e - x + \text{Subtg.}$$

Hieraus folgt aber nach §. 497. (2.):

$$F'K : FK = e + x - \frac{x^2 - a^2}{x} : e - x + \frac{x^2 - a^2}{x}$$

$$= e + \frac{a^2}{x} : e - \frac{a^2}{x}$$

$$= \frac{e}{a}x + a : \frac{e}{a}x - a.$$

Nach §. 495. II. ist aber $\frac{e}{a}x + a = F'P$ und $\frac{e}{a}x - a = FP$; folglich verhält sich:

$$F'K : FK = F'P : FP;$$

daher halbirt PK den Winkel F′PF.

Betrachtet man die Hyperbel als eine physische, Lichtstrahlen zurückwerfende Linie, so werden alle Lichtstrahlen, welche, dem einen Brennpunkte zueilend, die Hyperbel treffen, von ihr nach dem anderen Brennpunkte hin zurückgeworfen; daher die Benennung Brennpunkte.

II. Construction der Tangenten. Um durch einen gegebenen Punkt P eine Tangente an die Hyperbel zu legen, unterscheiden wir zwei Fälle:

1) P liegt in der Hyperbel. Man ziehe die conjugirten Brennstrahlen nach P und halbire den Winkel, den sie einschließen; die Halbirungslinie ist die verlangte Tangente.

2) P liegt außerhalb der Hyperbel (in der Figur P').

Analysis. P'K sei die gesuchte Tangente, P der Berührungspunkt. P' ist gegeben, es kommt darauf an, einen zweiten Punkt der Tangente zu finden. Zieht man aber die conjugirten Brennstrahlen PF' und PF, trägt PF auf PF' ab, gleich PC, und zieht FC, so muß die Tangente P'K die Linie FC senkrecht schneiden und halbiren, weil sie im gleichschenkligen Dreieck PFC den Winkel an der Spitze halbirt, und der Mittelpunkt von FC ist ein zweiter leicht zu construirender Punkt der Tangente. Denn der eine Endpunkt von FC ist gegeben, der andere C durch geometrische Oerter zu construiren. Es ist $F'C = 2a$ als Differenz conjugirter Brennstrahlen, und C liegt sonach in der Peripherie des Kreises um F' mit dem Radius $2a$; dann aber ist Δ P'FC auch gleichschenklig, und C liegt also auch in der Peripherie des Kreises um P' mit dem Radius P'F.

Construction. Man schlage um den Brennpunkt (F'), welcher am weitesten von P' entfernt ist, einen Kreis mit dem Radius $2a$, und um P' schlage man einen Kreis mit seiner Entfernung (P'F) von dem Brennpunkt, der ihm am nächsten liegt; den Durchschnittspunkt C beider Kreise verbinde man mit F, und den Mittelpunkt von CF mit P'; letztere Linie ist die gesuchte Tangente. — Will man den Berührungspunkt P unmittelbar construiren, so verbinde man F' mit C und verlängere F'C, bis die Verlängerung die Hyperbel (in P) trifft; P ist der Berührungspunkt.

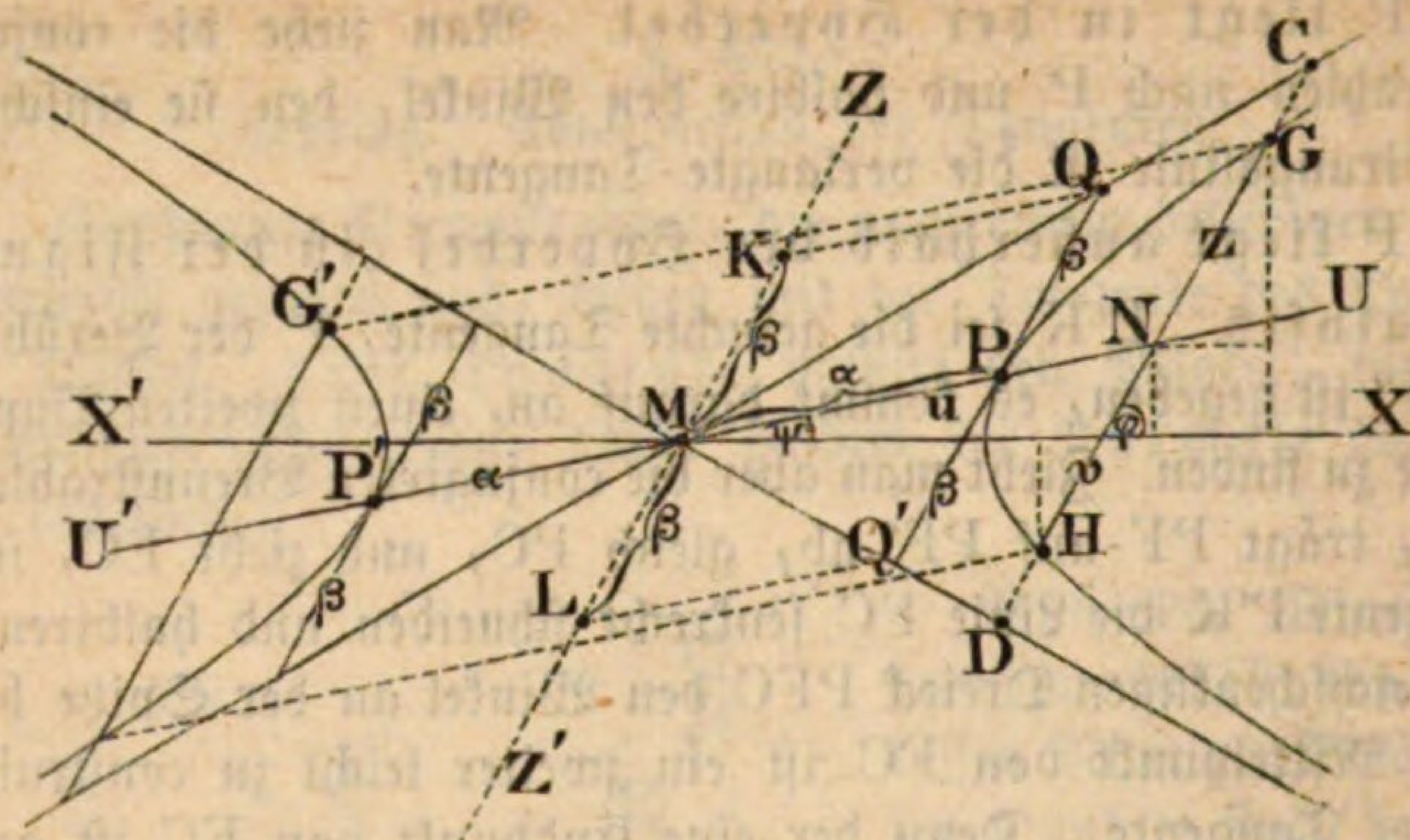
Da es zwei Durchschnittspunkte der beiden Kreise giebt (C und C'), so sind auch von P' aus zwei Tangenten an die Hyperbel zu legen.

§. 500.

Die Durchmesser der Hyperbel.

I. Jede durch den Mittelpunkt einer Hyperbel gelegte gerade Linie, welche die Hyperbel schneidet, ist ein Durchmesser derselben; denn sie halbirt alle Sehnen der Hyperbel, welche mit der Tangente parallel sind, die man durch den Durchschnittspunkt der Geraden und der Hyperbel an letztere legen kann.

Beweis. Es sei QQ' die Tangente für den Punkt P, und GH eine mit QQ' parallele Sehne; es wird behauptet, daß die Linie U'U, welche durch M und P geht, diese Sehne halbirt, d. h. es soll, wenn man $NG = z$ und $NH = v$ setzt, $z = v$ sein. Bezeichnen wir MN mit u, den Winkel PMX, welchen MP mit der Hauptaxe bildet,



mit ψ und den Winkel, welchen die Tangente QQ', also auch die Sehne GH, mit MX bildet, mit φ, so ergeben sich aus der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1,$$

wenn wir ihr folgende Form geben:

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$$

und sie auf die beiden Punkte G und H anwenden, mit Hülfe der in der Figur angedeuteten Hülfsconstruction die beiden Gleichungen:

$$1)\quad a^2(z\sin\varphi+u\sin\psi)^2-b^2(u\cos\psi+z\cos\varphi)^2=-a^2b^2$$

$$2)\quad a^2(v\sin\varphi-u\sin\psi)^2-b^2(u\cos\psi-v\cos\varphi)^2=-a^2b^2.$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so entsteht.

$$a^2[(z^2-v^2)\sin\varphi^2+2u(z+v)\sin\varphi\sin\psi]$$
$$-b^2[(z^2-v^2)\cos\varphi^2+2u(z+v)\cos\varphi\,.\cos\psi]=0.$$

Hebt man durch $z+v$, so erhält man:

$$(z-v).(a^2\sin\varphi^2-b^2\cos\varphi^2)+2u(a^2\sin\varphi\,.\sin\psi-b^2\cos\varphi.\cos\psi)=0.$$

Nach §. 498. (2.) ist $a^2\sin\varphi\,.\sin\psi=b^2\cos\varphi\,.\cos\psi$; daher folgt:

$$(z-v).(a^2\sin\varphi^2-b^2\cos\varphi^2)=0,$$

und weil $a^2\sin\varphi^2-b^2\cos\varphi^2$ nicht gleich 0 sein kann — es wäre dann $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$, und HG würde parallel der Asymptote sein müssen, also nach §. 471. III. keine Sehne erzeugen können —, so folgt:

$$z=v.$$

II. Zieht man durch M die Linie ZZ' parallel der Tangente QQ', so erhält man aus der Gleichung 1) in I., also aus

$$a^2(z\sin\varphi+u\sin\psi)^2-b^2(u\cos\psi+z\cos\varphi)^2=-a^2b^2,$$

die Gleichung der Hyperbel für das Coordinaten-System, dessen schiefwinklige Axen der Durchmesser U'U und die Linie Z'Z sind. Es entsteht:

$$z^2(a^2 \sin\varphi^2 - b^2 \cos\varphi^2) + 2uz(a^2 \sin\varphi . \sin\psi - b^2 \cos\varphi . \cos\psi)$$
$$- u^2(b^2 \cos\psi^2 - a^2 \sin\psi^2) = - a^2 b^2.$$

Wie schon oben angegeben, ist $a^2 \sin\varphi . \sin\psi = b^2 \cos\varphi . \cos\psi$; daher bleibt:

$$z^2(a^2 \sin\varphi^2 - b^2 \cos\varphi^2) - u^2(b^2 \cos\psi^2 - a^2 \sin\psi^2) = - a^2 b^2.$$

Bezeichnet man nun, wie dies schon früher geschah, die Linie MP mit α und die Tangente QQ' zwischen den Asymptoten mit 2β, also PQ mit β, so folgt mit Hülfe von §. 498. (7.) aus der vorstehenden henden Gleichung:

$$z^2 \cdot \frac{a^2 b^2}{\beta^2} - u^2 \cdot \frac{a^2 b^2}{\alpha^2} = - a^2 b^2 \text{ oder}$$

$$\frac{z^2}{\beta^2} - \frac{u^2}{\alpha^2} = -1.$$

Diese Gleichung stimmt in der Form mit der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel vollständig überein.

III. Die vorstehende Gleichung zeigt ferner, daß auch Z'Z ein Durchmesser der Hyperbel ist; denn diese Linie halbirt alle Sehnen der Hyperbel, welche mit U'U parallel sind, z. B. die Sehne GG'. — Diese Sehnen verbinden Punkte der conjugirten Hyperbeln; man kann sie äußere Sehnen nennen, zum Unterschiede von solchen Sehnen, deren Punkte auf der concaven Seite der Hyperbel liegen, also innere Sehnen sind, wie GH. — Betrachtet man nämlich Z'Z als Abscissenaxe und U'U als Ordinatenaxe, so gilt die Gleichung

$$\frac{z^2}{\beta^2} - \frac{u^2}{\alpha^2} = -1$$

auch für diese Axen, man muß nur unter z die Abscisse und unter u die Ordinate verstehen. Diese Gleichung ist aber in Bezug auf u eine reine quadratische, woraus die Behauptung oben folgt.

Zwei Durchmesser der Hyperbel, wie U'U und Z'Z, von denen jeder die Sehnen der Hyperbel halbirt, welche mit dem andern parallel sind, heißen conjugirte Durchmesser, und zwar heißt von beiden derjenige (U'U), welcher die Hyperbel schneidet, der Haupt-Durchmesser, der andere (Z'Z) der Neben-Durchmesser.

Man versteht aber die Bezeichnung »conjugirte Durchmesser« noch in einem engeren Sinne und meint damit bestimmte begrenzte Theile der Durchmesser U'U und Z'Z. Der Haupt-Durchmesser bezeichnet dann den Theil von U'U, welcher zwischen den conjugirten

Hyperbeln liegt, also die Linie $PP' = 2\alpha$; der Neben-Durchmesser ist der Theil von $Z'Z$, welcher entsteht, wenn man von den Punkten Q und Q', in welchen die mit $Z'Z$ parallele Tangente die Asymptoten schneidet, Parallelen mit $U'U$ zieht. Der Neben-Durchmesser ist also $KL = 2\beta$ oder gleich QQ'. Die durch den Mittelpunkt der Hyperbel erzeugten Hälften von PP' und KL nennt man conjugirte Halbmesser (α und β), und wir werden uns weiterhin dieser Bezeichnung bedienen, weil sie jedes Mißverständniß beseitigt; die Hälfte einer Linie setzt eine begrenzte Linie voraus.

IV. Aus dem Gesagten lassen sich leicht die Sätze ableiten, welche mit den bei conjugirten Durchmessern der Ellipse angeführten analog sind. Namentlich liegen die Mittelpunkte aller parallelen Sehnen der Hyperbel in einer geraden Linie, nämlich in einem Durchmesser, und zwei Sehnen der Hyperbel können sich nicht gegenseitig halbiren.

Ferner kann man ohne Benutzung der Brennpunkte zu jedem Durchmesser seinen conjugirten, und zu jedem Punkt der Hyperbel die Tangente construiren. Zieht man zu dem gegebenen Durchmesser eine parallele Sehne und verbindet ihren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Hyperbel, so hat man in dieser Verbindungslinie die Richtung des conjugirten Durchmessers. Die Sehne ist eine äußere, oder innere, je nachdem der gegebene Durchmesser ein Haupt- oder Neben-Durchmesser ist. — Um durch den Punkt P der Hyperbel eine Tangente zu legen, ziehe man den Durchmesser durch P, construire den zugehörigen conjugirten und ziehe mit ihm durch P eine Parallele.

V. Verlängert man die Sehne GH über beide Endpunkte, bis sie die Asymptoten in C und D schneidet, so ist nach §. 498. II. der Mittelpunkt N der Sehne GH auch der Mittelpunkt der Linie CD. Hieraus folgt aber:

$$CG = DH.$$

Dies Gesetz gilt auch für die äußere Sehne, z. B. für GG'; es läßt sich leicht geometrisch beweisen, daß ZZ' jede in den Asymptoten endende Linie halbirt, welche mit UU' parallel ist, wenn UU' jede solche Linie halbirt, die mit ZZ' parallel ist. Aus dem Gesagten folgt aber, daß bei jeder Geraden, welche die Hyperbel und die Asymptoten schneidet, die Theile, welche zwischen der Hyperbel und den Asymptoten liegen, einander gleich sind.

§. 501.

Lehrsätze.

1) Die Differenz der Quadrate conjugirter Halbmesser der Hyperbel ist constant, gleich der Differenz der Quadrate der halben Axen.

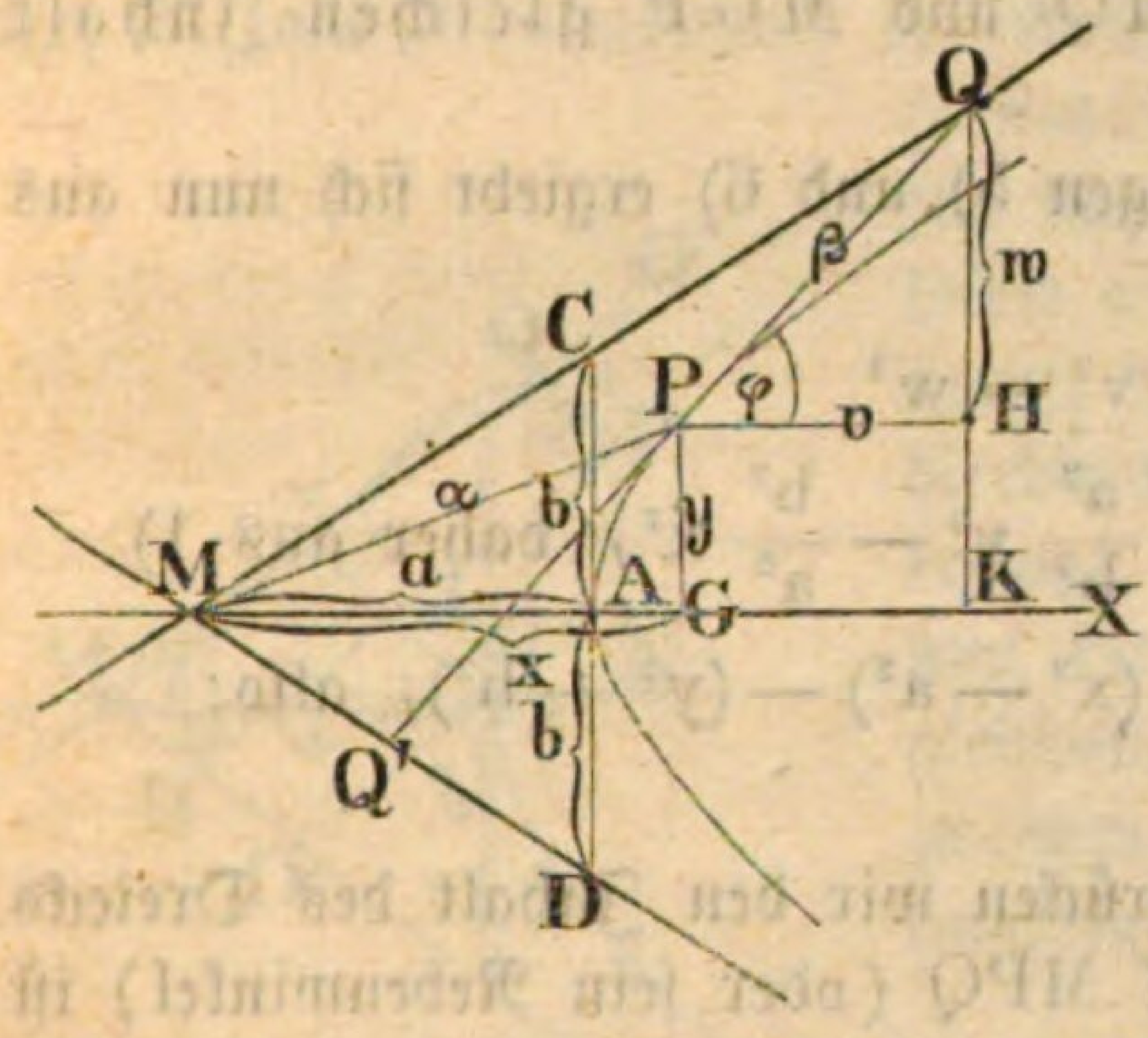
2) Das Product conjugirter Halbmesser der Hyperbel, multiplicirt mit dem sin. des Winkels, den sie mit einander bilden, ist constant, gleich dem Product der beiden halben Axen.

Bezeichnen α und β die conjugirten Halbmesser und γ den Winkel, den sie einschließen, a und b die halben Axen, so heißt die Behauptung:

I. $\alpha^2 - \beta^2 = a^2 - b^2$.

II. $\alpha\beta \sin\gamma = ab$.

Beweis. P ist ein beliebiger Punkt der Hyperbel, x und y sind seine Mittelpunkts-Coordinaten; die Tangente QQ′ berührt die Hyperbel in P, hat ihre Endpunkte in den Asymptoten und bildet mit der Axe MX der Hyperbel den Winkel φ. Verbindet man den Mittelpunkt M der Hyperbel mit P, so sind MP und PQ conjugirte Halbmesser, resp. gleich α und β. Endlich ist noch $QK \perp MX$ und $PH \perp QK$ gefällt; es sei $PH = v$ und $QH = w$.



Zum Beweise benutzen wir die Mittelpunkts-Gleichung der Hyperbel in Bezug auf die Coordinaten des Punktes P, ferner die Formel für $\operatorname{tg}\varphi$ in §. 497. (1.), indem wir $\frac{w}{v}$ statt $\operatorname{tg}\varphi$ setzen, endlich eine Proportion, welche aus Aehnlichkeit der Dreiecke QKM und CAM entspringt. So entsteht:

1) $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$.

2) $\frac{w}{v} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$.

3) $\frac{w+y}{v+x} = \frac{b}{a}$.

Aus 2) folgt:

4) $w = \frac{b^2x}{a^2y} \cdot v$

und setzen wir diesen Werth in 3) ein, so erhalten wir

$$\frac{b^2xv + a^2y^2}{a^2y} = \frac{b}{a}v + \frac{b}{a}x \text{ oder}$$

$$b^2xv - abyv = abxy - a^2y^2, \text{ also}$$

$$bv(bx - ay) = ay(bx - ay).$$

Durch den Factor $bx - ay$, der nicht Null sein kann, heben wir nun und erhalten:

$$5)\quad v = \frac{a}{b} y, \text{ daher aus 4).}$$

$$6)\quad w = \frac{b}{a} x.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Multiplication:

$$7)\quad vw = xy,$$

so daß also die Dreiecke PHQ und MGP gleichen Inhalt haben.

Mit Benutzung der Gleichungen 5) und 6) ergiebt sich nun aus dem Pythagoreischen Lehrsatz:

$$\alpha^2 - \beta^2 = x^2 + y^2 - v^2 - w^2$$

$$= x^2 + y^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2, \text{ daher aus 1):}$$

$$= x^2 + y^2 - (x^2 - a^2) - (y^2 + b^2); \text{ also:}$$

$$\text{I.}\quad \alpha^2 - \beta^2 = a^2 - b^2.$$

Um das Gesetz II. zu beweisen, drücken wir den Inhalt des Dreiecks MKQ doppelt aus. Der Winkel MPQ (oder sein Nebenwinkel) ist in dem Lehrsatze γ genannt worden; wir erhalten daher mit Hülfe der Gleichung 7):

$$\tfrac{1}{2}\alpha\beta\sin\gamma + xy + vy = \tfrac{1}{2}(y + w)(x + v),$$

$$\alpha\beta\sin\gamma + 2xy + 2vy = xy + yv + xw + vw,$$

$$\alpha\beta\sin\gamma = xw - yv \text{ oder aus 6) und 5):}$$

$$= \frac{b}{a} x^2 - \frac{a}{b} y^2$$

$$= \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{ab}, \text{ daher aus 1):}$$

$$\text{II.}\quad \alpha\beta\sin\gamma = ab.$$

Anmerkung 1. Es ist $\Delta MQQ' = \alpha\beta\sin\gamma$; daher sagt das Gesetz II.: alle Tangenten der Hyperbel schneiden von der Ebene des Asymptotenwinkels Dreiecke von gleichem Inhalt ab (vom Inhalt ab oder vom Inhalte des Δ MCD).

Anmerkung 2. In jeder Ellipse haben wir ein Paar gleich langer conjugirter Durchmesser gefunden; ist die Ellipse ein Kreis, so hat sie im Sinne des §. 477. keine Durchmesser; jede durch den Mittelpunkt gelegte Gerade ist dann eine Axe. Bei der Hyperbel führt die Untersuchung über gleiche conjugirte Durchmesser zu einem anderen Resultat. Aus dem Gesetz I.:

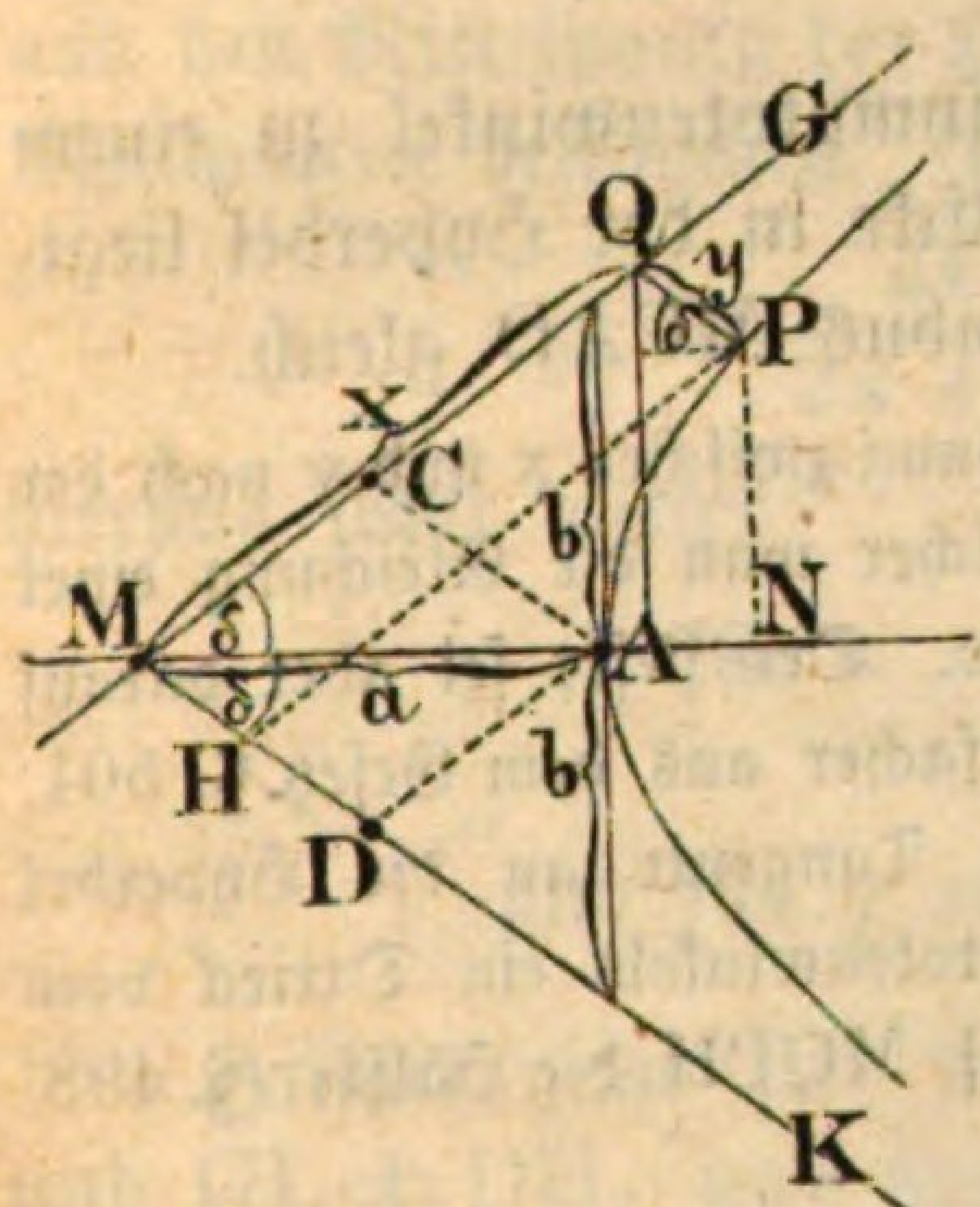
$$\alpha^2 - \beta^2 = a^2 - b^2$$

folgt, daß α nur gleich β sein kann, aber auch immer gleich β sein muß, wenn $a = b$ ist. Bei der gleichseitigen Hyperbel sind also conjugirte Halbmesser immer gleich lang, bei der ungleichseitigen Hyperbel niemals.

§. 502.

Die Gleichung der Hyperbel für das Coordinatensystem, dessen Axen die Asymptoten sind.

Die Asymptoten der Hyperbel sind MG und MK, die Axe ist MN, der Asymptotenwinkel $= 2\delta$. Wählt man nun MG zur Abscissenaxe, M zum Anfangspunkt der Abscissen und MK zur Ordinatenaxe, so findet man die Gleichung der Hyperbel für dieses Coordinatensystem, wenn man durch einen beliebigen Punkt P der Hyperbel die Linien PQ parallel KM zieht, hierdurch die Coordinaten des Punktes P erzeugt, $MQ = x$ und $QP = y$, und nun die auf P bezogene Mittelpunktsgleichung der Hyperbel in eine Gleichung zwischen x und y verwandelt. Die Mittelpunktsgleichung für den Punkt P ist:



$$(1.)\quad \frac{PN^2}{b^2} - \frac{MN^2}{a^2} = -1.$$

Nun ist aber, wie man leicht aus der Figur erkennt:

$$PN = x \sin\delta - y \sin\delta$$
$$MN = x \cos\delta + y \cos\delta$$

und setzt man diese Werthe in (1.) ein und bringt zugleich die Nenner fort, so entsteht:

$$a^2 (x \sin\delta - y \sin\delta)^2 - b^2 (x \cos\delta + y \cos\delta)^2 = -a^2 b^2.$$

Löst man die Klammern auf und ordnet, so ergiebt sich:

$$(2.)\quad x^2 (a^2 \sin\delta^2 - b^2 \cos\delta^2) - 2xy (a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2)$$
$$+ y^2 (a^2 \sin\delta^2 - b^2 \cos\delta^2) = -a^2 b^2.$$

Nun ist aber $\operatorname{tg}\delta = \frac{b}{a}$, folglich

$$a \sin\delta = b \cos\delta; \text{ daher auch}$$
$$a^2 \sin\delta^2 - b^2 \cos\delta^2 = 0 \text{ und}$$
$$a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2 = 2a^2 \sin\delta^2 = \frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Setzt man diese Werthe in (2.) ein, so folgt:

$$-2xy \cdot \frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2} = -a^2 b^2 \text{ oder}$$

$$(3.)\quad xy = \frac{a^2 + b^2}{4} = \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

Das Product der Coordinaten ist also constant, gleich $\left(\frac{e}{2}\right)^2$, d. h. gleich dem Quadrat der halben Excentricität.

Zieht man $PH \parallel GM$, so ist der Inhalt des Parallelogramms $MQPH = xy.\sin 2\delta$, und weil $\frac{1}{2} e^2 \sin 2\delta = ab$ ist, so folgt

$$xy \sin 2\delta = \frac{e^2}{4} \cdot \frac{2ab}{e^2}, \text{ oder}$$

$$(4.)\qquad \# MQPH = \frac{ab}{2},$$

d. h. alle Parallelogramme, welche den Asymptotenwinkel zu einem Winkel haben und deren gegenüberliegende Ecke in der Hyperbel liegt, haben denselben Inhalt; sie sind dem Rhombus MCAD gleich.

Anmerkung. Im Vorstehenden ist die Gleichung zwischen x und y nach der allgemeinen Methode entwickelt worden, nach welcher man die Gleichung einer Curve auf ein anderes Coordinatensystem überträgt. Der Leser sei aber darauf aufmerksam gemacht, daß diese Gleichung noch einfacher aus dem Gesetz §. 501. Anmerk. 1. folgt. Denkt man sich durch P eine Tangente an die Hyperbel gelegt, so schneidet sie von der Ebene des Asymptotenwinkels ein Dreieck vom Inhalt ab ab. Von diesem Dreieck ist aber das $\#$ MQPH die Hälfte (§. 498. II. und §. 86. Nr. 3.); d. h. es ist

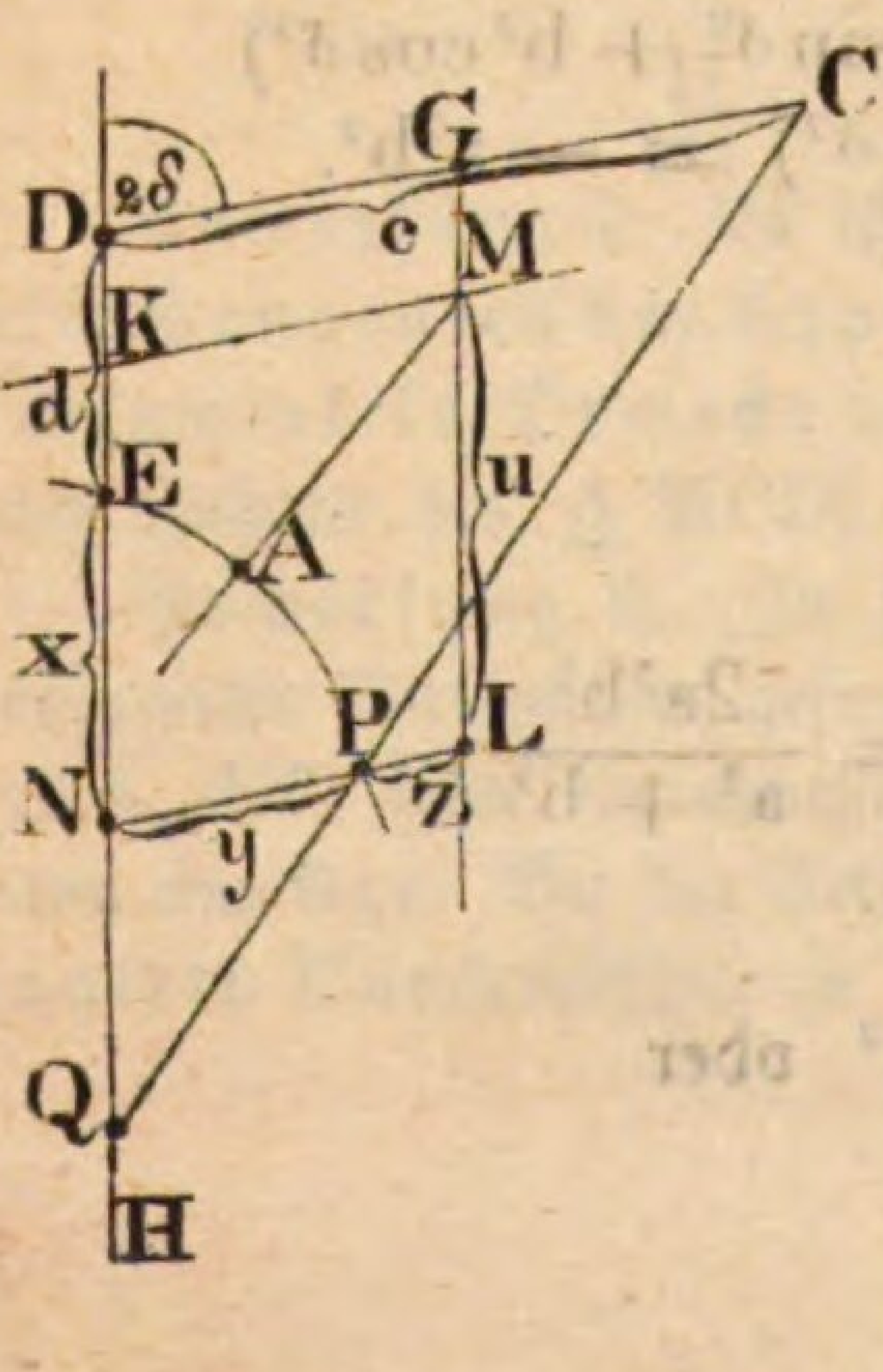
$$xy \,.\, \sin 2\delta = \frac{ab}{2}.$$

Setzt man den Werth $\sin 2\delta = \frac{2ab}{e^2}$ ein, so folgt:

$$xy = \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

§. 503.

Eine Anwendung. Eine Construction der Hyperbel.



I. Aufgabe. Es ist der beliebige Winkel CDH gegeben und in seinen Schenkeln die Punkte C und E. Man denke sich nun C mit jedem Punkt Q der Richtung DH verbunden und durch den Mittelpunkt N der Linie QE eine mit CD parallele Linie gelegt, welche CQ in P schneiden mag; es soll die Curve bestimmt werden, in welcher alle diese Punkte P liegen.

Auflösung. Es sei CD = c, DE = d und der Nebenwinkel des Winkels CDE gleich

2δ. Wählen wir EH zur Abscissenaxe und E zum Anfangspunkt der Abscissen, denken wir uns alle Ordinaten parallel DC, bezeichnen wir die Abscisse EN des Punktes P mit x, die Ordinate NP mit y: so ergiebt sich, weil auch NQ = x ist, aus ähnlichen Dreiecken:

$$x : y = 2x + d : c.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$(1.)\quad 2xy + dy - cx = 0.$$

Die Curve ist nach §. 467. Anmerk. 2. eine **Hyperbel**; für $d = 0$ geht sie in die mit DH parallele Linie $y = \frac{c}{2}$ über. Um die Axen und den Mittelpunkt der Hyperbel zu finden, wollen wir zunächst ihre Asymptoten bestimmen. Aus (1.) folgt

$$y = \frac{cx}{2x + d} \quad \text{und} \quad x = \frac{dy}{c - 2y};$$

hieraus folgt weiter:

$$\text{für } x = -\frac{d}{2} \text{ ist } y = \infty$$

$$\text{und für } y = +\frac{c}{2} \text{ ist } x = \infty.$$

Halbirt man ED in K und DC in G, zieht man KM ǂ DC und GL ǂ DH, und schneiden sich diese Linien in M, so sind MK und ML die **Asymptoten** der Hyperbel, M ist ihr **Mittelpunkt**, die Halbirungslinie MA des Asymptotenwinkel KML = 2δ ist die Richtung der **Hauptaxe** und ihr Durchschnittspunkt A mit der Hyperbel ein **Scheitel**.

Für die Asymptoten als Coordinatenaxen finden wir die Gleichung der Hyperbel, wenn wir NP bis zum Durchschnittspunkt L mit der Asymptote verlängern. Es sei ML = u, LP = z, so folgt:

$$x = u - \frac{d}{2}$$

$$y = \frac{c}{2} - z;$$

daher entsteht aus (1.):

$$2\left(u - \frac{d}{2}\right)\left(\frac{c}{2} - z\right) + d\left(\frac{c}{2} - z\right) - c\left(u - \frac{d}{2}\right) = 0 \quad \text{oder}$$

$$cu - 2uz - \tfrac{1}{2}cd + dz + \tfrac{1}{2}cd - dz - cu + \tfrac{1}{2}cd = 0.$$

Diese Gleichung geht über in:

$$(2.)\quad uz = \frac{cd}{4}.$$

Bezeichnet a die halbe Hauptaxe, b die halbe Nebenaxe der Hyperbel, so war nach §. 502. (3.) $uz = \frac{a^2 + b^2}{4}$; daher folgt, wenn man noch $\frac{b}{a}$ der Tangente des halben Asymptotenwinkels gleich setzt, aus (2.):

$$a^2 + b^2 = cd \quad \text{und}$$

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \delta.$$

Substituirt man b aus der zweiten Gleichung in die erste, so folgt:

$$a^2 + a^2 \operatorname{cotg} \delta^2 = cd$$

$$a^2 \operatorname{cosec} \delta^2 = cd; \text{ folglich}$$

$$(3.) \quad a = \sin \delta . \sqrt{cd}, \text{ daher}$$

$$(4.) \quad b = \cos \delta . \sqrt{cd}.$$

Die Hyperbel wird eine gleichseitige, wenn $2\delta = 90°$ ist, in welchem Falle dann auch $a = b$ ist.

II. Die Auflösung der vorstehenden Aufgabe führt zu einer recht bequemen Construction der Hyperbel. Da es in praktischen Fällen darauf ankommt, eine bestimmte Hyperbel zu construiren, so stellen wir uns die Aufgabe: die Hyperbel zu construiren, deren Hauptaxe 2a, deren Nebenaxe 2b ist.

Es fragt sich, wie c, d und δ zu wählen sind, damit die nach I. zu construirende Hyperbel die verlangte wird. Zunächst ist δ leicht zu bestimmen. Wählt man eine gerade Linie zur Richtung der Hauptaxe, in ihr einen Punkt M als Mittelpunkt der Hyperbel, so sind unmittelbar aus a und b die Asymptoten zu construiren; der Asymptotenwinkel muß für 2δ gewählt werden, also $\operatorname{tg} \delta = \frac{b}{a}$. Um c und d zu bestimmen, gehen wir davon aus, daß die Gleichung der verlangten Hyperbel für die Asymptoten als Coordinatenaxen nach §. 502. (3.) die Form

$$uz = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

haben muß. Da nun diese Gleichung für die Hyperbel in I. die Form

$$uz = \frac{cd}{4}$$

hat, so müssen c und d so gewählt werden, daß $cd = a^2 + b^2$ wird, oder, wenn wir die Excentricität der verlangten Hyperbel mit e bezeichnen, daß

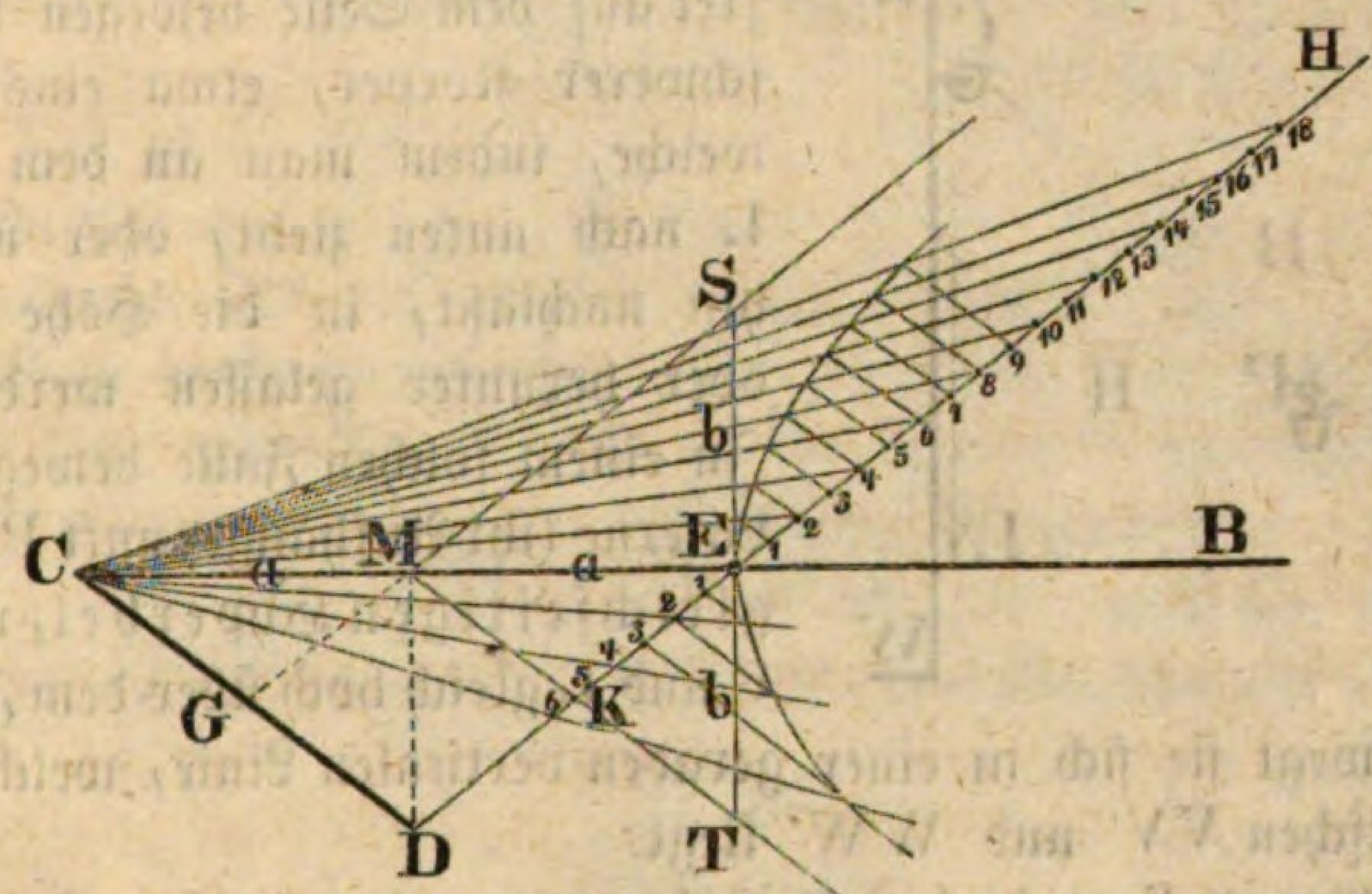
$$cd = e^2$$

ist. Es können sonach c und d sehr verschieden gewählt werden, am bequemsten aber wählt man

$$c = d = e.$$

Diese Wahl gewährt aber noch einen besonderen Vortheil. Denn ist (in der vorigen Figur) ED = DC, also auch EK = KM, so geht die Linie MA, welche den Winkel KML halbirt, durch E, d. h. A fällt in E, ME wird also die halbe Hauptaxe, und weil C, M und E in einer geraden Linie liegen und MC = ME ist, so werden C und E die beiden Scheitel der Hyperbel, deren Mittelpunkt M bleibt.

Construction. M soll der Mittelpunkt der Hyperbel werden, MB die Richtung der Hauptaxe. Man mache ME = MC = a, errichte in E eine Senkrechte auf MB, mache ES = ET = b und ziehe MS und MT; diese Linien sind dann die Asymptoten der zu

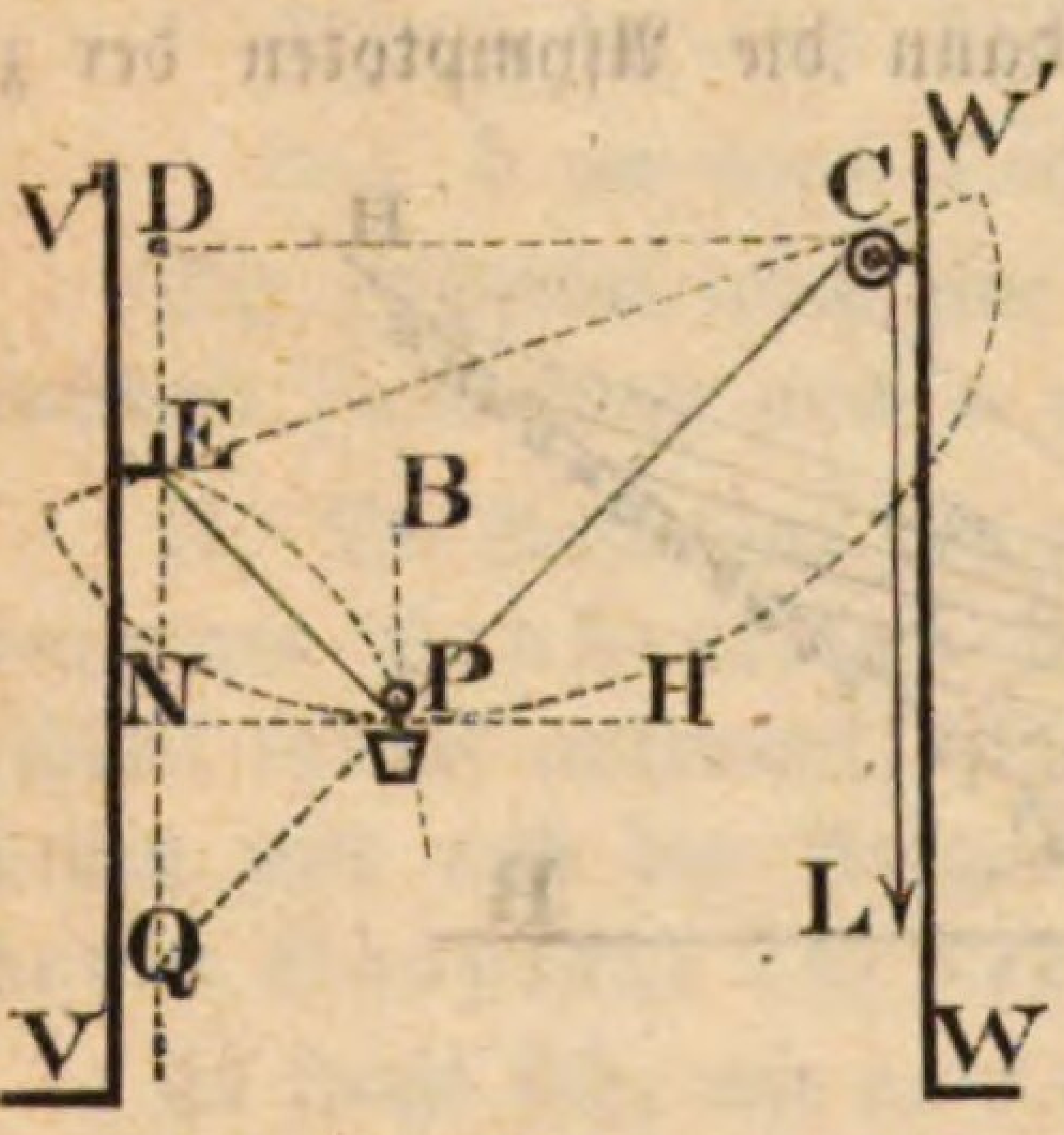


construirenden Hyperbel. Man ziehe jetzt durch E eine Parallel DH zur Asymptote MS und trage auf DH von E aus nach beiden Seiten hin beliebig viele gleiche Theile ab. Dann verbinde man C mit den Theilpunkten 2, 4, 6, 8, u. s. w. und ziehe durch jeden Theilpunkt eine Parallele mit der anderen Asymptote MT und verlängere jede Parallele, bis sie die Linie schneidet, welche von C aus nach dem Theilpunkt gezogen ist, welcher auf derselben Seite von E liegt und eine doppelt so hohe Nummer trägt, so daß z. B. die Parallele durch 3 verlängert wird, bis sie die von C nach 6 gehende Linie schneidet. Alle Durchschnittspunkte sind dann Punkte der verlangten Hyperbel.

Zieht man durch C eine Parallele mit der Asymptote MT, welche DH in D trifft, so wird man leicht in dieser Figur die vorhergehende wieder erkennen. Der Leser möge, um sich leichter zurecht zu finden, die vorliegende Figur so betrachten, daß ihm EH vertical liegend erscheint, E oben; die Buchstaben sind in beiden Figuren übereinstim-

mend gewählt. Daß ED = DC = e = $\sqrt{a^2 + b^2}$ ist, wird man leicht erkennen. Zunächst ist das Δ DCE gleichschenklig, denn jeder Winkel an der Grundlinie CE ist dem halben Asymptotenwinkel gleich; zieht man also MD, so steht MD $\perp$ CE. Dann ist aber Δ DMC $\cong$ ΔDME $\cong$ ΔSEM, folglich ist DC = DE = SM = e. Endlich wird DC in G und DE in K halbirt, weil die Theile dieser Linien zu einander das Verhältniß CM : ME haben.

III. VV′ und WW′ sollen zwei verticale Wände vorstellen. In der einen ist in E ein Haken, in der andern in C eine Rolle befestigt; ein Seil, welches man sich vollkommen biegsam denken möge, ist in E befestigt, geht über die Rolle in C und hängt auf der andern Seite vertical herab, wo es (in L) gehalten wird. An dem Seile hängt (in P) an einer zweiten Rolle, die sich frei auf dem Seile bewegen kann, ein schwerer Körper, etwa eine Laterne, welche, indem man an dem Seile in L nach unten zieht, oder nach oben hin nachläßt, in die Höhe gehoben, oder herunter gelassen werden kann. In einem solchen Falle bewegt sich die Laterne (ihr Aufhängepunkt P) in einer **gleichseitigen Hyperbel**; nur *wenn* C und E gleich hoch über dem Fußboden liegen, bewegt sie sich in einer geraden verticalen Linie, welche in der Mitte zwischen VV′ und WW′ liegt.



Der Grund liegt in der Auflösung der oben in I. gestellten Aufgabe und in zwei Gesetzen über die Ellipse. Denken wir uns, es wird in irgend einem Augenblicke die Bewegung unterbrochen, es tritt also Ruhe ein; so ist das Seil jetzt nicht nur in E, sondern auch in C als befestigt zu betrachten. Welche Lage hat dann der Aufhängepunkt P? Die Laterne wird durch die Schwerkraft nach dem Fußboden gezogen, sie wird also so tief gesunken sein, als die Seillänge es zuläßt. Denkt man sich aber die Laterne am Seile so hin und her bewegt, daß das Seil immer gleichmäßig angespannt ist, so bewegt sich der Aufhängepunkt, d. h. der Punkt, in welchem die Rolle, an der die Laterne hängt, auf das Seil drückt, in einer Ellipse, deren Brennpunkte C und E sind, und deren große Axe gleich der Länge des Seiles ist. Der tiefste Punkt dieser Ellipse muß also P sein; er ist der Punkt, in welchem eine horizontale Linie (die man sich allmählich vom Fußboden nach oben bewegt denken mag) die Ellipse berührt. Ist also NH die Tangente für den Punkt P, so liegt NH **horizontal**,

folglich die Normale PB des Punktes P vertical. Weil nun die Normale jedes Punktes der Ellipse mit den conjugirten Brennstrahlen desselben gleiche Winkel bildet, so ist

$$\sphericalangle EPB = \sphericalangle CPB,$$

und verlängert man CP bis zu ihrem Durchschnittspunkt Q mit der verticalen Linie EQ, die man durch E legen kann, so ist daher auch

$$\sphericalangle PEQ = \sphericalangle PQE,$$

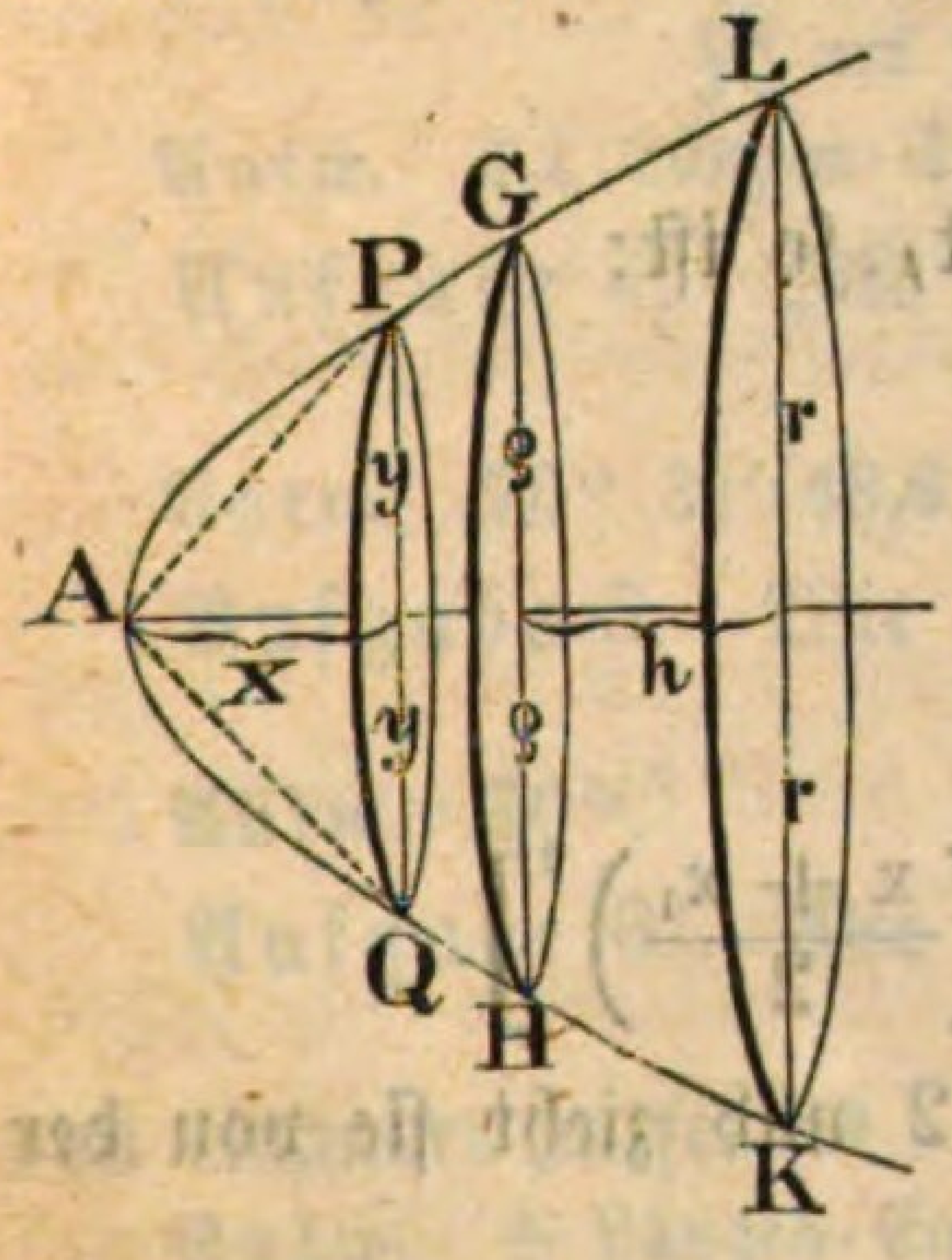
d. h. das Δ PEQ ist gleichschenklig. Weil aber PN horizontal war, also PN $\perp$ EQ, so ist N der Mittelpunkt von EQ. Die Construction des Punktes P fällt also genau mit der Construction des Punktes P in I. zusammen. Man zieht, um die Lage des Aufhängepunktes in jedem beliebigen Augenblick der Bewegung zu finden, von C aus eine gerade Linie CQ, deren Länge der Länge des Seiles in diesem Augenblick gleich ist, nach einem Punkte der durch E gelegten verticalen Linie, halbirt EQ in N und errichtet in N auf EQ eine Senkrechte, deren Durchschnittspunkt mit CQ der Punkt P ist. Denkt man sich von C eine Senkrechte CD auf die Verlängerung von QE gefällt, so ist jeder Punkt P zu construiren, indem man durch den Mittelpunkt von EQ eine Parallele mit DC zieht und sie bis zu ihrem Durchschnittspunkte mit CQ verlängert. So stimmt die Construction wörtlich mit der in I. überein. Weil aber $\sphericalangle$ CDQ $= 90°$ ist, also auch die Asymptoten auf einander senkrecht stehen, so ist die Hyperbel eine gleichseitige.

§. 504.

Aufgabe.

Die Hyperbel zu kubiren.

Auflösung. Das hyperbolische Konoid oder das Hyperboloid APQ, welches durch Umdrehung der hyperbolischen Ebene um die Axe AX entsteht, ist ein Simpson'scher Körper; denn die auf der Umdrehungsaxe senkrechte Durchschnittsfläche, welche von A den Abstand x hat, ist gleich



$$y^2\pi = \frac{b^2\pi}{a^2}(2ax + x^2),$$

also eine Function des zweiten Grades von x. Der Körper hat auch die Eigenschaft, daß jeder zwischen zwei auf der Axe senkrechten Durchschnittsflächen liegende Theil desselben zwischen den beiden prismatischen Körpern (Cylindern) liegt, welche resp. eine Durch-

schnittsfläche zur Grundfläche und die Entfernung der Durchschnittsflächen von einander zur Höhe haben; man überzeugt sich hiervon leicht durch paralleles Fortrücken einer Durchschnittsfläche. Der Inhalt des Körpers APQ kann also nach der Simpsonschen Regel, kürzer aber unmittelbar aus der Durchschnittsfläche berechnet werden. Es ist

die Durchschnittsfläche $= \frac{2b^2\pi}{a} x + \frac{b^2\pi}{a^2} x^2$, daher

der Inhalt des Körpers $= \frac{2b^2\pi}{a} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{b^2\pi}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3}$.

Hieraus folgt durch eine einfache Umformung:

I. **Der Inhalt des Hyperboloids APQ**

$$= \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2\pi}{3} \cdot (3a + x).$$

Den Inhalt des Körpers, den das zur Sehne AP gehörige Segment bei der Umdrehung um AX beschreibt, erhält man durch Subtraction des Kegels APQ von dem Hyperboloid APQ. Man erhält:

II. **Der Inhalt des Körpers, den das zu AP gehörige Segment bei der Umdrehung um AX beschreibt:**

$$= \frac{b^2x^2\pi}{3a} = \tfrac{1}{6} x^2\pi . p, \text{ wenn p der Parameter ist.}$$

Um den Inhalt der **hyperbolischen körperlichen Zone** GHKL zu finden, kann man den Körper AGH von ALK abziehen; man kann aber auch unmittelbar nach der Simpsonschen Regel rechnen. Bezeichnen ρ und r die Radien der Grundflächen, h die Höhe, gehört zu ρ die Abscisse x, zu r die Abscisse x_1, und bezeichnet man den Radius der Mittelfläche mit m, so ist der Inhalt Z der körperlichen Zone:

$$(1.) \quad Z = \frac{r^2 + 4m^2 + \rho^2}{6} \pi h.$$

Weil aber zu m die Abscisse $\frac{x + x_1}{2}$ gehört, so ist:

$$\rho^2 = \frac{b^2}{a^2} [2ax + x^2]$$

$$r^2 = \frac{b^2}{a^2} [2ax_1 + x_1^2]$$

$$m^2 = \frac{b^2}{a^2} \left[2a \frac{x + x_1}{2} + \left(\frac{x + x_1}{2}\right)^2\right].$$

Multiplicirt man die dritte Gleichung mit 2 und zieht sie von der Summe der beiden ersten ab, so folgt:

$$\rho^2 + r^2 - 2m^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2 + x_1^2 - 2xx_1}{2}; \text{ folglich}$$

$$(2.)\quad 4m^2 = 2\rho^2 + 2r^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot h^2.$$

Setzt man diesen Werth in (1.) ein, so folgt:

III. Der Inhalt der hyperbolischen körperlichen Zone

$$GHKL = \frac{h\pi}{6} \cdot \left[3r^2 + 3\rho^2 - \frac{b^2}{a^2} h^2\right].$$

Beispiele folgen im nächsten §.

Anmerkung. Die Quadratur der Hyperbel, die Rectification der Hyperbel, Ellipse und Parabel, d. h. die Berechnung der Länge eines beliebigen Theiles einer solchen Curve, endlich die Berechnung der krummen Oberfläche des Körpers, den ein Kegelschnitt bei der Umdrehung um seine Axe erzeugt, ist durch die niedere Analysis nicht ausführbar.

§. 505.

Uebungs-Aufgaben über die Hyperbel.

Aufgabe 1. Wie groß ist die Excentricität der Hyperbel

$$y^2 = 3x + 2x^2?$$

Auflösung. Es ist $y^2 = 2(\frac{3}{2}x + x^2)$; folglich

$$2a = \tfrac{3}{2}, \text{ daher } a = \tfrac{3}{4}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 2, \text{ daher } b^2 = \tfrac{9}{8}; \text{ hieraus folgt:}$$

$$e = \tfrac{3}{4}\sqrt{3} = 1{,}299038.$$

Aufgabe 2. Wie groß ist die Excentricität der Hyperbel

$$y^2 = 2x + \tfrac{1}{3}x^2?$$

Antw. 3,4641 Längen-Einheiten

Aufgabe 3. Wie groß ist die Excentricität der Hyperbel

$$y^2 = 0{,}405 \,.\, x + 0{,}050625 \,.\, x^2?$$

Antw. 4,1 Längen-Einheiten.

Aufgabe 4. Wie groß ist der Asymptotenwinkel der Hyperbel

$$y^2 = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{2}x^2?$$

Antw. 70° 31′ 43,6″.

Aufgabe 5. Wie groß ist der Asymptotenwinkel der Hyperbel

$$y^2 = \tfrac{3}{4}x + x^2?$$

Antw. 90°.

Aufgabe 6. Wie weit sind die Brennpunkte der Hyperbel

$$y^2 = 2x + 3x^2$$

von einander entfernt?

Antw. $\frac{4}{3}$ Längen-Einheiten.

Aufgabe 7. Wie groß ist die Sehne der Hyperbel

$$5y^2 = 3x + 4x^2,$$

welche auf der Axe senkrecht steht und durch einen Brennpunkt geht?

Antw. 0,6 Längen-Einheiten.

Aufgabe 8. Giebt es außer dem Scheitel der Hyperbel noch einen Punkt in derselben, dessen Coordinaten der Scheitelgleichung einander gleich sind?

Antw. Ist die Hyperbel gleichseitig, so giebt es einen solchen Punkt nicht, wohl aber bei der ungleichseitigen Hyperbel; er hat dann die Abscisse und Ordinate $\frac{2ab^2}{a^2 - b^2}$. Ist die Hauptaxe größer als die Nebenaxe, so liegt der Punkt in derjenigen der conjugirten Hyperbeln, deren Scheitel der Anfangspunkt der Abscissen ist, und auf der positiven Seite der Hauptaxe; ist aber die Hauptaxe kleiner als die Nebenaxe, so liegt er in der anderen Hyperbel und auf der negativen Seite der Hauptaxe.

Aufgabe 9. Giebt es in der Hyperbel einen Punkt, welcher von der Hauptaxe eben so weit entfernt ist, als von der Nebenaxe?

Antw. Ist die Hyperbel gleichseitig, oder ist die Hauptaxe größer als die Nebenaxe, so giebt es einen solchen Punkt nicht. Ist aber die Nebenaxe die größere, so giebt es vier solche Punkte, wenn man den Abstand im absoluten Sinne nimmt. Versteht man aber unter »Abstände« die Coordinaten, die also positiv oder negativ sind, je nachdem sie auf der einen oder anderen Seite der Axen liegen, so giebt es zwei solche Punkte; in jedem Falle ist dann der Abstand von jeder Axe $= \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}$.

Aufgabe 10. Ein Punkt P der Hyperbel $y^2 = \frac{4}{3}x + \frac{1}{9}x^2$ hat die Abscisse $\frac{3}{2}$ und eine positive Ordinate; unter welchem Winkel φ schneidet die Tangente, welche die Hyperbel in P berührt, die Axe, und wie groß ist die Subtangente und die Subnormale des Punktes P?

Antw. $\varphi = 29^\circ\, 3'\, 16{,}6''$; die Subtangente $= 2{,}7$; die Subnormale $= \frac{5}{6}$.

Aufgabe 11. Ein Punkt P der Hyperbel $y^2 = \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}x^2$ hat die Abscisse $\frac{3}{2}$; wie groß sind die conjugirten Brennstrahlen nach dem Punkt P?

Antw. $\frac{39}{8}$ und $\frac{53}{24}$.

Aufgabe 12. Ein Punkt P der Hyperbel $y^2 = 3x + 8x^2$ hat die Abscisse 3 und eine positive Ordinate; wie heißt die Gleichung der Tangente, welche die Hyperbel in P berührt?

Aufl. Bezeichnet φ den Winkel, den die Tangente mit der X-Axe bildet, so ist die gesuchte Gleichung:

$$y - 9 = \operatorname{tg}\varphi \,.\, (x - 3).$$

Man findet dann $\operatorname{tg}\varphi = \frac{51}{18}$; daher ist die Gleichung der Tangente:

$$y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{51}{18}\,x.$$

Aufgabe 13. Ein Punkt P der Hyperbel $y^2 = 4x^2 - 9$ hat die Abscisse $\frac{5}{2}$ und eine positive Ordinate; wie heißt die Gleichung der Tangente, welche die Hyperbel in P berührt?

Antw. $y = -\frac{9}{4} + \frac{5}{2}x$. — Man kann diese Gleichung entweder eben so, wie die in der vorhergehenden Aufgabe, herleiten, oder nach §. 497. Anm.

Aufgabe 14. Wie heißt die Gleichung der Tangente, welche die Hyperbel $y^2 = x^2 - 16$ in einem Punkte berührt, welcher die Ordinate 3 und eine positive Abscisse hat?

Antw. $y = -\frac{16}{3} + \frac{5}{3}x$.

Aufgabe 15. In Beziehung auf ein beliebiges (rechtwinkliges) Coordinaten-System hat ein Punkt P die Abscisse 3 und die Ordinate 2, ein zweiter Punkt Q die Abscisse 6 und die Ordinate 3. Wie heißt die Gleichung der Hyperbel, deren Hauptaxe in der X-Axe liegt, deren Scheitel der Durchschnittspunkt der beiden Axen ist, und die durch die Punkte P und Q geht, und wie groß sind die beiden Axen der Hyperbel?

Aufl. Die Gleichung der Hyperbel hat die Form $y^2 = px + qx^2$. Damit die Hyperbel durch P und Q geht, müssen die Gleichungen

$$3p + 9q = 4 \quad \text{und} \quad 6p + 36q = 9$$

Statt finden; aus ihnen findet man p und q.

Die gesuchte Gleichung heißt: $y^2 = \frac{7}{6}x + \frac{1}{18}x^2$; die Hauptaxe ist $= 21$, die Nebenaxe $= \dfrac{7}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 16. Dieselbe Aufgabe, wenn P die Abscisse 1 und die Ordinate 2 hat, und Q die Abscisse -6 und die Ordinate -3.

Aufl. Die Gleichung der Hyperbel heißt $y^2 = \frac{45}{14}x + \frac{11}{14}x^2$; die Hauptaxe ist $= \frac{45}{11} = 4{,}0909$; die Nebenaxe $= \dfrac{45}{\sqrt{154}} = 3{,}6262$.

Aufgabe 17. Den Punkt der Hyperbel $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = -1$ zu bestimmen, dessen Tangente die Hauptaxe unter einem Winkel von 45° schneidet.

Aufl. Der gesuchte Punkt hat die Abscisse $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ und die Ordinate $\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, und zwar sind beide Coordinaten positiv, oder beide negativ zu nehmen. Giebt man den Coordinaten ungleiche Vorzeichen, so schneidet die Tangente die Axe unter einem Winkel von 135°. (Determination?)

Aufgabe 18. Eine Hyperbel ist durch die Gleichung gegeben: $y^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2$. Wenn nun die hyperbolische Ebene, welche von der Abscisse 6 und der zugehörigen Ordinate begrenzt wird, eine Umdrehung um die Axe macht, wie groß ist der Inhalt des entstandenen Hyperboloids?

Antw. 65,97345 Kubik-Einheiten. — Man kann den Körper nach der Formel §. 504. I. berechnen, nach welcher sein Inhalt $K = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2\pi}{3}(3a + x)$ ist, und zu dem Zwecke die gegebene Gleichung so umformen:

$$y^2 = \tfrac{1}{6}(3x + x^2),$$

woraus dann $a = \frac{3}{2}$ und $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{6}$ folgt, während $x = 6$ ist; oder man kann K unmittelbar aus der Durchschnittsfläche

$$y^2\pi = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6}x^2$$

nach §. 312. finden. Das Paraboloid von der Höhe x ist hieraus $= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{x^3}{3}$, und für x ist jetzt 6 zu setzen.

Aufgabe 19. Dieselbe Aufgabe für die Hyperbel $y^2 = 6x + 2x^2$, wenn die Höhe des Hyperboloids gleich 3 ist.

Aufl. Der Inhalt des Hyperboloids ist = 141,37167 Kubik-Einheiten.

Augabe 20. In der Hyperbel $y^2 = \frac{5}{2}x + \frac{1}{4}x^2$ ist vom Scheitel aus eine Sehne von der Länge 10 gezogen; wie groß ist der Inhalt des Körpers, den das zur Sehne gehörige Segment bei der Umdrehung um die Axe erzeugt?

Antw. $\frac{80\pi}{3} = 83{,}7758$ Kubik-Einheiten.

Aufgabe 21. Eine Hyperbel ist durch die Gleichung gegeben: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1$. Parallel mit der Hauptaxe 2a liegt in der Entfernung b von ihr eine in den beiden conjugirten Hyperbeln endende Linie; wie groß ist der Inhalt des Körpers, den die Ebene bei der Umdrehung um die Hauptaxe erzeugt, welche von der Hauptaxe, der mit ihr parallelen Linie und den Theilen der conjugirten Hyperbeln begrenzt wird, welche zwischen diesen Parallelen liegen?

Antw. $\frac{4ab^2\pi}{3} \cdot (-1 + 2\sqrt{2})$.

Aufgabe 22. Wie groß ist der Inhalt der hyperbolischen körperlichen Zone, welche die zwischen den Ordinaten 4 und 8 liegende

Ebene der Hyperbel $y^2 = \frac{20}{3}x + \frac{2}{3}x^2$ bei der Umdrehung um die Axe beschreibt?

Antw. $\frac{1376}{9}\pi = 480{,}3146$ Kubik-Einheiten.

Aufgabe 23. Eine Hyperbel ist durch die Gleichung $y^2 - x^2 = 4$ gegeben. Wenn nun die Ebene, welche zwischen der X-Axe und dem einen der conjugirten Theile dieser Hyperbel liegt, und welche andererseits durch die Ordinaten begrenzt wird, die zu den Abscissen $+4$ und -4 gehören, eine volle Umdrehung um die X-Axe macht, wie groß ist der Inhalt des Körpers, den sie beschreibt?

Antw. 234,5722 Kubik-Einheiten. (Simpsonsche Regel.)

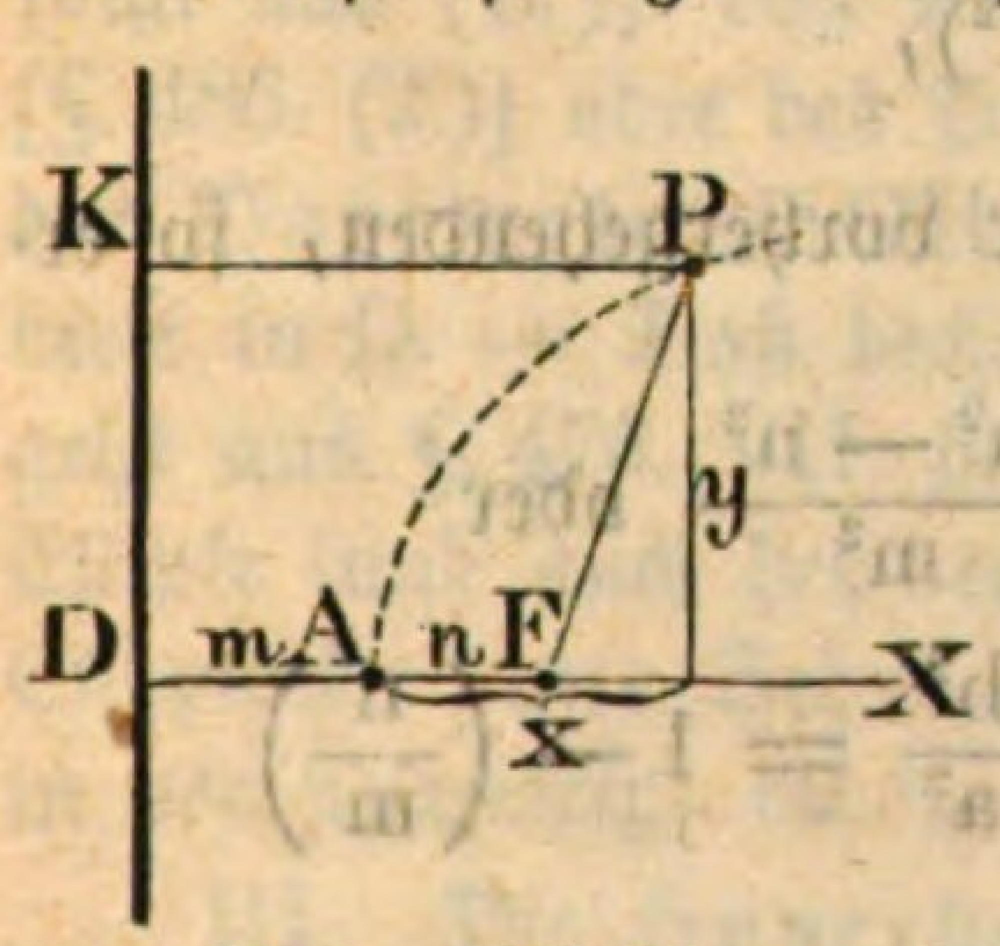
Vermischte Uebungen.

§. 506.

Die Directrix des Kegelschnitts.

Aufgabe. Eine Linie DF besteht aus zwei beliebigen Theilen $DA = m$ und $AF = n$; durch D geht die Linie DK, welche auf DF senkrecht steht. Man soll die Curve bestimmen, in welcher jeder Punkt P so liegt, daß seine Entfernung von F zu seiner Entfernung von der Linie DK das Verhältniß $n : m$ hat.

Auflösung. Es ist leicht zu erkennen, daß die gesuchte Curve durch A gehen muß, und daß die Richtung DF eine Axe derselben wird. Aus diesem Grunde wählen wir die Richtung DF zur Abscissenlinie (X-Axe) und A zum Anfangspunkt der Abscissen. Sind x und y die Coordinaten des Punktes P, so verhält sich nach der Aufgabe:



$$(1.)\quad \sqrt{y^2 + (x-n)^2} : x + m = n : m.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber:

$$(2.)\quad m^2y^2 = 2nm(n+m)x + (n^2 - m^2)x^2.$$

Die gesuchte Curve ist hiernach ein Kegelschnitt, die gefundene Gleichung ihre Scheitelgleichung; es ist daher A der Scheitel und AX die Axe des Kegelschnitts. Im Besonderen ist die Curve

eine Parabel, wenn $n = m$,
eine Ellipse, wenn $n < m$,
eine Hyperbel, wenn $n > m$ ist;

in jedem Falle nennt man die Linie DK die Directrix oder Leitlinie des Kegelschnitts.

Es bleibt zu untersuchen übrig, wie man die Directrix eines Kegelschnitts findet, wenn dieser auf die gewöhnliche Weise gegeben ist, also die Parabel durch ihren Parameter, die Ellipse und Hyperbel durch ihre Axen. Bei der Parabel finden wir dieselbe Linie, welche uns schon als Directrix bekannt ist.

I. Die Parabel, wenn $n = m$ ist.

Man erhält aus (2.) die Gleichung

$$y^2 = 4nx;$$

ist also p der Parameter einer gegebenen Parabel, so folgt $p = 4n$, also

$$n = m = \frac{p}{4}.$$

Es ist daher F der Brennpunkt der Parabel, und die Directrix ist eben so weit vom Scheitel A entfernt, als der Brennpunkt.

II. Die Ellipse, wenn $n < m$ ist.

Die Gleichung (2.) läßt sich so schreiben:

$$y^2 = \frac{m^2 - n^2}{m^2} \cdot \left(\frac{2mn}{m-n} x - x^2\right).$$

Sind nun $2a$ und $2b$ die Axen einer gegebenen Ellipse, so ist ihre Scheitelgleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax - x^2),$$

und vergleichen wir diese Gleichung mit der vorhergehenden, so ergiebt sich:

$$a = \frac{mn}{m-n} \text{ und } \frac{b^2}{a^2} = \frac{m^2 - n^2}{m^2} \text{ oder}$$

$$(3.) \quad a\left(1 - \frac{n}{m}\right) = n \text{ und } (4.) \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{n}{m}\right)^2.$$

Aus (4.) folgt aber

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{e^2}{a^2},$$

wenn e die Excentricität der Ellipse ist; daher verhält sich:

$$(5.) \quad n : m = e : a.$$

Aus (3.) folgt jetzt $n = a\left(1 - \frac{e}{a}\right)$ oder

$$(6.) \quad n = a - e; \text{ folglich aus (5.):}$$

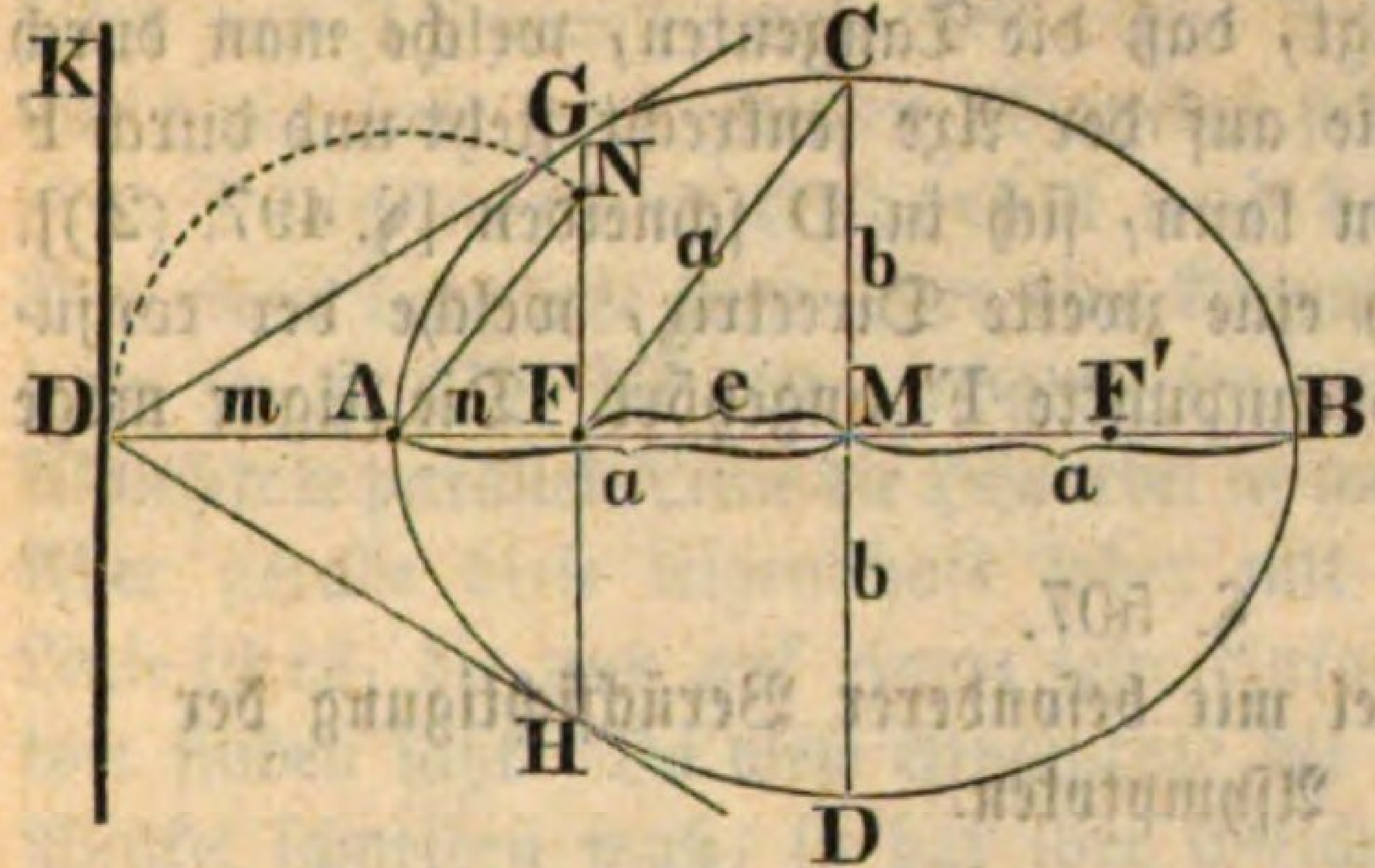
$$(7.) \quad m = \frac{a}{e}(a - e).$$

Addirt man noch (6.) und (7.), so folgt

$$n + m = (a - e)\frac{a + e}{e} = \frac{a^2 - e^2}{e}, \text{ oder:}$$

$$(8.) \quad n + m = \frac{a^2 - e^2}{e} = \frac{b^2}{e}.$$

Aus den gefundenen Werthen ergiebt sich nun Folgendes: Aus (6.) folgt, daß F der Brennpunkt der Ellipse ist, welcher ihrem Scheitel A am nächsten liegt; aus (5.) folgt eine einfache Construction der Directrix. Zieht man durch F die Sehne GH senkrecht zur Axe AB, verbindet F mit C und zieht AN ∦ FC, so ist AN = m (ähnliche Dreiecke), und macht man AD = AN und zieht durch D die Linie DK ⊥ DF, so ist DK eine Directrix der Ellipse.



Eine zweite liegt auf der andern Seite der Ellipse in der Entfernung m von B, gehört zu dem Brennpunkte F′ und ist parallel DK. — Aus (8.) ergiebt sich aber noch eine zweite Construction der Directrix; denn es folgt aus (8.), daß n + m die Subtangente des Punktes G ist [§. 485. (2.)] oder des Punktes H; legt man also durch die Endpunkte des Parameters GH Tangenten an die Ellipse, so schneiden sich diese in D. — Daß dasselbe Gesetz auch bei der Parabel Statt findet, geht aus §. 476. VII. hervor. Ueberhaupt schneiden sich auch bei der Ellipse (und auch bei der Hyperbel) die Tangenten, welche durch die Endpunkte einer Sehne gelegt sind, die durch den Brennpunkt geht, in der Directrix; die Untersuchung hierüber sei dem Leser überlassen.

III. Die Hyperbel, wenn n > m ist.

Die Gleichung (2.) läßt sich schreiben:

$$y^2 = \frac{n^2 - m^2}{m^2}\cdot\left(\frac{2nm}{n - m}x + x^2\right),$$

während die Scheitelgleichung der Hyperbel, wenn 2a und 2b ihre Axen sind, heißt:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot(2ax + x^2).$$

Aus der Vergleichung dieser Gleichung mit der vorhergehenden folgt aber:

$$a = \frac{nm}{n - m} \text{ und } \frac{b^2}{a^2} = \frac{n^2 - m^2}{m^2}.$$

Die weitere Entwicklung ist genau so, wie bei der Ellipse; man erhält:

$$(9.) \qquad n : m = e : a$$

$$(10.) \qquad n = e - a$$

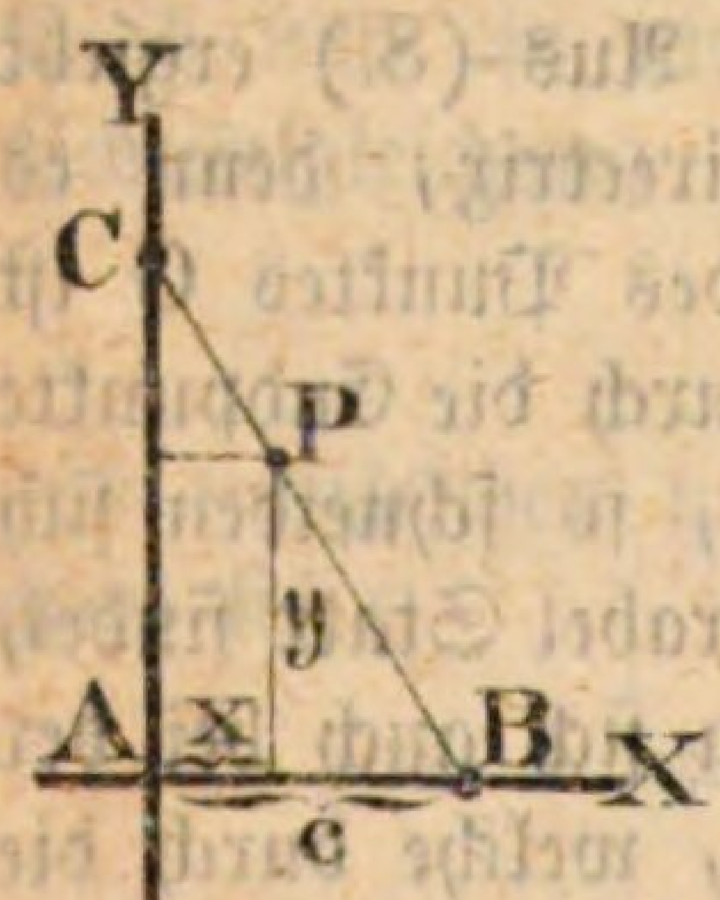
$$(11.) \qquad n + m = \frac{e^2 - a^2}{e} = \frac{b^2}{e}.$$

Aus (10.) folgt, daß F der eine Brennpunkt der Hyperbel ist; aus (9.) ergiebt sich eine Construction der Directrix mit Hülfe ähnlicher Dreiecke, aus (11.) aber folgt, daß die Tangenten, welche man durch die Endpunkte der Sehne, die auf der Axe senkrecht steht und durch F geht (der Parameter), legen kann, sich in D schneiden [§. 497. (2.)]. Auch die Hyperbel hat noch eine zweite Directrix, welche der conjugirten Hyperbel und dem Brennpunkte F′ angehört. Die Figur möge der Leser selbst zeichnen.

§. 507.

Analysis einer Hyperbel mit besonderer Berücksichtigung der Asymptoten.

Aufgabe. Es sind zwei sich senkrecht schneidende Linien AB und AC gegeben, und in der einen der Punkt B durch die Länge AB = c. Man denke sich nun B mit jedem Punkte (C) der Linie AC durch eine gerade Linie verbunden und BC so in zwei Abschnitte BP und CP zerlegt, daß sich immer



$$BP : CP = AC : AB$$

verhält; in welcher Curve liegen dann alle Theilungspunkte P?

Auflösung. Nimmt man AB und AC zu Coordinatenaxen, und zwar AB zur X-Axe und AC zur Y-Axe, bezeichnet man die Coordinaten des Punktes P mit x und y und zieht noch durch P eine mit BA parallele Linie, so ergiebt sich aus der Bedingung der Aufgabe und aus ähnlichen Dreiecken:

$$c - x : x = AC : AB$$
$$c - x : y = AB : AC.$$

Setzt man beide Proportionen zusammen, so folgt:

$$(1.) \qquad (c - x)^2 = xy.$$

Die gesuchte Curve ist sonach eine Hyperbel, und wir wollen jetzt ihre Lage zu dem gewählten Coordinatensystem, ihre Axen, Scheitel und Brennpunkte aufsuchen und bei dieser Untersuchung von der Ermittelung ihrer Asymptoten ausgehen.

Entwickeln wir y aus (1.), so folgt:

$$(2.)\qquad y = \frac{(c - x)^2}{x}$$

und hieraus ergiebt sich $y = \infty$, wenn $x = 0$ ist, d. h. die Y-Axe ist eine Asymptote der Hyperbel.

Wie finden wir nun die zweite Asymptote? Die X-Axe ist sie nicht, auch ist sie nicht mit ihr parallel; denn setzt man $y = 0$, so folgt aus (1.) $x = c$, und weil dieser Werth aus einer quadratischen Gleichung (mit zwei gleichen Wurzeln) sich ergiebt, so ist die X-Axe eine Tangente der Hyperbel und berührt sie im Punkte B. Mit einer Tangente kann aber eine Asymptote auch nicht parallel sein, denn in §. 471. III. ist nachgewiesen worden, daß jede mit einer Asymptote parallele Linie die Hyperbel in nur einem Punkte schneidet. Aber gerade diese Eigenschaft jeder mit einer Asymptote parallelen Linie ist es, die uns auf einem sehr einfachen Wege die zweite Asymptote finden läßt. Da diese Asymptote die X-Axe unter einem schiefen Winkel schneiden muß, so hat ihre Gleichung die Form:

$$(3.)\qquad y = n + mx,$$

und alle mit der Asymptote parallelen Linien haben dieselbe Constante m, aber verschiedene Constanten n. Können wir also m so bestimmen, daß die Linien (3.) und (1.) sich nur in einem Punkte schneiden, wobei n noch beliebig bleibt, so erhalten wir für jeden Werth von n immer eine mit der Asymptote parallele Linie und können von ihr zur Asymptote übergehen. Substituirt man y aus (3.) in (1.), so folgt

$$(4.)\qquad (c - x)^2 = nx + mx^2$$

und diese Gleichung, in welcher x die Abscisse eines gemeinschaftlichen Punktes beider Linien ist, muß für x nur einen Werth und zwar aus einer Gleichung vom ersten Grade geben, woraus folgt, daß $m = 1$ sein muß. Die Gleichung (3.) lautet jetzt:

$$(5.)\qquad y = n + x$$

und bestimmt eine mit der Asymptote parallele Linie für einen beliebigen Werth von n; die Abscisse ihres Durchschnittspunktes mit der Hyperbel folgt aus (4.), wenn man $m = 1$ setzt. Man erhält

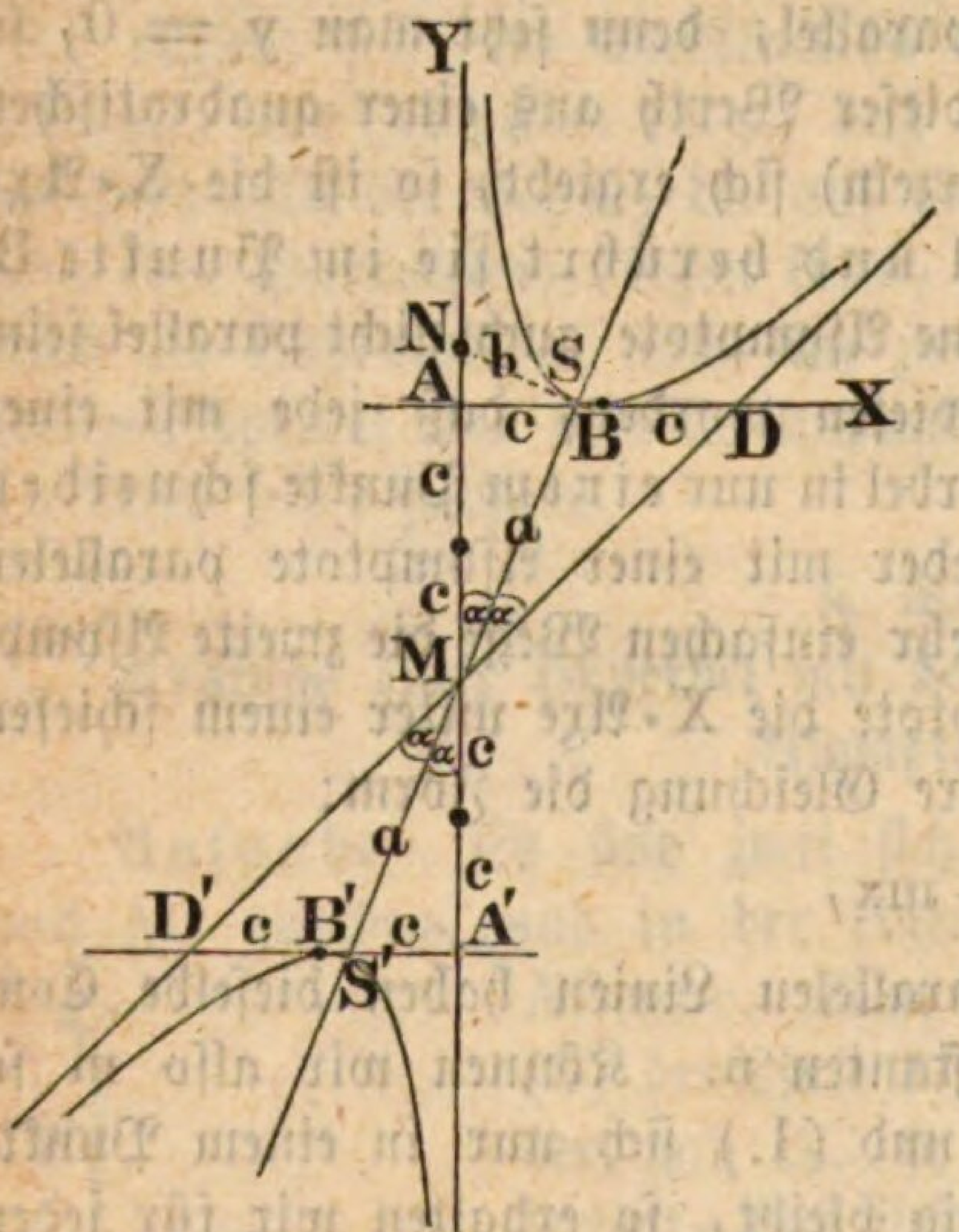
$$x = \frac{c^2}{n + 2c}.$$

Dieser Werth von x muß, wenn (5.) die Gleichung der Asymptote selbst sein soll, gleich ∞ sein, d. h. es muß $n + 2c = 0$, also $n = -2c$

sein, und substituirt man diesen Werth in (5.), so erhält man die Gleichung der Asymptote:

$$(6.) \qquad y = -2c + x.$$

Diese Asymptote schneidet die X-Axe in der Entfernung 2c, die Y-Axe in der Entfernung —2c von A, beide Axen aber unter einem Winkel von 45°. Macht man also AD = AM = 2c und legt durch M und D eine gerade Linie, so ist diese Gerade D'D die zweite Asymptote der Hyperbel. Ihr Durchschnittspunkt M mit der Y-Axe ist der Mittelpunkt der Hyperbel, und der Asymptotenwinkel 2α ist 45°. Macht man ferner MA' = 2c und zieht A'D' parallel DA, so ist auch A'D' eine Tangente der Hyperbel; die Verbindungslinie BB' der Berührungspunkte beider Tangenten ist ein Durchmesser der Hyperbel und hat die Länge $2c\sqrt{5}$, der conjugirte Durchmesser ist AD = 2c; endlich ist noch der Winkel δ, unter welchem sich diese conjugirten Durchmesser schneiden, aus der Gleichung $\operatorname{tg}\delta = 2$ zu finden.



Es bleibt noch übrig, die beiden Axen der Hyperbel und ihre Brennpunkte zu bestimmen. Halbirt man den Asymptotenwinkel 2α, schneidet die Halbirungslinie die conjugirten Hyperbeln in S und S', und errichtet man noch SN ⊥ MS, so sind S und S' die Scheitel, SS' die Hauptaxe 2a und SN die halbe Nebenaxe b der Hyperbel. Man kann a und b aus den Gesetzen in §. 501. berechnen, nach welchen $a^2 - b^2 = 4c^2$ und $ab = 2c^2$ ist; bequemer aber ist es, statt der ersten Gleichung die aus der tg. des halben Asymptotenwinkels entspringende anzuwenden. Es ist $\operatorname{tg} 22° \, 30' = -1 + \sqrt{2}$, und man hat sonach:

$$\frac{b}{a} = -1 + \sqrt{2} \quad \text{und} \quad ab = 2c^2.$$

Hieraus folgt aber:

$$\text{die halbe Hauptaxe} = c\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$$
$$\text{die halbe Nebenaxe} = c\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}, \text{ folglich}$$
$$\text{die Excentricität} = 2c\sqrt[4]{2}.$$

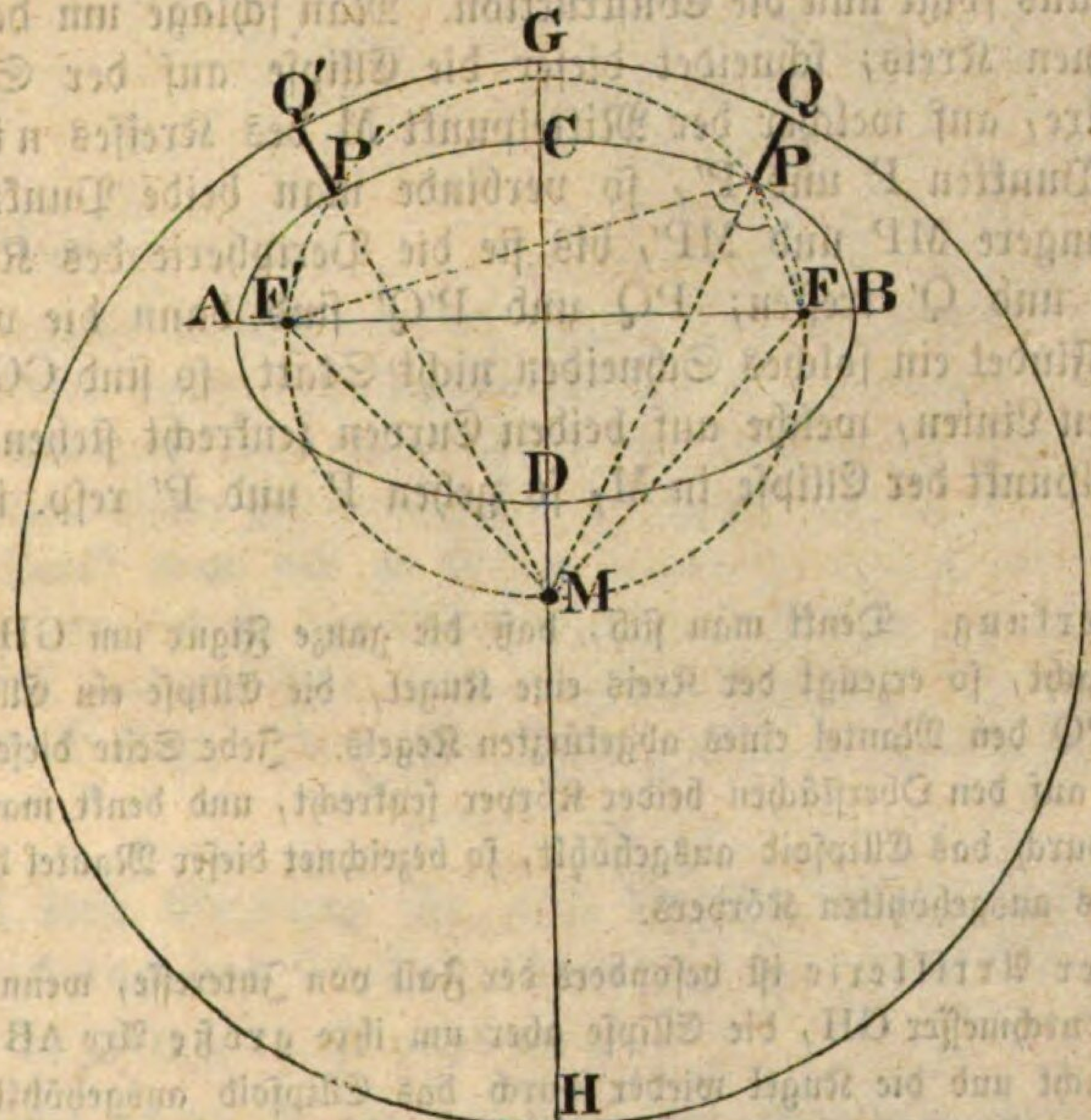
§. 508.

Aufgabe.

Innerhalb des Kreises um M liegt die Ellipse ACBD, deren kleine Axe CD in einem Durchmesser des Kreises liegt; man soll diejenigen Linien bestimmen, welche zwischen der Ellipse und der Kreisperipherie liegen und auf beiden Curven senkrecht stehen.

Auflösung. Man sagt »eine Linie steht auf einer Curve senkrecht«, wenn sie auf der Tangente des Punktes senkrecht steht, in welchem sie die Curve trifft. Hieraus folgt, daß eine Linie auf einer Kreisperipherie senkrecht steht, wenn sie durch den Mittelpunkt des Kreises geht, und daß sie auf einer Ellipse senkrecht steht, wenn sie eine Normale dieser Curve ist. Bei der vorliegenden Aufgabe kommt es also darauf an, alle Normalen der Ellipse zu finden, welche durch den Mittelpunkt des Kreises gehen.

Ist nun GH der Durchmesser des Kreises, in welchem die kleine Axe CD der Ellipse liegt, so stehen zunächst die beiden Linien CG



und DH auf beiden Curven senkrecht, und wir haben nun die übrigen Linien dieser Art zu suchen.

Gesetzt PQ wäre eine solche Linie, so müßte PQ verlängert durch M gehen und die Normale der Ellipse für den Punkt P sein. Nun halbirt aber die Normale den Winkel, welchen die conjugirten Brenn-

strahlen der Ellipse nach dem Punkte P mit einander bilden, und sind F und F′ die Brennpunkte, so muß also

$$\measuredangle MPF = \measuredangle MPF'$$

sein. Hieraus folgt aber, daß entweder $\Delta\, MPF \cong \Delta\, MPF'$ sein muß — und dann ergeben sich die beiden Punkte C und D für P, also die Linien CG und DH —, oder daß das Viereck PFMF′ in einem Kreise liegen muß. Denn die beiden Dreiecke MPF und MPF′ haben zwei Paar gleicher Seiten und ein Paar gleicher Winkel, welche den gleichen Seiten MF und MF′ gegenüberliegen; ist daher die Summe der beiden Winkel bei F und F′, welche der gemeinschaftlichen Seite MP beider Dreiecke gegenüberliegen, ungleich 180°, so sind die Dreiecke congruent, woraus PF = PF′ folgt, so daß in diesem Falle P in den Durchmesser GH fallen muß; ist aber diese Summe gleich 180°, so liegt bekanntlich das Viereck PFMF′ in einem Kreise; einen dritten Fall giebt es nicht.

Hieraus folgt nun die Construction. Man schlage um das Dreieck MFF′ einen Kreis; schneidet dieser die Ellipse auf der Seite ihrer großen Axe, auf welcher der Mittelpunkt M des Kreises nicht liegt, in zwei Punkten P und P′, so verbinde man beide Punkte mit M und verlängere MP und MP′, bis sie die Peripherie des Kreises um M in Q und Q′ treffen; PQ und P′Q′ sind dann die verlangten Linien. Findet ein solches Schneiden nicht Statt, so sind CG und DH die einzigen Linien, welche auf beiden Curven senkrecht stehen. — Liegt der Mittelpunkt der Ellipse in M, so gehen P und P′ resp. in B und A über.

Anmerkung. Denkt man sich, daß die ganze Figur um GH eine Umdrehung macht, so erzeugt der Kreis eine Kugel, die Ellipse ein Ellipsoid und die Linie PQ den Mantel eines abgekürzten Kegels. Jede Seite dieses Mantels steht dann auf den Oberflächen beider Körper senkrecht, und denkt man sich noch die Kugel durch das Ellipsoid ausgehöhlt, so bezeichnet dieser Mantel die dünnste Stelle dieses ausgehöhlten Körpers.

In der Artillerie ist besonders der Fall von Interesse, wenn der Kreis um einen Durchmesser GH, die Ellipse aber um ihre große Axe AB eine Umdrehung macht und die Kugel wieder durch das Ellipsoid ausgehöhlt ist (die 12pfündige Granate mit ellipsoidaler Höhlung). Dann liegen die auf den Oberflächen beider Körper senkrechten Linien in der Ebene, welche man durch die große Axe AB des Ellipsoids und den Mittelpunkt M der Kugel legen kann, und PQ und P′Q′ bezeichnen wieder die dünnsten Stellen dieses ausgehöhlten Körpers. Die Begründung überschreitet die Grenzen dieses Lehrbuches.

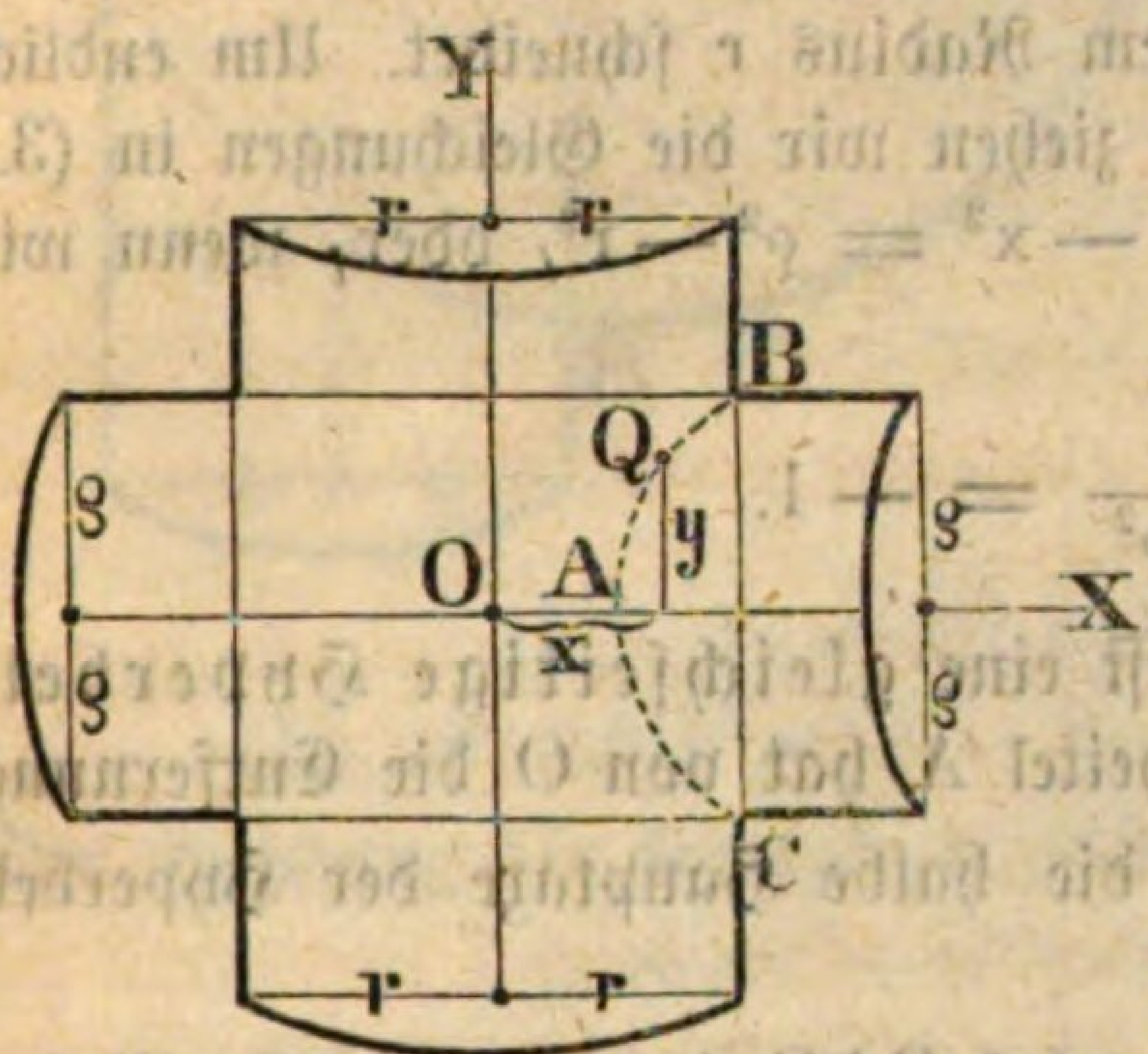
§. 509.

Zwei Aufgaben über Curven doppelter Krümmung.

(Vergl. §. 446.)

Aufgabe 1. Ein Cylinder mit dem Radius ϱ ist so durch einen Cylinder mit dem Radius r gesteckt, daß ihre Axen sich senkrecht schneiden; es soll die Curve bestimmt werden, in welcher die beiden Cylindermäntel sich schneiden. — In einer solchen Curve schneiden bei der Haubitze die Schildzapfen-Scheiben den Rohrkörper.

Auflösung. Die Axe des Cylinders mit dem Radius ϱ nehmen wir zur X-Axe, die des Cylinders mit dem Radius r zur Y-Axe; auf beiden steht in ihrem Durchschnittspunkte O die Z-Axe senkrecht, die sich der Leser zu der Figur hinzu denken möge. Um die gesuchte Curve zu bestimmen, wollen wir zuerst die Gleichung des Cylindermantels mit dem Radius ϱ bestimmen. Es sei Q ein beliebiger Punkt der Ebene XY innerhalb des Cylinders, seine Coordinaten sind x und y; in Q denken wir uns eine Senkrechte auf XY errichtet, welche den Cylindermantel in P schneidet. Bezeichnen wir PQ mit z, so sind x, y und z die Coordinaten des Punktes P, und zwischen ihnen haben wir die Gleichung des Cylindermantels zu bilden. Denkt man sich zu diesem Zweck eine Ebene durch y und z gelegt, so schneidet sie den Cylinder mit dem Radius ϱ in einem Kreise, der auf OX senkrecht steht, also auch den Radius ϱ hat, und in dessen Peripherie P liegt. Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz ist daher



$$y^2 + z^2 = \varrho^2,$$

und weil diese Gleichung für jeden Werth von x richtig ist, so ist die Gleichung des Cylindermantels mit dem Radius ϱ:

$$(1.)\quad 0.x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2.$$

Auf dieselbe Weise ist die Gleichung des Cylindermantels mit dem Radius r herzuleiten. Man legt, wenn P ein Punkt dieses Mantels ist, durch z eine auf OY senkrechte Ebene, und erhält, weil die von Q auf OY gefällte Senkrechte gleich x ist, die Gleichung des Cylindermantels mit dem Radius r:

$$(2.)\quad x^2 + 0.y^2 + z^2 = r^2.$$

Betrachtet man endlich (1.) und (2.) als zusammengehörige Gleichung, so erhält man die Gleichungen der gesuchten Curve:

$$(3.) \quad \begin{cases} y^2 + z^2 = \varrho^2 \\ x^2 + z^2 = r^2. \end{cases}$$

Am besten erkennt man diese Curve aus ihren Projectionen. Die erste der Gleichungen in (3.) ist die Projection auf die Coordinatenebene YZ; sie ist natürlich der Kreis mit dem Radius ϱ, in welchem diese Ebene den Cylinder mit der Axe OX schneidet. Die zweite Gleichung ist die Projection auf XZ, der Kreis mit dem Radius r, in welchem die Ebene XZ den Cylinder mit dem Radius r schneidet. Um endlich die Projection auf XY zu finden, ziehen wir die Gleichungen in (3.) von einander ab, und erhalten $y^2 - x^2 = \varrho^2 - r^2$, oder, wenn wir $r > \varrho$ annehmen:

$$(4.) \quad \frac{y^2}{r^2 - \varrho^2} - \frac{x^2}{r^2 - \varrho^2} = -1.$$

Diese Curve (in der Figur BAC) ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt O ist. Der Scheitel A hat von O die Entfernung $OA = \sqrt{r^2 - \varrho^2}$; diese Linie ist die halbe Hauptaxe der Hyperbel, die halbe Nebenaxe ist ihr gleich.

Ist $r = \varrho$, so geht die Hyperbel BAC in zwei gerade Linien über:

$$y = \pm x,$$

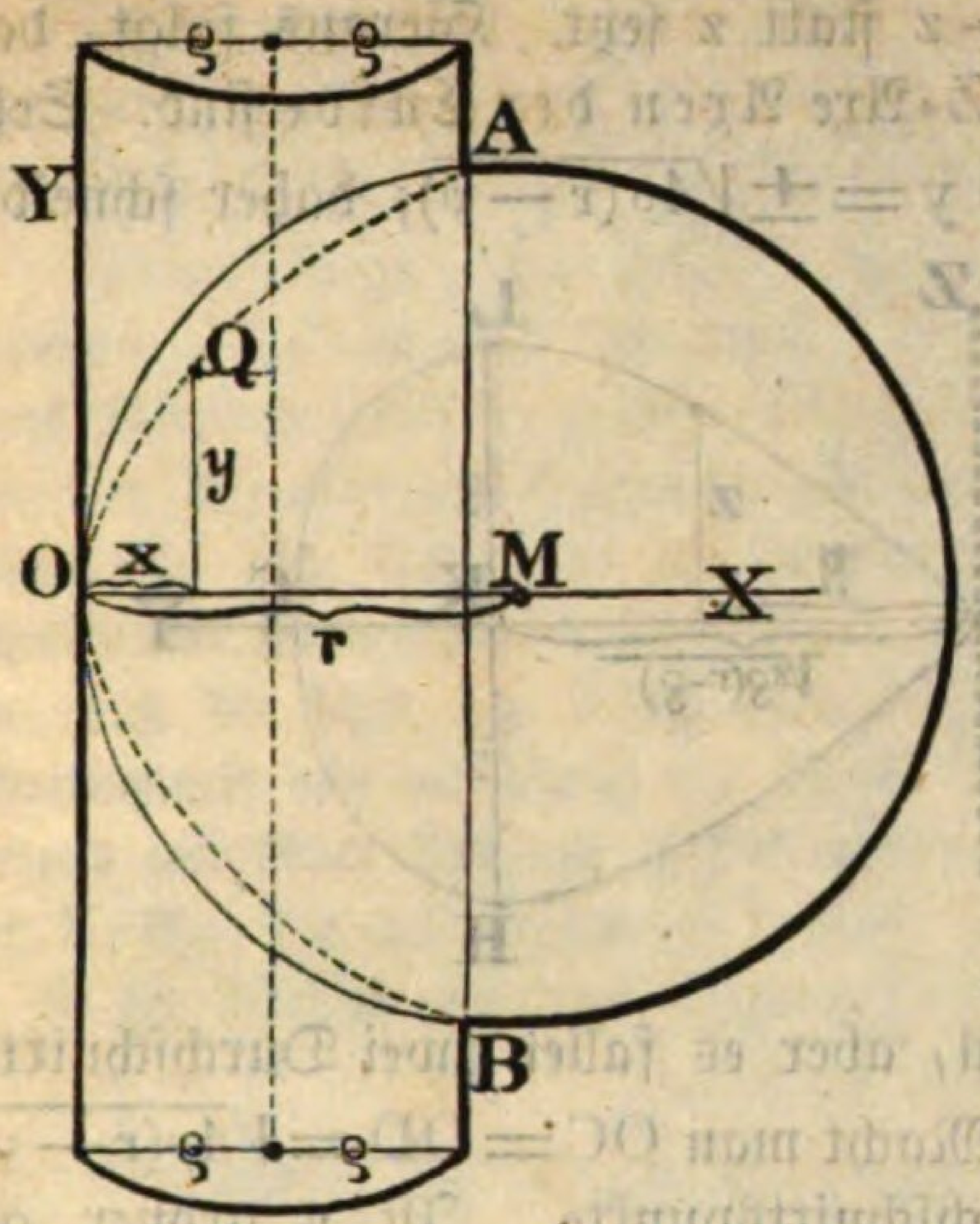
in die Linien BO und CO; daher wird in diesem Falle jede beider Durchschnittslinien der Cylindermäntel eine Curve einfacher Krümmung, und zwar eine Ellipse. Denn nimmt man OB zur Abscissenlinie und bezeichnet die Abscisse $(OQ = \sqrt{x^2 + y^2})$ mit u, so entsteht aus der Addition der beiden Gleichungen in (3.): $2z^2 + u^2 = 2r^2$ oder

$$z^2 = \tfrac{1}{2}[2r^2 - u^2];$$

die halbe große Axe dieser Ellipse ist daher gleich $r\sqrt{2}$, die halbe kleine Axe gleich r. (Vergl. die Figur des Kreuzgewölbes Seite 108.)

Aufgabe 2. Ein Cylinder mit dem Radius ϱ ist so durch eine Kugel mit dem Radius r gesteckt, daß sich ihre Oberflächen in O berühren, und es ist $r > \varrho$. Man soll die Curve bestimmen, in welcher die Oberfläche dieser Körper sich schneiden. — In einer solchen Curve schneiden beim Mörser die Schildzapfen-Scheiben den Rohrkörper.

Auflösung. Den Radius OM der Kugel wollen wir als X-Axe wählen, die durch O gehende Seite des Cylinders (eine Tangente der



Kugel) als Y-Axe; auf beiden senkrecht denke sich der Leser durch O die Z-Axe gelegt. Um die gesuchte Curve zu bestimmen, haben wir für das Coordinatensystem, dessen Axen X, Y und Z sind, die Gleichung der Oberfläche des Cylinders und die Gleichung der Oberfläche der Kugel herzuleiten, beide dann als zusammengehörig zu betrachten. Die Gleichung des Cylindermantels erhält man, wenn man durch einen beliebigen Punkt Q (x, y) der Ebene XY eine zur Axe des Cylinders senkrechte Ebene legt; es entsteht:

$$(\varrho - x)^2 + z^2 = \varrho^2 \text{ oder}$$

$$(1.) \quad x^2 + 0.y^2 + z^2 - 2\varrho x = 0.$$

Die Gleichung der Kugel (§. 449.) ist:

$$(r - x)^2 + y^2 + z^2 = r^2 \text{ oder}$$

$$(2.) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2rx = 0;$$

daher ist die gesuchte Curve durch die beiden Gleichungen

$$(3.) \quad \begin{cases} x^2 + z^2 - 2\varrho x = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2rx = 0 \end{cases}$$

bestimmt. Die ersten dieser beiden Gleichungen giebt unmittelbar die Projection der Curve auf die Ebene XZ (die Kreisperipherie, in welcher diese Ebene den Cylindermantel schneidet); die Projection auf die Ebene XY erhält man durch Elimination von z^2 aus beiden Gleichungen. Es entsteht:

$$(4.) \quad y^2 = 2(r - \varrho).x$$

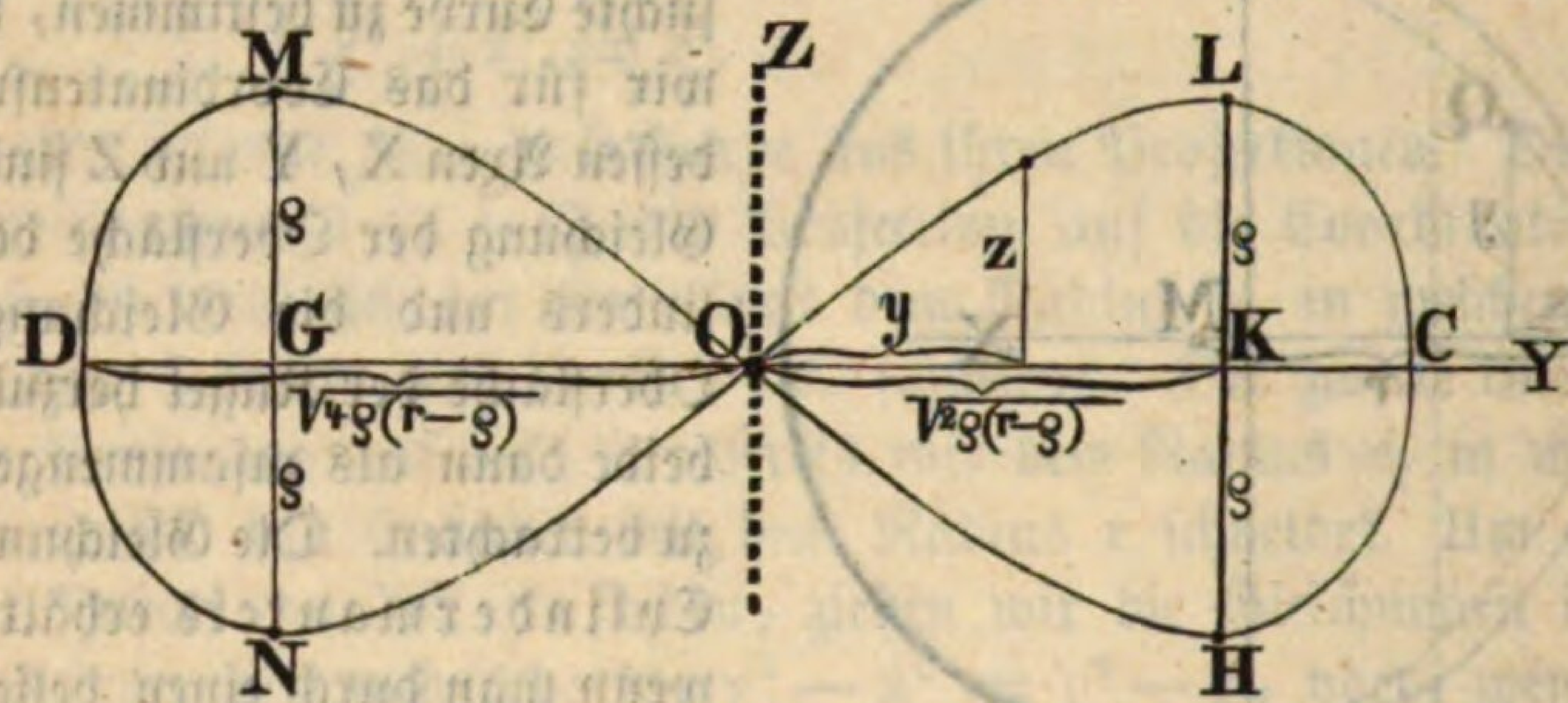
also eine Parabel, in der Figur die Curve AOB, deren Scheitel O, deren Axe OX ist.

Um noch die Projection der Curve auf die Ebene YZ zu finden, muß man x aus den beiden Gleichungen in (3.) eliminiren; man erhält:

$$(5.) \quad z^2 = \frac{\varrho}{r - \varrho} \cdot y^2 - \frac{1}{4(r - \varrho)^2} \cdot y^4.$$

Die Projection ist eine Curve des vierten Grades, also kein Kegelschnitt; ihre Gestalt ist leicht zu finden. Die Gleichung (5.) hat zunächst die Eigenschaft, daß sie unverändert bleibt, wenn man $-y$

statt y, und auch, wenn man $-z$ statt z setzt. Hieraus folgt, daß sowohl die Y-Axe, als auch die Z-Axe Axen der Curve sind. Setzt man $z=0$, so folgt $y=\pm 0$ und $y=\pm\sqrt{4\varrho(r-\varrho)}$; daher schneidet



die Y-Axe die Curve zwar viermal, aber es fallen zwei Durchschnittspunkte in einen (O) zusammmen. Macht man $OC=OD=\sqrt{4\varrho(r-\varrho)}$, so sind O, C und D die Durchschnittspunkte. Ist y größer als $+\sqrt{4\varrho(r-\varrho)}$ oder kleiner als $-\sqrt{4\varrho(r-\varrho)}$, so wird z imaginär, innerhalb dieser Grenzen aber reell; die Curve ist daher eine geschlossene. Die Z-Axe schneidet die Curve in einem Doppel-Punkte; denn für $y=0$ ist $z=\pm 0$. Für jeden andern Werth von y ergeben sich für z zwei Werthe mit gleichen Gliedern, aber verschiedenen Vorzeichen; daher hat die Curve die Form einer Schleife und ihre beiden Theile (rechts und links von der Z-Axe) sind congruent und liegen symmetrisch zur Z-Axe.

Bezeichnet man z^2 mit φy, so ist

$$\varphi y = \frac{\varrho}{r-\varrho}\,y^2 - \frac{1}{4(r-\varrho)^2}\,y^4, \text{ folglich}$$

$$\varphi' y = \frac{2\varrho}{r-\varrho}\,y - \frac{1}{(r-\varrho)^2}\,y^3 \text{ und}$$

$$\varphi'' y = \frac{2\varrho}{r-\varrho} - \frac{3}{(r-\varrho)^2}\,y^2.$$

Aus $\varphi' y = 0$ ergiebt sich $y=0$ oder $y=\pm\sqrt{2\varrho(r-\varrho)}$; für den ersten Werth von y wird $\varphi y = 0$ und ein **Minimum**; für den zweiten wird $\varphi y = \varrho^2$ und ein **Maximum**. Weil nun der Werth des Maximums **positiv** ist, so folgt, daß z für $y=\pm\sqrt{2\varrho(r-\varrho)}$ ein **Maximum**, oder **Minimum** ist, je nachdem man $z=+\varrho$, oder $z=-\varrho$ nimmt. In der Figur zeigen die Punkte L und M die Maxima, aber H und N die Minima an. Für $y=0$ ist z weder ein Maximum, noch ein Minimum; die Gründe sind aber durch die uns bekannten Gesetze nicht zu entwickeln. Es sei nur bemerkt, daß

die Curve zwei Wendepunkte hat, die beide in O zusammenfallen; hieraus folgt aber, daß bei O der Bogen LO in den Bogen ON, der Bogen HO in den Bogen OM übergeht.

Anmerkung. Eine dritte Aufgabe, die mit den beiden gegebenen zusammenhängt, sei dem Leser überlassen. Sie betrifft den Fall, wenn die Oberfläche eines Cylinders einen Kegelmantel schneidet, und findet ihre Anwendung, wenn die Schildzapfen-Scheiben einen Rohrkörper schneiden, der ein abgekürzter Kegel ist. Die Curve, in der das Schneiden geschieht, ist sonach die Durchschnittslinie eines Cylindermantels und des Mantels eines Kegels. Nehmen wir an, daß die Axen der beiden Körper sich senkrecht schneiden, daß ihr Durchschnittspunkt von der Spitze des Kegels den Abstand a hat und jede Seite des Kegels mit seiner Axe den Winkel α bildet, nehmen wir die Axe des Cylinders zur X-Axe, die des Kegels zur Y-Axe, auf beiden senkrecht endlich die Z-Axe: so ist die Gleichung des Kegelmantels:

$$x^2 + z^2 = (a - y)^2 . \mathrm{tg}\,\alpha^2.$$

Die Gleichung des Cylinders, wenn r sein Radius ist, heißt:

$$0 . x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Betrachtet man diese beiden Gleichungen als zusammengehörig, so bestimmen sie die gesuchte Curve. Die Projection derselben auf die Coordinatenebene XY ist eine Hyperbel.

Berlin, gedruckt in der Königlichen Geheimen Ober-Hofbuchdruckerei (R. v. Decker).

Berichtigungen.

Seite	30	Zeile	19	von	unten	lies	Parallelepipedon	statt	Parallelopipedon
„	38	„	15	„	unten	„	G.H	„	G.h
„	40	„	2	„	oben	„	12,599210	„	14,422496
„	96	„	13	„	unten	„	Kugelausschnitte	„	Kugelabschnitte
„	105	„	16	„	unten	„	$\frac{2}{3}r$	„	$\frac{1}{3}r$
„	117	„	1	„	oben	„	$tg\, c^2$	„	$\sec c^2$
„	141	„	16	„	unten	„	körperlichen Ecke	„	körperlichen
„	154	„	11	„	unten	„	$a + b$	„	$\alpha + b$
„	181	„	8	„	oben	„	Octaëder	„	Dodekaëder
„	185	„	1	„	unten	„	Vielflach	„	Vielfach
„	220	„	7	„	oben	„	gleichschenkliges	„	gleichseitiges
„	259	„	3	„	unten	„	$38^\circ\ 14'\ 32{,}8''$	„	$51^\circ\ 45'\ 27''$
„	273	„	14	„	oben	„	X-Axe	„	Y-Axe
„	273	„	15	„	oben	„	Y-Axe	„	X-Axe
„	325	„	8	„	oben	„	Y	„	Z
„	367	„	14	„	unten	„	$2\cos\alpha^2$	„	$2\cos\alpha$
„	381	„	12	„	oben	„	u_1	„	u
„	428	„	1	„	unten	„	APQ	„	ABQ
„	429	„	12	„	unten	„	$\frac{yy_1}{y + y_1}$	„	$\frac{yy_1}{y + y^2}$
„	496	„	1	„	oben	„	Tangenten	„	Tangente